On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes et de densités respectives u et v définies sur $\mathbb{R}$, alors $U+V$ est à densité, de densité donnée par :

$$w : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Questions de cours

1. Énoncer la caractérisation des variables aléatoires à densité.
2. Énoncer la condition suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme.
3. Donner la définition d'une valeur propre d'un endomorphisme.

Exercice 1

1. Écrire en Python une fonction `occurrence` qui prend en argument une liste `L` de chiffres (des nombres entre 0 et 9) et qui renvoie une liste `occ` telle que `occ[k]` soit égal au nombre de fois où l'entier `k` apparait dans la liste `L`.

   Par exemple, `occurrence([4,7,1,2,5,2,9,9,2])` *devra renvoyer* `[0,1,3,0,1,1,0,1,0,2]`.

2. On considère la fonction définie ci-dessous prenant en argument une liste de chiffres.

```python
def mystere(L):
    occ = occurrence(L)
    m = 0
    Lmaj = []
    for k in range(10):
        if occ[k] > m:
            m = occ[k]
            Lmaj = [k]
        elif occ[k] == m:
            Lmaj.append(k)
    return Lmaj
```

   a. Que renvoie l'instruction `mystere([1, 8, 1, 1, 4, 7, 4, 4, 7]` ?

   b. Que fait la fonction `mystere` ?

Exercice 2

1. Sans calculer sa valeur, montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$ converge.
2. À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que $I = \dfrac{\pi}{4}$. *On pourra calculer $2I$.*

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Le but de cet exercice est de montrer que X admet des moments de tout ordre.

1. Rappeler sans justification la valeur de $\mathbb{E}(X^k)$ pour k appartenant à $\{0,1,2\}$.
2. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que X admet un moment d'ordre $k-2$.

   Montrer que X admet un moment d'ordre k et $\mathbb{E}(X^k) = (k-1)\mathbb{E}(X^{k-2})$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^{2n} admet une espérance, égale à $\mathbb{E}\left(X^{2n}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^{2n+1} admet une espérance qu'on déterminera.

5. Conclure.

Exercice 4

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction $\ell_{\alpha,r}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\ell_{\alpha,r}(t) = \begin{cases} \alpha \dfrac{t^{\alpha-1}}{r^\alpha} & \text{si } t \in]0, r[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $\ell_{\alpha,r}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\alpha > 0$.

   Dans toute la suite de ce problème, on supposera cette condition réalisée.

2. On considère une variable aléatoire X admettant $\ell_{\alpha,r}$ pour densité. On note $\mathcal{L}(\alpha, r)$ la loi de X.

   a. Déterminer la fonction de répartition F de X.

   b. Reconnaitre la loi de la variable aléatoire $W = -\ln\left(\dfrac{X}{r}\right)$.

3. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant les lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ.

   a. Montrer que la variable aléatoire $-U_2$ est à densité et déterminer une densité.

   b. Montrer que $U_1 - U_2$ est une variable à densité, de densité donnée par :

   $$g_{\lambda,\mu} : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu t} & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

   c. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant respectivement les lois $\mathcal{L}(\alpha, r)$ et $\mathcal{L}(\beta, s)$, avec $(\alpha, \beta, r, s) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$. À l'aide de ce qui précède, donner la loi de $Z = -\ln\left(\dfrac{sX}{rY}\right)$ et en déduire que :

   $$\mathbb{P}(X < Y) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{s}{r}\right)^\alpha & \text{si } s < r \\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{r}{s}\right)^\beta & \text{si } r \leqslant s. \end{cases}$$

Exercice 5

On se propose d'étudier le modèle de diffusion d'Ehrenfest. On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux N boules avec $N \in \mathbb{N}^*$. À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'étape n. La variable aléatoire X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1, la variable aléatoire X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange, etc.

Par exemple, si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2, alors $N = 5$ et $X_0 = 3$. On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 2, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et l'on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 3, alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et l'on a $X_2 = 3$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. à l'issue de l'échange, on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de $\dfrac{3}{5}$ et $X_3 = 4$ avec une probabilité de $\dfrac{2}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$.

I. Matrice de transition

1. On suppose ici que $N = 2$.

   a. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = A_2 Y_n$, où $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. *Une récurrence n'est pas nécessaire.*

   b. La matrice A_2 est-elle diagonalisable ? Écrire une relation de diagonalisation le cas échéant.

2. Dans toute la suite, N désigne un entier naturel non nul fixé. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{N} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{N-1}{N} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \frac{2}{N} & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}).$$

3. Déterminer, lorsque $N = 2$ et $N = 3$ l'espace propre de A^T associé à la valeur propre 1.
4. Justifier dans le cas général que 1 est valeur propre de A^T.
5. En déduire que la matrice $(A - I_{N+1})^T$ est non inversible puis que 1 est valeur propre de A.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire $\mathbf{X_n}$

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable $X_{n+1} - X_n$?
2. En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \dfrac{2}{N}\mathbb{E}(X_n)$.
   On pourra utiliser le système complet d'événements $([X_n = k])_{k \in [\![0,N]\!]}$ *pour calculer* $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1)$.
3. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et $\mathbb{E}(X_0)$.
4. On suppose que $N > 2$. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation.

III. Étude de la probabilité stationnaire

On s'intéresse dans cette question à l'espace propre de A associé à la valeur propre 1, que l'on notera E_1.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $x_k = \dbinom{N}{k} x_0$.
2. En déduire la dimension de E_1.
3. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$.
4. Déterminer l'un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$.
5. On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :

$$X_\infty = [\![0, N]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0, N]\!],\ \mathbb{P}(X_\infty = k) = \pi_k.$$

   Quelle est la loi de X_∞ ? Donner son espérance et sa variance.
6. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞.
   Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.

* *

*