Exercice 1

1.

```python
import random as rd

def simule_X(p):
    N = 1
    while rd.random() > p:
        N += 1
    X = 0
    for k in range(N):
        if rd.random() < p:
            X += 1
    return X
```

2. La variable aléatoire N est égale au rang du premier succès (“obtenir pile”) lors de la répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p ; elle suit donc la loi géométrique de paramètre p. On sait aussi que : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

3. Soit $n \geqslant 1$. Sachant $[N = n]$, la variable aléatoire X est le nombre de succès (“obtenir pile”) lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. On en déduit que la loi de X sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

4. Remarquons que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements $([N = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{P}_{[N=n]}(X=0) \quad \text{la série converge par } \sigma\text{-additivité)}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}q^n\\
&= \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^n\\
&= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-q^2}-1\right)\\
&= \frac{pq^2}{q(1-q)(1+q)}\\
&= \frac{q}{1+q}.
\end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements $([N = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{P}_{[N=n]}(X=k) \quad \text{la série converge par } \sigma\text{-additivité)}\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{P}_{[N=n]}(X=k) \text{ car } \forall n \in [\![1, k-1]\!],\ \mathbb{P}_{[N=n]}(X=k) = 0\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} pq^{n-1}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\\
&= \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(q^2\right)^n\\
&= \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}} \times \frac{q^{2k}}{(1-q^2)^{k+1}} \text{ d'après la formule admise et car } q^2 \in]-1,1[\\
&= \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}} \times \frac{q^{2k}}{(1-q)^{k+1}(1+q)^{k+1}}\\
&= \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

La loi de X est donnée par :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=0) = \frac{q}{1+q} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}.}$$

5. a. Remarquons que $BG(\Omega) = \mathbb{N}$. Puisque $[BG = 0] = [B = 0]$, $\mathbb{P}(BG = 0) = q'$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $[BG = k] = [B = 1] \cap [G = k]$, trouve par indépendance de B et G que $\mathbb{P}(BG = k) = \mathbb{P}(B = 1)\,\mathbb{P}(G = k) = (p')^2\,(q')^{k-1}$. La loi de BG est donc donnée par :

$$\boxed{\mathbb{P}(BG=0) = q' \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(BG=k) = (p')^2\,(q')^{k-1}.}$$

b. On peut conjecturer la valeur de p' grâce à $\mathbb{P}(BG = 0)$ et $\mathbb{P}(X = 0)$ et ainsi poser :

$$p' = 1 - \frac{q}{1+q} = \frac{1}{1+q}$$

Pour cette valeur, on a bien $\mathbb{P}(BG = 0) = \mathbb{P}(X = 0)$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}} = \left(\frac{1}{1+q}\right)^2\left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} = \mathbb{P}(BG=k).$$

En posant $p' = \dfrac{1}{1+q}$, les variables aléatoires X et BG suivent bien la même loi.

c. Puisque les variables aléatoires B et G sont indépendantes et admettent une espérance, leur produit BG admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(BG) = \mathbb{E}(B)\,\mathbb{E}(G) = p \times \frac{1}{p} = 1.$$

Puisque les variables aléatoires X et BG suivent la même loi, elles ont la même espérance. En particulier, X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 1$.

Exercice 2

1. Par équiprobabilité des jetons, X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

   Remarquons que $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Puisque $([X = i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}_{[X=i]}(Y = j) \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \frac{1}{n}\,\frac{1}{n-1} \quad \text{par équiprobabilité des jetons} \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

   On en déduit que la variable aléatoire Y suit aussi la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

2. Puisque $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{1}{n^2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Les variables X et Y étant finies, le couple (X, Y) admet une covariance, donnée par la formule de König-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

   Calculons $\mathbb{E}(XY)$ à l'aide du théorème du transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\,\mathbb{P}(X = i, Y = j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{ij}{n(n-1)} \quad \text{car } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = i, Y = i) = 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{i^2}{n(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{ij}{n(n-1)} \right] \\
&= -\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j \\
&= -\frac{(n+1)(2n+1)}{6(n-1)} + \frac{n(n+1)^2}{4(n-1)} \\
&= \frac{(n+1)[-2(2n+1) + 3n(n+1)]}{12(n-1)} \\
&= \frac{(n+1)(3n^2 - n - 2)}{12(n-1)} \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.
\end{aligned}$$

   La formule de König-Huygens assure alors que :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} = -\frac{n+1}{12}.}$$