Exercice 1

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $A = PDP^T$.

Exercice 2

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et en donner une base, puis démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \ f(x) - x \in \operatorname{Ker} f.$$

2. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + z = 0$. Donner un vecteur normal à ce plan.
3. En déduire que f est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ à expliciter.
4. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Calculer la distance du vecteur x au plan $\mathcal{P}$.

* *
*