Questions de cours

1. Donner l'expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée.
2. Donner la définition de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel non vide de $\mathbb{R}^n$.
3. Donner la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des loi de Poisson **puis démontrer** ce résultat.

Exercice 1

1. **Algorithme de Box-Müller** : on peut montrer que si U_1 et U_2 sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$, alors $X = \sqrt{-2\ln(1-U_1)}\cos(2\pi U_2)$ suit la loi normale centrée réduite.
   a. Écrire en Python une fonction `loiGauss` qui simule la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
   b. En déduire une fonction `loi_normale` qui prend en argument deux flottants `m` et `s2` et simule la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance `m` et de variance `s2`.
2. Écrire une fonction `plssc` qui prend en argument une liste de nombres et qui renvoie la longueur d'une sous-suite croissante dans une liste de longueur maximale. *Par exemple,* `plssc([1,2,3,0,-5,3,6,7,5]` *devra renvoyer 4.*

Exercice 2

On considère l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe (et déterminer) des projections orthogonales p et q et des réels λ et μ tels que $f = \lambda p + \mu q$ et $p + q = \mathrm{Id}_E$.

1. Déterminer les valeurs propres de f et préciser leur nombre.
2. Déterminer une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ telle que $M = SDS^T$ et $S^T = S^{-1}$.
3. Supposons ici qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^4$ **de dimension non nulle**, et deux projections orthogonales p et q sur F et G respectivement, et des réels λ et μ tels que $f = \lambda p + \mu q$ et $p + q = \mathrm{Id}_E$.
   a. Montrer que pour tout $x \in F$, $q(x) = q(p(x))$.
   b. Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$.
   c. Pour tout $x \in F$, calculer $f(x)$. Que peut-on en déduire ?
   d. Montrer que μ est une valeur propre de f.
4. a. Déterminer deux réels λ et μ et deux matrices $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tels que $D = \lambda\tilde{P} + \mu\tilde{Q}$ et $\tilde{P} + \tilde{Q} = I_4$.
   b. En déduire deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $M = \lambda P + \mu Q$ et $P + Q = I_4$.
   On donnera une expression explicite des matrices P et Q.
   c. Soient p et q les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ dont P et Q sont respectivement les matrices dans la base canonique.
      (i) Que peut-on dire de $p + q$?
      (ii) Vérifier que $\mathrm{Im}\, p$ et $\mathrm{Im}\, q$ sont les espaces propres de f associés aux deux valeurs propres de f.
      (iii) Soient $x \in \mathrm{Im}\, p$ et $y \in \mathrm{Im}\, q$. Montrer que x et y sont orthogonaux.
      (iv) Montrer que p et q sont des projections orthogonales sur des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ qu'on explicitera.

Exercice 3 (G2E 2015)

On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densité f_X et f_Y alors $X+Y$ est une variable à densité et la fonction $h : t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(t-u)\,\mathrm{d}u$ est une densité de $X+Y$.

On considère p variables aléatoires $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ mutuellement indépendantes et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. a. Démontrer par récurrence sur n que X_k admet un moment à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, égal à $m_n(X_k) = \dfrac{n!}{\lambda^n}$.

   b. Déterminer la nature (et la somme éventuelle) de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{m_n(X_k)}$.

2. Montrer que la variable aléatoire $Y_2 = \min(X_1, X_2)$ est une variable aléatoire à densité dont on identifiera la loi.

3. On note $Z_2 = \max(X_1, X_2)$.

   a. Démontrer que la variable aléatoire Z_2 admet une densité qu'on déterminera.

   b. Démontrer que Z_2 admet une espérance qu'on calculera grâce à la question précédente.
   Vérifier que $\mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Z_2) = \mathbb{E}(X_1 + X_2)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

   c. Justifier l'existence de $\mathbb{V}(Z_2)$ et la calculer.

4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \times \mathbb{R}$. Démontrer que la variable aléatoire $aX_2 + b$ admet pour densité la fonction :

$$f_{aX_2+b} : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} & \text{si } t \geqslant b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. On note $T = X_1 + aX_2 + b$.

   a. Écrire en Python une fonction qui prend en argument trois flottants `a`, `b` et `lambd` (représentant λ) et qui simule la réalisation de la variable aléatoire T.

   b. Démontrer que T est une variable aléatoire à densité, dont une densité est :

$$f_T : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1-a} \left(e^{-\lambda(x-b)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)} \right) & \text{si } x \geqslant b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   c. Démontrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \times \mathbb{R}$ tel que Z_2 et T suivent la même loi.

Exercice 4 (MCR 2021 : modèle d'évolution de Wright-Fisher)

On rappelle la convention : $0^0 = 1$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On se donne une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $[\![0;2N]\!]$ et on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[\![0;2N]\!]$ vérifiant, pour tout entier n,

$$\forall (i,j) \in [\![0;2N]\!]^2, \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) = \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}.$$

Pour un variant génétique biallélique (dont les allèles sont notés A et a) et dans le cadre du modèle de Wright-Fisher, X_n représente le nombre d'allèles de type A à la génération n dans une population finie de taille N.

A. **Étude d'un cas particulier.**

On suppose ici que $N = 1$ et on note, pour tout entier n, $V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier n, on ait $V_{n+1} = MV_n$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$.
2. Prouver que M est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$.
3. Calculer M^n pour tout entier n.
4. En déduire que :
   a. pour tout entier n, on a $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$;
   b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n \in \{0; 2\}) = 1$.

B. **Cas général.**

On suppose désormais que $N \geqslant 1$. On cherche à généraliser les résultats de la question A.4.

1. a. Soit $i \in [\![0; 2N]\!]$. Donner une interprétation probabiliste de la somme

$$S_i = \sum_{j=0}^{2N} j \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

   et en déduire sa valeur.
   b. En déduire que, pour tout entier n, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)$.
   c. Interpréter le résultat obtenu.
2. On considère la suite u de terme général $u_n = \mathbb{P}(X_n \in \{0; 2N\})$.
   a. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1; 2N-1]\!]$.
   Montrer que $\mathbb{P}(X_{n+1} \in \{0; 2N\} | X_n = k) \geqslant 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n + 2(1 - u_n)\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.
   c. Soit α un réel appartenant à $]0; 1[$. On considère la suite w définie par :

$$w_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = w_n + \alpha(1 - w_n).$$

   Justifier que la suite w est convergente et donner sa limite.
   d. Conclure et interpréter le résultat obtenu. Quel phénomène biologique illustre-t-on ici ?

* *
*