Exercice 1

La matrice A est symétrique à coefficients réels, elle est donc diagonalisable via une matrice de passage orthogonale.
Déterminons tout d'abord son spectre. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}(3A-3\lambda I_3)\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1-3\lambda & -2 & -2\\ -2 & 1-3\lambda & -2\\ -2 & -2 & 1-3\lambda\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1-3\lambda\\ -2 & 1-3\lambda & -2\\ 1-3\lambda & -2 & -2\end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1-3\lambda\\ 0 & 3-3\lambda & -3+3\lambda\\ 0 & -6+6\lambda & P(\lambda)\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow 2L_3 + (1-3\lambda)L_1\end{array}\\
&\quad \text{où } P(\lambda) = (1-3\lambda)^2 - 4 = (3-3\lambda)(-1-3\lambda)\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1-3\lambda\\ 0 & 3-3\lambda & -3+3\lambda\\ 0 & 0 & Q(\lambda)\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2
\end{aligned}$$

où $Q(\lambda) = (3-3\lambda)(-1-3\lambda) - 2(3-3\lambda) = (3-3\lambda)(-3-3\lambda) = 9(\lambda-1)(\lambda+1)$.
Ainsi :

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible} \Leftrightarrow rg(A-\lambda I_3) \neq 3 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1.$$

On en déduit que 1 et -1 sont les seules valeurs propres de A. Déterminons les deux sous-espaces propres E_1 et E_{-1} de A associés aux valeurs propres 1 et -1.

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_1 \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow -2x-2y-2z = 0 \Leftrightarrow z = -x-y.$$

On en déduit que E_1 est le plan :

$$E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right).$$

$$X \in E_{-1} \Leftrightarrow AX = -X \Leftrightarrow (A+I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-2x-2y+4z = 0\\ 6y-6z = 0\end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

On en déduit que E_{-1} est la droite :

$$E_{-1} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

On pouvait prévoir que le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est dirige la droite E_{-1} puisque les espaces propres de A sont orthogonaux et puisque ce vecteur est normal au plan E_1 d'équation $x+y+z=0$.
Posons $u = (1,0,-1)$, $v = (0,1,-1)$ et $w = (1,1,1)$. Cherchons une base orthogonale de $\operatorname{Vect}(u,v)$.

$$\|u\| = \sqrt{2},\ \langle u, v\rangle = 1.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $t = v + au$. Les vecteurs u et t sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\langle u, t\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle + a\|u\|^2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2} = -\frac{1}{2}.$$

Les vecteurs u et $t = v - \frac{1}{2}u = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ sont orthogonaux. Les vecteurs

$$\tilde{u} = \frac{1}{\|u\|}u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \text{ et } \tilde{t} = \frac{1}{\|t\|}t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

forment une base orthonormées de $\operatorname{Vect}(u,v)$ puisque :

$$\operatorname{Vect}\left(\tilde{u}, \tilde{t}\right) = \operatorname{Vect}(u,t) = \operatorname{Vect}(u, v+au) = \operatorname{Vect}(u,v).$$

Enfin, le vecteur normé $\tilde{w} = \frac{1}{\|w\|}w = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ est une base de $\operatorname{Vect}(w)$.
Par construction, la famille $(\tilde{u}, \tilde{t}, \tilde{w})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
On peut alors écrire $A = PDP^T$ où :

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

La matrice P est bien une matrice orthogonale puisque la matrice de passage entre deux bases orthonormées : la base canonique et la base $(\tilde{u}, \tilde{t}, \tilde{w})$.

Exercice 2

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-2z=0 \\ 2x+5y-z=0 \\ -2x+y-5z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-2z=0 & \\ 3y+3z=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y+3z=0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((2,-1,1)).}$$

Le vecteur $(2,-1,1)$ est non nul donc forme une base de $\operatorname{Ker} f$.

$$AX - X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2x+2y-2z \\ 2x+5y+z \\ -2x+y+5y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4x+2y-2z \\ 2x-y+z \\ -2x+y-z \end{pmatrix}$$
$$= \frac{-2x+y-z}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^3,\ f(u) - u \in \operatorname{Ker} f.}$$

On pouvait aussi remarquer que $A^2 = A$, en déduire que $f^2 = f$ et donc que pour tout $u \in \mathbb{R}^3, f(f(u)-u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

2. On pourrait utiliser le théorème du rang pour montrer que $\operatorname{Im} f$ est un plan, mais puisqu'il est demandé plus d'informations sur ce plan, autant utiliser la méthode classique de détermination de l'image d'un endomorphisme en connaissant une de ses matrices.

Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$v \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}^3,\ f(u) = v$$
$$\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2a+2b-2c = x \\ 2a+5b+c=y \\ -2a+b+5c=z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2a+2b-2c = x \\ 3b+3c=y-x \\ 3b+3c=x+z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2a+2b-2c = x \\ 3b+3c=y-x \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

Le dernier système admet une solution si, et seulement si, $2x-y+z=0$.

Ainsi $2x-y+z=0$ est un équation de $\operatorname{Im} f$, qui est donc un plan de $\mathbb{R}^3$.

Le vecteur $(2,-1,1)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P} = \operatorname{Im} f$.

3. Montrons que f est la projection orthogonale sur $\mathcal{P} = \operatorname{Im} f$:
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) \in \mathcal{P}$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On sait que $f(x) - x \in \operatorname{Ker} f$. Or $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((2,-1,1))$ et $(2,-1,1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Donc $\operatorname{Ker} f \subset \mathcal{P}^{\perp}$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) - x$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$.

   L'endomorphisme f est donc la projection orthogonale sur $\mathcal{P} = \operatorname{Im} f$.

4. Le vecteur $f(x)$ est le projeté orthogonal de x sur $\mathcal{P}$. On sait que la distance du vecteur x au plan $\mathcal{P}$ est celle de x à $f(x)$, i.e. $\|f(x) - x\|$. D'après les calculs de la question 1, on a :

$$\|f(x) - x\| = \left|\frac{-2x_1 + x_2 - x_3}{6}\right| \sqrt{(2^2 + (-1)^2 + 1^2)} = \frac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}}$$

On en déduit que la distance du x au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\boxed{\dfrac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}}}$.

* *
*