Exercice 1

1. a.

```python
import numpy as np
import random as rd

def loiGauss():
    u1, u1 = rd.random(), rd.random()
    return np.sqrt(-2*np.log(1-u1)) * np.cos(2*np.pi*u2)
```

b. On utilise le résultat suivant : si X suit la loi normale centrée réduite, alors $\sigma X + m$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

```python
def loi_normale(m, s2):
    return m + (s2**0.5)*loiGauss()
```

2. On parcourt la liste et on compare chaque élément (sauf le premier) à son prédécesseur. On peut alors calculer la longueur de la suite croissante terminant par l'élément actuellement lu. On met-à-jour la longueur maximale des sous-suites croissantes lorsqu'on trouve un coefficient plus petit que son prédécesseur ou qu'on atteint la fin de la liste (à ne pas oublier !).

```python
def plssc(liste):
    longueur, longueur_max = 1, 1
    n = len(liste)
    for k in range(1,n):
        if liste[k] >= liste[k-1]:
            longueur += 1
        elif longueur > longueur_max or k=n-1:
            longueur_max = longueur
    return longueur_max
```

Exercice 2

1.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{rg}(M - \lambda I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 9-(2-\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9-(2-\lambda)^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - (2-\lambda)L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - (2-\lambda)L_1 \end{matrix}$$

Puisque :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(M) \Leftrightarrow 9 - (2-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow (5-\lambda)(1+\lambda) = 0,$$

on en déduit que $\underline{5 \text{ et } -1 \text{ sont les deux seules valeurs propres de } f}$.

2. Puisque M est symétrique réelle, M est diagonalisable via une matrice de passage orthogonale.

Déterminons les espaces propres de M. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{Id})(M) \Leftrightarrow (M - 5I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3t = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = z \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(On pourra vérifier que les deux dernières matrices colonnes engendrant $\mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{Id})$ correspondent à des vecteurs orthogonaux et normés de $\mathbb{R}^4$).

$$X \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})(M) \Leftrightarrow (M + I_4)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3t = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -z \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(On pourra vérifier que les deux dernières matrices colonnes engendrant $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ correspondent à des vecteurs orthogonaux et normés de $\mathbb{R}^4$).

Ainsi $\underline{M = SDS^{-1}}$ où :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

S est une matrice orthogonale, i.e. vérifiant $\underline{S^T = S^{-1}}$, car c'est la matrice de passage d'une base orthonormée (la base canonique de $\mathbb{R}^4$) vers une autre (une base orthonormée formée de vecteurs propres de f).

3. Supposons ici qu'il existe une projection orthogonale p (resp. q) sur un sous-espace vectoriel F (resp. G) de $\mathbb{R}^4$ et des réels λ et μ tels que $f = \lambda p + \mu q$ et $p + q = \mathrm{Id}_E$.

   a. Soit $x \in F$. Puisque p est la projection orthogonale sur F, $p(x) = x$. En composant par q, on trouve :

   $$\boxed{\forall x \in F,\ q(x) = q(p(x)).}$$

   b. Puisque $p + q = \mathrm{Id}_E$, en appliquant p (à gauche), on obtient $p^2 + p \circ q = p$. Puisque p est une projection orthogonale, $p^2 = p$. On en déduit alors que $\underline{p \circ q = 0}$.

   Par symétrie des rôles de p et q, on a $\underline{q \circ p = 0}$.

   c. Soit $x \in F$. On sait que $p(x) = x$ et, d'après ce qui précède, $q(x) = q(p(x)) = 0_E$. Puisque $f = \lambda p + \mu q$, on trouve :

   $$f(x) = \lambda p(x) + \mu q(x) = \lambda x + \mu q(p(x)) = \lambda x.$$

   Puisque F est de dimension non nulle, il existe un vecteur non nul x de F tel que $f(x) = \lambda x$. Ainsi <u>λ est valeur propre de f</u> et <u>tout vecteur non nul de F est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ</u>.

   On pouvait aussi écrire que F est inclus dans l'espace propre de f associé à la valeur propre λ.

   d. Par symétrie des rôles de (p, λ) et (q, μ), il vient que <u>μ est valeur propre de f</u>.

4. a. Puisque :

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $\underline{\lambda = 5,\ \mu = -1}$ et :

$$\boxed{\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

On a $\underline{D = \lambda \tilde{P} + \mu \tilde{Q}}$ et on vérifie sans difficulté que $\underline{\tilde{P} + \tilde{Q} = I_4}$.

b. On sait que $M = SDS^T$. Ainsi :

$$M = S(\lambda \tilde{P} + \mu \tilde{Q})S^T = \lambda S\tilde{P}S^T + \mu S\tilde{Q}S^T.$$

Posons $P = S\tilde{P}S^T$ et $Q = S\tilde{Q}S^T$. Par construction $\underline{M = \lambda P + \mu Q}$. De plus, on peut vérifier que $\underline{P + Q = I_4}$:

$$P + Q = S\tilde{P}S^T + S\tilde{Q}S^T = S(\tilde{P} + \tilde{Q})S^T = SI_4S^{-1} = I_4.$$

Après calculs, on obtient :

$$\boxed{P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

c. (i) Puisque $P + Q = I_4$ et puisque P et Q sont les matrices de p et q dans la base canonique, on en déduit que $p + q = \mathrm{Id}_E$.

(ii) Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de f de sorte que S soit la matrice de passage de la base canonique vers cette base. On sait que $\mathcal{B}$ est orthonormée par construction.
Par lecture des colonnes de P, on trouve que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{Id})$ (on pouvait aussi lire les colonnes de $\tilde{P}$). Par un raisonnement analogue, on trouve que $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Vect}(e_3, e_4) = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

(iii) Si l'un des vecteurs x ou y est nul, <u>x et y sont orthogonaux</u>.
Sinon, x et y sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est symétrique réelle. On en déduit que <u>x et y sont orthogonaux</u>.

(iv) Notons $F = \mathrm{Im}\, p$. Soit $x \in F$. Montrons que $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur F. Par définition de $p(x)$, $p(x) \in F$.
Montrons que $x - p(x)$ est orthogonal à tout vecteur de F.

Remarquons que $x - p(x) = (\mathrm{Id}_E - p)(x) = q(x) \in \operatorname{Im} q = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})(f)$. D'après la question précédente, $x - p(x)$ est orthogonal à tout vecteur de $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(f - 5\,\mathrm{Id})(f)$.
Par unicité du projeté orthogonal de x sur F, on en déduit que $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.
On en déduit donc que p est la projection orthogonale sur $F = \operatorname{Ker}(f - 5\,\mathrm{Id})(f)$ et, par symétrie des rôles des endomorphismes p et q, que q est la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})(f)$.

Exercice 3 (G2E 2015)

1. a. La variable aléatoire X_1 admet un moment d'ordre 0 puisque la variable X_1^0 est constante égale à 1 : $\mathbb{E}(X_k^0) = 1 = \dfrac{0!}{\lambda^0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que X_k admette moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$, égal à $m_n(X_k) = \dfrac{n!}{\lambda^n}$.
Étudions l'existence de $\mathbb{E}\left(X_k^{n+1}\right)$, i.e. la nature de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Les fonctions $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -e^{-\lambda t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ u'(t) = (n+1)t^n \text{ et } v'(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Remarquons que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} -t^{n+1}e^{-\lambda t} = 0$ par croissances comparées. Le théorème d'intégration par parties assure que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1}\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} (n+1)t^n e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. La seconde intégrale convergeant par hypothèse de récurrence (et par linéarité), la première converge aussi et X_k admet un moment d'ordre $n+1$, égal à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_k^{n+1}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{n+1}\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-t^{n+1}e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n+1}{\lambda}\int_0^{+\infty} t^n \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n+1}{\lambda}\,\mathbb{E}\left(X_k^n\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{\lambda^{n+1}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que, X_k admet un moment à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, égal à $\boxed{m_n(X_k) = \dfrac{n!}{\lambda^n}}$.

b. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{m_n(X_k)} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\lambda^n}{n!}$ est une série exponentielle donc convergente dont la somme est e^λ.

2. On a immédiatement $Y_2(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_2 \leqslant t) &= 1 - \mathbb{P}(Y_2 > t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)\,\mathbb{P}(X_2 > t) \text{ par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\
&= 1 - \left(e^{-\lambda t}\right)^2.
\end{aligned}$$

La fonction de répartition de Y_2 est donc :

$$\boxed{t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-2\lambda t} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi usuelle : Y_2 suit la loi exponentielle de paramètre 2λ.

3. a. Par indépendance de X_1 et X_2, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Z_2 \leqslant t) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant t)\,\mathbb{P}(X_2 \leqslant t) \quad \left(= \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2\right).$$

Puisque la fonction de répartition de X_1 (et de X_2) est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. celle de Z_2 vérifie les mêmes propriétés par produit.

Ainsi, Z_2 est une variable aléatoire à densité, de densité donnée par :

$$\boxed{t \mapsto \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

b. Étudions la convergence de l'intégrale (l'intégrande est positive sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\int_0^{+\infty} t\left(2\lambda e^{-\lambda t} - 2\lambda e^{-2\lambda t}\right) \mathrm{d}t.$$

Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} 2\lambda t e^{-2\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

étant convergente (on reconnait les moments d'ordre 1 des lois exponentielles de paramètre λ et 2λ), l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} 2\lambda t e^{-\lambda t} - 2\lambda t e^{-2\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

converge par linéarité. On en déduit que Z_2 admet une espérance, égale à :

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_2) = 2\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} 2\lambda t e^{-2\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}.}$$

Remarquons que :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Z_2) = \frac{2}{\lambda} = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X_1 + X_2).}$$

On pouvait prévoir ce résultat car :

$$\boxed{X_1 + X_2 = \min(X_1, X_2) + \max(X_1, X_2) = Y_2 + Z_2.}$$

c. Par un argument similaire à celui de la question précédente, Z_2 admet un moment d'ordre 2 - donc une variance - et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_2^2) &= 2\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} 2\lambda t^2 e^{-2\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\,\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) \quad \text{où } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda) \end{aligned}$$

En appliquant la formule de König-Huygens à Z_2, X et Y, on trouve :

$$\boxed{\mathbb{V}(Z_2) = \mathbb{E}(Z_2^2) - \mathbb{E}(Z_2)^2 = 2\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\right) - \left(\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2}\right) - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{5}{2\lambda^2}.}$$

4. Remarquons que $(aX_2 + b)(\Omega) = [b, +\infty[$. Notons F_{X_2} la fonction de répartition de X_2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(aX_2 + b \leqslant t) = \mathbb{P}\left(X_2 \leqslant \frac{t-b}{a}\right) = F_{X_2}\left(\frac{t-b}{a}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} & \text{si } t \geqslant b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition de X_2 étant continue sur $\mathbb{R}$, celle de $aX_2 + b$ l'est aussi. La fonction de répartition de X_2 étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, celle de $aX_2 + b$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en b. On en déduit que la variable aléatoire $aX_2 + b$ est à densité, de densité donnée par :

$$\boxed{f_{aX_2+b} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{a} F'_{X_2}\left(\frac{t-b}{a}\right) & \text{si } t \neq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} & \text{si } t \geqslant b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

5. On note $T = X_1 + aX_2 + b$.

a.

```python
import random as rd
import numpy as np

def simule_T(a,b,lambd):
    x1 = -np.log(1-rd.random())/lambd
    x2 = -np.log(1-rd.random())/lambd
    return x1 + a*x_2 + b
```

b. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes donc X_1 et $aX_2 + b$ le sont aussi. Notons $f_{X_1} : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ une densité de f_1.

Puisque X_1 et $aX_2 + b$ sont aussi à densité, la variable $T = X_1 + aX_2 + b$ admet une densité f_T, donnée par le produit de convolution :

$$f_T : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{aX_2+b}(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$f_{X_1}(t) f_{aX_2+b}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant 0 \\ x - t \geqslant b \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant x - b$$

- Si $x < b$, alors $f_T(x) = 0$.

- Si $x \geqslant b$, alors :

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \int_0^{x-b} \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(x-t-b)} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda^2}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)} \int_0^{x-b} e^{-\lambda(1-\frac{1}{a})t} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\lambda^2}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)} \left[-\frac{1}{\lambda(1-\frac{1}{a})} e^{-\lambda(1-\frac{1}{a})t} \right]_0^{x-b} \\ &= \frac{\lambda}{1-a} \left(e^{-\lambda(x-b)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)} \right) \end{aligned}$$

On en déduit qu'une densité de T est :

$$\boxed{f_T : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1-a} \left(e^{-\lambda(x-b)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)} \right) & \text{si } x \geqslant b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

c. Remarquons que si $b \neq 0$, les densités de Z_2 et T ne sont pas égales (puisque pas nulles sur le même intervalle par exemple).

Supposons qu'il existe un $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ tel que Z_2 et $T = X_1 + aX_2$ suivent la même loi.

Les variables Z_2 et T auraient alors la même espérance. Or $\mathbb{E}(Z_2) = \dfrac{3}{2\lambda}$, et par linéarité

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X_1) + a\,\mathbb{E}(X_2) = \frac{1+a}{\lambda}.$$

On en déduit que $1 + a = \dfrac{3}{2}$ puis $a = \dfrac{1}{2}$.

Réciproquement, si $(a,b) = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, on remarque que les densités de T et Z_2 obtenues aux questions précédentes sont égales, i.e. Z_2 et T suivent la même loi.

Ainsi, il existe un unique $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \times \mathbb{R}$ tel que Z_2 et T suivent la même loi, le couple $(a,b) = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Exercice 4 (MCR 2021 : modèle d'évolution de Wright-Fisher)

A. **Étude d'un cas particulier.**

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0;2]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, appliquées avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{0 \leqslant i \leqslant 2}$, on trouve que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(X_n = i)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

On en déduit que :

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(X_n = 1) \\ \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X_n = 1) \\ \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} V_n.$$

2. On trouve après calcul que $\mathrm{Sp}(M) = \left\{1, \dfrac{1}{2}\right\}$ et :

$$\mathrm{Ker}(M - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \mathrm{Ker}\left(M - \frac{1}{2} I_3\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On en déduit que M est diagonalisable (la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à 1) et $M = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$. Après calculs, on trouve que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 1 \end{pmatrix}.}$$

4. On peut alors montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$. On en déduit alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2^n}\,\mathbb{P}(X_0 = 1) \text{ et } \mathbb{P}(X_n = 2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_0 = 2).$$

Puisque les variables aléatoires X_n sont finies, elles admettent une espérance et :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_n) &= P(X_n=1)+2\,\mathbb{P}(X_n=2)\\ &= \frac{1}{2^n}\,\mathbb{P}(X_0=1)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\mathbb{P}(X_0=1)+2\,\mathbb{P}(X_0=2)\\ &= \mathbb{P}(X_0=1)+2\,\mathbb{P}(X_0=2)\\ &= \boxed{\mathbb{E}(X_0).}\end{aligned}$$

De plus : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}\left(X_n\in\{0;2\}\right)=1-\mathbb{P}(X_n=1)=1-\dfrac{1}{2^n}\,\mathbb{P}(X_0=1)$. Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(X_n\in\{0;2\}\right)=1.}$

B. **Cas général.**

1. a. La somme S_i est l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2N,\dfrac{i}{2N}\right)$, i.e. $\boxed{S_i=i.}$

   b. Les variables aléatoires X_n sont finies (à valeurs dans $[\![0,2N]\!]$, elles admettent donc une espérance. En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet $([X_n=i])_{0\leqslant i\leqslant 2N}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{2N} j\,\mathbb{P}(X_{n+1}=j)\\ &= \sum_{j=0}^{2N} j\sum_{i=0}^{2N}\mathbb{P}(X_{n+1}=j\mid X_n=i)\,\mathbb{P}(X_n=i)\\ &= \sum_{i=0}^{2N}\left[\sum_{j=0}^{2N} j\,\mathbb{P}(X_{n+1}=j\mid X_n=i)\right]\mathbb{P}(X_n=i)\\ &= \sum_{i=0}^{2N}\left[\sum_{j=0}^{2N} j\binom{2N}{j}\left(\frac{i}{2N}\right)^j\left(1-\frac{i}{2N}\right)^{2N-j}\right]\mathbb{P}(X_n=i)\\ &= \sum_{i=0}^{2N} S_i\,\mathbb{P}(X_n=i)\\ &= \sum_{i=0}^{2N} i\,\mathbb{P}(X_n=i)\\ &= \boxed{\mathbb{E}(X_n).}\end{aligned}$$

   c. La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante égale à $\mathbb{E}(X_0)$. On en déduit que les fréquences alléliques sont identiques d'une génération à une autre.

2. On considère la suite u de terme général $u_n=\mathbb{P}\left(X_n\in\{0;2N\}\right)$.

   a. Remarquons que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_{n+1}\in\{0;2N\}\middle|X_n=k\right) &= \mathbb{P}\left(X_{n+1}=0\middle|X_n=k\right)+\mathbb{P}\left(X_{n+1}=2N\middle|X_n=k\right)\\ &= \left(1-\frac{k}{2N}\right)^{2N}+\left(\frac{k}{2N}\right)^{2N}\\ &= \left(\frac{2N-k}{2N}\right)^{2N}+\left(\frac{k}{2N}\right)^{2N}\end{aligned}$$

   Puisque $k\geqslant 1$, $\left(\dfrac{k}{2N}\right)^{2N}\geqslant\left(\dfrac{1}{2N}\right)^{2N}$. Puisque $k\leqslant 2N-1$, $2N-k\geqslant 1$ et $\left(1-\dfrac{k}{2N}\right)^{2N}\geqslant\left(\dfrac{1}{2N}\right)^{2N}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X_{n+1}\in\{0;2N\}\middle|X_n=k\right)\geqslant 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}.}$$

   b. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n=k])_{0\leqslant k\leqslant 2N}$, on trouve :

$$u_{n+1}=\mathbb{P}(X_{n+1}\in\{0,2N\})=\sum_{k=0}^{2N}\mathbb{P}_{[X_n=k]}\left(X_{n+1}\in\{0;2N\}\right)\mathbb{P}(X_n=k)$$

   D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{[X_n=0]}\left(X_{n+1}\in\{0;2N\}\right)=\mathbb{P}_{[X_n=2N]}\left(X_{n+1}\in\{0;2N\}\right)=1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{[X_n=0]}\left(X_{n+1}\in\{0;2N\}\right)\mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}_{[X_n=2N]}\left(X_{n+1}\in\{0;2N\}\right)\mathbb{P}(X_n=2N)\\ &=\mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}(X_n=2N)=u_n\end{aligned}$$

   De plus, d'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2N-1}\mathbb{P}_{[X_n=k]}\left(X_{n+1}\in\{0;2N\}\right)\mathbb{P}(X_n=k) &\geqslant 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}\sum_{k=1}^{2N-1}\mathbb{P}(X_n=k)\\ &= 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}(1-u_n).\end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geqslant u_n+2(1-u_n)\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}.}$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = (1-\alpha)w_n + \alpha$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. En posant $t_n = w_n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = w_n - 1 + \alpha(1-w_n) = (1-\alpha)w_n.$$

La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\alpha \in]0,1[$. On en déduit qu'elle converge vers 0 et ainsi que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1}$.

d. Posons $\alpha = 2\left(\dfrac{1}{2N}\right)^{2N}$. Puisque $N \geqslant 1,\ \alpha \in]0,1[$. Montrer par récurrence que, pour tout tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant w_n$.
L'initialisation est triviale. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant w_n$. D'après la question 2.b, on a :

$$u_{n+1} \geqslant u_n + 2(1-u_n)\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} \geqslant w_n + 2(1-w_n)\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} = w_{n+1}.$$

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n \leqslant u_n \leqslant 1$ (u_n est une probabilité). La question précédente et le théorème d'encadrement de limites assure alors que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

On en déduit qu'après un grand nombre de générations, il est quasi-certain que tous les individus soient homozygotes.
On illustre ici un phénomène de dérive génétique.

* *
*