Planche 1
Agro-Véto 2023

Question de cours.
Donner une équation cartésienne de plan dont le vecteur $u = (1, 2, -1)$ est un vecteur normal.

Exercice (avec préparation).
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n f(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right).$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ admettant une suite adaptée.

1. Montrer que la suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{2}$.
2. Soit $f \in \mathcal{E}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite adaptée à f, alors $f' \in \mathcal{E}$ et la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à f'.
3. On considère une suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions définie par $B_0 = 1$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ B_p' = pB_{p-1} \text{ et } \int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

   On veut montrer que toutes les fonction B_p appartiennent à $\mathcal{E}$.

   a. Écrire en Python une fonction prenant en argument une liste $L = [a_0, \ldots, a_n]$ et renvoyant le nombre suivant :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,\mathrm{d}x.$$

   b. Calculer B_1 et B_2 et montrer que B_0 et B_1 appartiennent à $\mathcal{E}$.

   c. On fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction :

$$\varphi_{p,n} : x \mapsto \frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right).$$

   On suppose que B_{p-1} appartient à $\mathcal{E}$.

   (i) Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n^{p-2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à B_{p-1}.

   (ii) En déduire que la fonction $\varphi_{p,n}$ est constante.

   (iii) Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi_{p,n}(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (iv) En déduire que $\varphi_{p,n} = 0$.

   (v) Conclure.

Corrigé

Planche 2
Agro-Véto 2023

Question de cours.
Donner la définition de la continuité un point a d'une fonction f définie sur un intervalle I ($a \in I$).

Exercice (avec préparation).
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \lambda^3 - 9\lambda^2 - 29\lambda + 61 = 0$.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 9x^2 - 29x + 61$. Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on précisera ses limites en $+\infty$ et $-\infty$).

3. En déduire que A admet trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

4. À l'aide de l'outil informatique, déterminer une valeur approchée de ces trois valeurs propres à 10^{-2}-près (on pourra calculer $f(-4)$ et $f(12)$).

5. Montrer qu'on peut écrire $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

6. On note $\mathcal{C}(A)$ (resp. $\mathcal{C}(D)$) l'ensemble des matrices qui commutent avec A (resp. D).

   a. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{C}(D)$ si, et seulement si, M est diagonale.
   c. Montrer que : $M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$.
   d. En déduire une base de $\mathcal{C}(A)$.

Corrigé

Planche 3
Agro-Véto 2023

Question de cours.
Donner la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

Exercice (avec préparation).
On $n \geqslant 2$ éléphants. Un vétérinaire en examine un chaque jour en le choisissant au hasard. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Y_k le nombre d'éléphants différents qui ont été examinés jusqu'au jour k (inclus).

1. Écrire en Python une fonction qui prend en argument deux entiers k et n non nul et qui simule la variable Y_k.

2. Déterminer les lois de Y_1 et Y_2.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $G_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_k = i) X^i$.

   a. Montrer que $G_k(1) = 1$ et $G_k'(1) = \mathbb{E}(Y_k)$.

   b. Calculer G_1 et G_2.

   c. Exprimer $\mathbb{P}(Y_{k+1} = i)$ à l'aide de probabilités faisant intervenir Y_k.

   d. En déduire G_{k+1} en fonction de G_k puis $\mathbb{E}(Y_k)$.

4. On pose :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \dfrac{1}{n} X(1-X)P' + XP \end{array}$$

   a. Montrer que Φ est une application linéaire.

   b. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_j = X^j (1-X)^{n-j}$. Montrer que $\Phi(P_j) = \dfrac{j}{n} P_j$.

   c. Montrer que la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$ constitue un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qu'on notera φ.

   d. Montrer que φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

5. a. Vérifier que :

$$G_0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j \text{ et } \forall j \in [\![0, n]\!],\ P_j = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i.$$

   b. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ G_k = \Phi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right] X^i$$

   c. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(Y_k = i) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$

Corrigé

Planche 4
Agro-Véto 2023

Question de cours.
Résolution de l'équation $\cos x = \cos \alpha$ d'inconnue x.

Exercice (avec préparation).
Soient $E = \mathbb{R}^n$ un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soient f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E de dimension non nulle.

1. Écrire une fonction en Python qui prend en argument deux listes représentant les coordonnées de deux vecteurs u et v dans $\mathcal{B}$ et qui renvoie le produit scalaire de u et v.

2. On définit l'adjoint de f, noté f^*, par :

$$\forall u \in E,\ f^*(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u \mid f(e_i) \rangle e_i.$$

   a. Montrer que f^* est un endomorphisme de E.

   b. Montrer que :
$$\forall (u,v) \in E^2,\ \langle u \mid f(v) \rangle = \langle f^*(u) \mid v \rangle.$$

3. Compléter le code de la fonction ci-dessous permettant de calculer $f^*(u)$:

```
def adjoint(f,u):
    n = len(u)
    res = ...
    for i in range(n):
        e = np.zeros(n)
        e[...] = 1
        ...
    return res
```

4. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)^T$.

5. On suppose ici que $f^* = f$.

   a. Montrer que f est diagonalisable.

   b. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$.

6. Soit $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une base de F. On considère l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}^p$ définie par :

$$\forall v \in E,\ \Phi(v) = \left(\langle v \mid u_1 \rangle, \ldots \langle v \mid u_p \rangle\right).$$

   a. Montrer que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

   b. Soit $v \in E$. Montrer que : $v \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ \langle v \mid u_k \rangle = 0$.

   c. Montrer que Φ est une application linéaire surjective.

   d. Retrouver alors le résultat bien connu : $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - \dim F$.

Corrigé

Planche 5
Agro-Véto 2023

Question de cours.
Énoncer le théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire admettant une densité.

Exercice (avec préparation).
Pour tout $n \geqslant 1$, on considère la matrice $K_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!], (K_n)_{i,i+1} = i$, pour tout $j \in [\![1,n]\!], (K_n)_{j+1,j} = -n-1+j$ et dont tous les autres coefficients sont nuls. On a donc :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de K_1. Cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

2. Écrire une fonction `K` en `Python` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la matrice K_n.

3. Utiliser la fonction précédente et la fonction `eigvals` du module `numpy.linalg` pour déterminer les valeurs propres de K_n pour $n \in [\![1,10]\!]$. Que peut-on conjecturer?

4. On se propose de montrer la conjecture faite dans la question précédente. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ et V_n le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $\mathscr{B}_n = (f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ définies par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^{n-k}(x)\sin^k(x).$$
On considère l'application φ_n définie par : $\forall f \in V_n,\ \varphi_n(f) = f'$.
   a. Soient $(\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que :
   $$\lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1\tan(x) + \cdots + \lambda_n \tan(x)^n = 0.$$
   b. En déduire que la famille $\mathscr{B}_n$ est une base de V_n et la dimension de V_n.
   c. Monter que φ_n est un endomorphisme de V_n et déterminer sa matrice dans la base $\mathscr{B}_n$.
   d. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on note g_k la fonction définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \exp(i(n-2k)x)$$
   Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, g_k(x) = (\cos(x)+i\sin(x))^{n-k}(\cos(x)-i\sin(x))^k$.
   e. En déduire que pour tout $k \in [\![0,n]\!], g_k$ appartient à V_n.
   Indication: On pourra utiliser sans le justifier que $\left(\sum_{j=0}^{n-k} a_j\right)\left(\sum_{l=0}^{k} b_l\right) = \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k} a_j b_l$.
   f. En déduire les valeurs propres de φ_n puis celle de K_n.
   g. La matrice K_n est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
   h. Déterminer pour quelle valeur de n, la matrice K_n est inversible.
   i. Lorsque K_n n'est pas inversible, déterminer une base du noyau.

Corrigé

Planche 6
Agro-Véto 2023

Question de cours.
Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice (avec préparation).

1. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$.

   On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de numéros distincts obtenus.

2. Déterminer la loi de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$. Que vaut l'espérance de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$?

3. a. Écrire une fonction Python d'argument n qui simule l'expérience et renvoie la liste des numéros tirés.

   b. Écrire une fonction Python d'argument n qui simule la variable X. *On pourra obtenir l'ensemble des valeurs d'une liste L avec la commande* ***set***(L) *et obtenir le cardinal d'un ensemble s avec la commande* ***len(s)****.*

   c. Écrire une fonction Python d'argument n qui calcule une valeur approchée de l'espérance de X.

4. Calculer :

   a. $\mathbb{P}(X = 1)$

   b. $\mathbb{P}(X = n)$

   c. $\mathbb{P}(X = 2)$

   d. $\mathbb{P}(X = n - 1)$

5. Pour i entre 1 et n, on note A_i l'événement "le numéro i fait partie des numéros obtenus au cours des n tirages" et on note X_i la variable indicatrice de l'événement A_i (X_i prend la valeur 1 si A_i est réalisé et 0 sinon).

   a. Calculer la loi de X_i et son espérance.

   b. Calculer l'espérance de X ainsi qu'un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. a. Pour i et j distincts entre 1 et n, calculer la loi de la variable X_iX_j.

   b. Calculer la variance de X.

Corrigé

Planche 7
Agro-Véto 2023

Question de cours.
Lien(s) entre l'indépendance de deux variables discrètes et leur covariance.

Exercice (avec préparation).

1. On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   a. Montrer que le spectre de l'endomorphisme φ est : $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1, 3\}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
   b. On note $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1)$ et $a_3 = (1, -1, 0)$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$.
   c. Déterminer une matrice carrée P telle que $A = PMP^{-1}$ et expliciter P^{-1} à l'aide de la fonction `inv` de Python.
   La commande `inv` du module `linalg` de la bibliothèque `numpy` permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée de type `matrix`.

2. Soient f, g et h trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f'(t) & = 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) & = f(t) + 2g(t) + h(t) \\ h'(t) & = 3h(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad f(0) = g(0) = h(0) = 1.$$
   a. Déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis tracer à l'aide de Python l'allure de la courbe représentative de h sur l'intervalle $[0, 1]$.
   b. On note $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$.
   On note $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$.
   Vérifier qu'on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.
   c. En déduire l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   d. Déterminer alors l'expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de t.

Corrigé

Planche 8
Agro-Véto 2023

Question de cours.
Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a.

Exercice (avec préparation).
On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant respectivement les densités f et g, alors la variable aléatoire $X+Y$ admet une densité $f*g$ définie par :

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
Soient λ,μ deux réels strictement positifs.
   a. Déterminer les lois des variables aléatoires $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U)$ et $-\dfrac{1}{\mu}\ln(V)$.
   b. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ.
   Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument les valeurs de λ et μ et qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire $\min(X,Y)$.
   c. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(X,Y)$ et vérifier qu'il s'agit d'une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   d. Déterminer la loi de $-Y$.
   e. Montrer qu'une densité de $X-Y$ est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$h : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda x} & \text{si } x>0,\\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\mu x} & \text{si } x\leqslant 0.\end{cases}$$
   f. Calculer alors la probabilité de l'événement $[X\leqslant Y]$.

2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :
   - X_1,X_3,X_5 et plus généralement X_{2n+1} pour $n\in\mathbb{N}$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1;
   - X_2,X_4,X_6 et plus généralement X_{2n} pour $n\in\mathbb{N}^*$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 2.

   Si $i\geqslant 2$, on dit que l'événement "X_i est un creux" est réalisé si $[X_i\leqslant X_{i-1}]$ et $[X_i\leqslant X_{i+1}]$ sont réalisés tous les deux.
   a. À l'aide de Python, estimer la probabilité des événements "X_2 est un creux" et "X_3 est un creux".
   b. Calculer la probabilité des deux événements précédents.

3. a. Que vaut la probabilité de l'événement "X_2 et X_3 sont des creux"?
   b. Les événements "X_4 est un creux" et "X_8 est un creux" sont-ils indépendants?
   c. Déterminer la loi du nombre de creux parmi les 10 variables aléatoires $X_4,X_8,X_{12},\dots,X_{40}$.

Corrigé

Planche 9
Agro-Véto 2023

Question de cours.
Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Exercice (avec préparation).
On dispose initialement d'une urne U_0 contenant 1 boule blanche et 2 boules rouges.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remplit ensuite l'urne U_{n+1} avec 3 boules de la facon suivante. On effectue 3 tirages avec remise dans l'urne U_n, et pour chaque boule rouge (respectivement blanche) tirée, on place une nouvelle boule rouge (respectivement blanche) dans l'urne U_{n+1}.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne U_n. En particulier $Y_0 = 1$.

1. Identifier la loi de la variable aléatoire Y_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \{0;1;2;3\}$. Déterminer la loi de Y_{n+1} sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Y_n=k]}$, c'est-à-dire calculer $\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1}=j)$, pour tout $j \in \{0;1;2;3\}$.
3. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et simulant les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$. La fonction renverra le résultat sous la forme d'une liste $[Y_0, Y_1, \ldots, Y_n]$
4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que tout $k \in \{0;1;2;3\}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{3} j\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1}=j) = k$.
   b. En déduire que $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{E}[Y_n]$.
   c. En déduire l'expression de $\mathbb{E}[Y_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \mathbb{P}(Y_n = 0)$, $b_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$ $c_n = \mathbb{P}(Y_n = 2)$ et $d_n = \mathbb{P}(Y_n = 3)$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} + c_{n+1} = \dfrac{2}{3}(b_n + c_n)$.
6. En déduire la convergence et la limite des suites (b_n) et (c_n).
7. Montrer que la suite (a_n) et la suite (d_n) sont croissantes. Montrer qu'elles convergent.
8. À l'aide de la question 4 , montrer que (d_n) converge vers $\dfrac{1}{3}$. Quelle est la limite de la suite (a_n) ? Interpréter le résultat.
9. On note T le numéro de la première urne ne contenant que des boules rouges ou que des boules blanches.
   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(T > n)$.
   b. En déduire la loi de T et son espérance.

Corrigé

Planche 10
Agro-Véto 2023
(sujet 0)

Question de cours.
Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et ne s'annulant pas, que veut dire la phrase "f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$" ?

Exercice (avec préparation).

1. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x\ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = xf(x).$$

   a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $g'(x)$ pour tout réel x.
   c. La fonction g est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et la fonction f définie à la question 1 :

$$F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f).$$

   Prouver que (f_0, f_1, f) est une base de F.

3. Pour toute fonction φ de F, on note $\Phi(\varphi)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x\varphi(x)$.
   a. Montrer que l'application $\Phi : \varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est linéaire.
   b. Vérifier que $\Phi(f_0) = f_0$, $\Phi(f_1) = 2f_1$ et calculer $\Phi(f)$.
   c. En déduire que Φ est un endomorphisme de F et préciser sa matrice dans la base (f_0, f_1, f).
   d. L'endomorphisme Φ est-il bijectif de F vers F ? Si oui, préciser la matrice de Φ^{-1} dans la base (f_0, f_1, f).
   e. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Corrigé

Planche 11
Agro-Véto 2023
(sujet 0)

Question de cours.
Énoncer le théorème central limite.

Exercice (avec préparation).
On considère les matrices carrées à coefficients réels de la forme :

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

Notons f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est $M(a)$.

1. Déterminer le rang de la matrice $M(a)$ selon les valeurs de a.

2. Justifier que 0 et 1 sont des valeurs propres de f_a.

3. Déterminer une base du noyau de f_a selon les valeurs de a.

4. Montrer que $e_1 + e_3$ est un vecteur propre de f_a. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_a selon les valeurs de a. f_a est-il diagonalisable?

5. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

   a. On s'intéresse à l'ensemble F des matrices qui commutent avec A :
   $$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   b. On considère l'application définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels :
   $$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ Q & \mapsto & (Q(\lambda_1), Q(\lambda_2), Q(\lambda_3)) \end{array}$$
   Montrer que g est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

   c. Après avoir justifié qu'il existe une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, montrer que $M \in F \Leftrightarrow CD = DC$ où $C = P^{-1}MP$.

   d. Déterminer les matrices qui commutent avec D. En déduire que $M \in F$ si et seulement s'il existe c_1, c_2, c_3 des réels tels que :
   $$M = P \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   e. A l'aide de la question 5.b, conclure que les matrices qui commutent avec A sont exactement les matrices M de la forme $Q(A)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.

   f. Dans le cas particulier où $A = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, établir qu'une base de F est $\left(I_3, A, A^2\right)$.

Corrigé

Planche 12
Agro-Véto 2023
(sujet 0)

Question de cours.
Allure de la représentation de la fonction cos sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Exercice (avec préparation).
Tous les vecteurs et toutes les matrices de cet exercice sont à coefficients réels

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre $n \geq 1$ dont les éléments diagonaux sont $(d_1, \cdots, d_n)$.

   a. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne. Vérifier que $X^T D X = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2$.

   b. En déduire que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs si et seulement si $X^T D X > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère les vecteurs

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   a. Montrer que U_1 est un vecteur propre de A.

   b. Montrer que l'ensemble des vecteurs X tels que $AX = X$ est un sous-espace propre de A et que ce sous-espace propre admet pour base orthonormée (U_2, U_3).

   c. Déterminer une matrice P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^2P^{-1}$ et $P^T P = I_3$.

   d. En déduire qu'il existe une matrice inversible M telle que $A = MM^T$.

   e. Vérifier que $C = M^{-1}B(M^{-1})^T$ est une matrice symétrique. En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ et une matrice orthogonale Q telles que $B = MQ\Delta(MQ)^T$.
   On pose $R = MQ$. On a ainsi $B = R\Delta R^T$.

   f. Calculer RR^T.

3. On conserve les hypothèses et les notations de la question 2. On suppose de plus que $X^T AX > X^T BX$ pour tout vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   a. Donner une matrice diagonale S dépendant de la matrice Δ telle que $Y^T SY > 0$ pour tout vecteur non nul Y de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   b. En déduire que les coefficients diagonaux de Δ sont tous strictement inférieurs à 1.

Corrigé

Planche 13
Agro-Véto 2023
(sujet 0)

Question de cours.
Si $(A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $(B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ désignent deux matrices carrées d'ordre n, et $C = AB$, rappeler pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ l'expression de $C_{i,j}$ en fonction des coefficients de A et de B.

Exercice (avec préparation).
On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On tire successivement une boule dans l'urne puis :

- si on tire une boule blanche, on remet la boule blanche dans l'urne ainsi qu'une autre boule blanche
- si on tire une boule noire, on remet la boule noire dans l'urne et le jeu s'arrête.

On suppose que les boules sont indiscernables au toucher. On note N le nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.
On considère aussi une famille de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, toutes indépendantes de N, et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$.
Par exemple, si $N = 2$*, alors* $T = \max(X_1, X_2)$ *; si* $N = 4$*, alors* $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$.

1. a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\mathbb{P}(N = k) = \dfrac{1}{k(k-1)}$.
   b. La variable N admet-elle une espérance ?
2. a. Si U suit la loi uniforme sur $[0,1[$, montrer que $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.
   b. Écrire une fonction Python `T` prenant en argument un réel strictement positif ℓ et qui simule la variable T avec ℓ pour valeur de λ.
   c. Estimer à l'aide de Python l'espérance de T pour $\lambda = 1$.
3. Soit $x \in [0,1[$.
   a. Montrer que, pour tout $t \in [0,x]$, $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k + \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$.
   b. En déduire que $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{x^k}{k} + \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$.
   c. Par encadrement, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \dfrac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$ puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.
   d. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \dfrac{x^k}{k(k-1)}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k(k-1)} = \varphi(x)$ où φ est la fonction définie sur $[0,1[$ par $\varphi(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.
4. Soient $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\mathbb{P}_{[N=k]}(T \leqslant x)$ puis en déduire que $\mathbb{P}(T \leqslant x) = \varphi(F(x))$ où F est la fonction de répartition de X_1.
5. On admet que T est une variable à densité. Montrer qu'une densité de T est donnée par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$
6. Justifier que T admet une espérance puis calculer $\mathbb{E}(T)$. Est-ce cohérent avec la conjecture effectuée à la question 2.c ?

Corrigé

Planche 14
Agro-Véto 2023
(sujet 0)

Question de cours.
Définition de la distance d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

Exercice (avec préparation).
Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1], f(x) = \dfrac{1}{3}\left(-e^{-x} + \ln\left(1+x^2\right)\right)$.

1. a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, et déterminer f' et f''. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $A = (a, f(a))$ où $a \in [0,1]$.
   b. Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ f'(x) \geqslant \dfrac{e^{-1}}{3}$ et $|f''(x)| \leqslant 1$.
   c. Montrer qu'il existe un unique réel ℓ de $]0,1[$ tel que $f(\ell) = 0$.
2. Soit $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \neq b$. On pose φ la fonction définie sur $[0,1]$ par :
$$\forall x \in [0,1], \varphi(x) = f(a) - f(x) - (a-x)f'(x) - \frac{1}{2}(a-x)^2\gamma,$$
   où γ est un réel tel que $\varphi(b) = 0$.
   a. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et donner φ'.
   b. Justifier l'existence d'un réel c compris strictement entre a et b tel que $\varphi'(c) = 0$.
   c. En déduire qu'il existe un réel c compris strictement entre a et b tel que :
$$f(b) = f(a) - (a-b)f'(b) - \frac{1}{2}(a-b)^2 f''(c).$$
3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de réels définie par $u_0 \in]\,0,1\,[$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$
   On admet que si $u_0 \neq \ell$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq \ell$, où ℓ est le réel défini en question 1.c.
   a. Écrire une fonction suite en Python, prenant en entrée a et un entier n et renvoyant la liste des valeurs de $(u_0, u_1, \cdots, u_n)$ quand $u_0 = a$. Compiler ce programme pour les valeurs suivantes de a : $0.3, 0.5$ et 0.8 et pour $n = 12$. Que pouvez-vous conjecturer ?
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un réel z_n compris entre ℓ et u_n tel que :
$$u_{n+1} - \ell = \frac{(u_n-\ell)^2}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(u_n)}.$$
   c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \left(\dfrac{3e}{2}\right)^{2^n-1} |u_0 - \ell|^{2^n}$.
   d. Dans cette dernière question, on suppose que $|u_0 - \ell| \leqslant \dfrac{2}{10}$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
   Donner une valeur de n à partir de laquelle u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près, puis à 10^{-5} près.

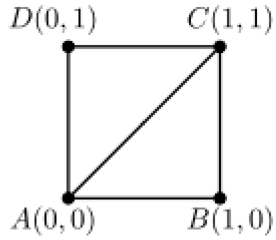
Corrigé

Planche 15
Agro-Véto 2023
(sujet 0)

Question de cours.
Pour une application $f : E \longrightarrow F$ bijective de E vers F, définition de la fonction réciproque f^{-1}.

Exercice (avec préparation).

On considère une particule se déplaçant aléatoirement sur les arêtes de la figure ci-contre délimitée par les points $A(0,0), B(1,0), C(1,1)$ et $D(0,1)$. À l'instant $n = 0$, elle se situe en A et à chaque étape, elle se déplace aléatoirement et de manière équiprobable vers l'un des sommets qu'elle peut atteindre en une étape.
Par exemple, du point A, la particule peut aller en B, C ou D mais du point D, elle ne peut aller qu'en A ou C (et pas en B).



Pour tout entier naturel n, on note respectivement A_n, B_n, C_n et D_n les événements : "À l'instant n, la particule se situe en A (resp. en B, en C, en D)". On note enfin pour tout entier naturel n : $a_n = \mathbb{P}(A_n), b_n = \mathbb{P}(B_n)$, $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ et $d_n = \mathbb{P}(D_n)$.

1. Écrire une fonction Python `positionA(n)` permettant de simuler cette expérience et qui renvoie la fréquence de passage de la particule au point A jusqu'à l'étape n. Estimer ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et d_n.
3. Étude des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   a. En remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = b_n$, démontrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et déterminer b_n en fonction n.
   b. En déduire l'expression de $a_{n+1} + c_{n+1}$ en fonction de n.
   c. Montrer que la suite $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire son expression en fonction de n.
   d. En déduire les expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n.
4. Soient maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n et Y_n des variables aléatoires réelles correspondant respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de la particule à l'instant n.
   a. Déterminer les lois de ces variables aléatoires.
   b. X_n et Y_n sont-elles indépendantes?
   c. Déterminer $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)$.
5. Pour tout entier naturel n, on note maintenant $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.
   a. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.
   b. On admet que $M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M = 0$. En déduire que chaque valeur propre λ de M vérifie $\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0$.
   c. Justifier que M est diagonalisable puis la diagonaliser.
   d. Proposer alors une démarche (sans détailler les calculs) pour retrouver le résultat de la question 3.

Corrigé

Planche 16
Agro-Veto 2022

Question de cours.
Existence et unicité du projeté orthogonal.

Exercice.
Un magasin possède une caisse, toutes les personnes qui sortent du magasin doivent passer par cette caisse y compris si le client n'achète pas d'article. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire réelle égale au nombre d'articles achetés par le k-ème client. On suppose que ces variables sont mutuellement indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètre μ. On note N le nombre aléatoire de clients qui passent par la caisse au cours de la première heure, N suit une loi de Poisson de paramètre λ et est indépendante des X_k. On souhaite étudier le nombre X d'articles passant par cette caisse durant la première heure.

1. Exprimer X en fonction de N et des X_i.
2. Écrire une fonction Python `X` qui prend en entrée `l` pour λ et `m` pour μ et qui simule la variable aléatoire X.

   On pourra pour cela utiliser la fonction `poisson` du module `numpy.random`.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}_{[N=0]}(X = n)$.
4. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $X_1 + \cdots + X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $k\mu$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k!n!} e^{-(\lambda+k\mu)}$.
6. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \lambda\mu$. On admettra l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et on pourra procéder sans justification à une permutation de deux sommes infinies.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{\lambda(e^{-\mu}-1)} \text{ et } \mathbb{P}(X = n) = \frac{\mu^n e^{-\lambda}}{n!} f_n(\lambda e^{-\mu})$$

   où $f_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^n \frac{x^k}{k!}$. On pose aussi $f_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
8. Exprimer f_0 et f_1 à l'aide de fonctions usuelles.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{n+1}(x) = x + \sum_{i=0}^{n} x \binom{n}{i} f_i(x).$$

   Indication : On pourra utiliser le changement de variables $\ell = k - 1$.
10. En déduire une expression de la fonction f_2.
11. Écrire une fonction `f` qui prend en entrée un entier `n` et un réel `x` et qui renvoie la valeur $f_n(x)$. On pourra utiliser la fonction `binom` du module `scipy.special`.
12. Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction Python qui prend en entrée deux réels λ et μ et un entier n et qui renvoie $\mathbb{P}(X = n)$. On pourra utiliser la fonction `factorial` du module `scipy.special`.

Corrigé

Planche 17
Agro-Veto 2022

Question de cours.
Définition de la liberté d'une famille de vecteurs.

Exercice.
Rappel : Algorithme de dichotomie.
Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un réel α. On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ *et* $b_0 = b$
- *Pour tout entier naturel k, on note* $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ *et :*
  - *si* $f(a_k)f(c_k) < 0$ *alors* $a_{k+1} = a_k$ *et* $b_{k+1} = c_k$
  - *sinon* $a_{k+1} = c_k$ *et* $b_{k+1} = b_k$.

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ convergent toutes deux vers α.
On étudie dans cet exercice, pour tout entier naturel n non nul, les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation

$$(E_n) \quad : \quad \ln x + x = n.$$

À cet effet, on introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par l'expression

$$f(x) = \ln x + x.$$

1. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation (E_n) admet une unique solution, notée x_n.
   b. En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes x_n pour n allant de 1 à 10, et les représenter graphiquement.
   c. Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on pourra comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$).
2. a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x < x$.
   b. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$.
   c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
3. a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 0$. En déduire un équivalent de x_n.
   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n$.
4. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln n}$.
   a. Exprimer $u_n - 1$ en fonction de x_n et n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   b. En déduire que $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
   c. En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln n + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

Corrigé

Planche 18
Agro-Veto 2022

Question de cours.
Matrice d'une composée d'applications linéaires.

Exercice.
On considère une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec probabilité $q = 1-p$.
Soit n un entier non nul fixé.
On considère n joueurs qui lancent chacun la pièce jusqu'à obtenir Pile. Le(s) gagnant(s) sont désignés comme ceux qui ont fait le moins de lancers.
Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose X_i le nombre de lancers du i-ième joueur, et on note N le nombre de gagnants.

1. Quelle est la loi de X_i, pour $i \in [\![1,n]\!]$?

   Rappeler son espérance et sa variance.

2. Calculer pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_i > j)$.

3. On note $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

   Calculer $\mathbb{P}(Y > j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de Y, son espérance et sa variance.

4. Écrire une fonction Python `NbMin(L)` prenant en argument une liste `L` et renvoyant le nombre de fois où la valeur minimale apparaît dans la liste `L`.

5. En déduire une fonction Python `N(n,p)` qui, prenant en argument la valeur de n et p, simule l'expérience aléatoire décrite et renvoie la valeur de N.

6. Calculer $\mathbb{P}(N = n)$.

7. Montrer que :
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1-q^n}.$$

8. En déduire l'espérance de N et la variance de N.

9. Vérifier la valeur de $\mathbb{E}(N)$ à l'aide d'estimations construites grâce à la fonction `N` de la question 5.

Corrigé

Planche 19
Agro-Veto 2022

Question de cours.
À quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

Exercice.
On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel que l'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

1. a. Montrer que A est diagonalisable.
   b. Que permet le programme suivant ?

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A= np.array ([[5/2 ,1 ,1/2] ,[1 ,2 ,1] ,[1/2 ,1 ,5/2]])
I= np.eye (3)
r= al.matrix_rank (A - I)
s= al.matrix_rank (A - 2* I)
t= al.matrix_rank (A - 4* I)
```

   c. À l'aide de Python, déterminer une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.
   d. Pourquoi cette base est-elle orthogonale ?
   e. Proposer une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f. On notera $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ cette base.

2. On considère l'application ϕ définie sur E^2 par :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \phi(u, v) = \langle u, f(v) \rangle.$$

   a. Soit u (resp. v) un vecteur de E de coordonnées X (resp. Y) dans $\mathcal{B}$.
      (i) Exprimer $\phi(u, v)$ en fonction de A, X et Y.
      (ii) Exprimer $\phi(v, u)$ en fonction de A, X et Y.
      (iii) Montrer que $\phi(u, v) = \phi(v, u)$.
   b. On note pour tout $u \in E$, F_u l'ensemble des vecteurs orthogonaux à u et :

$$F'_u = \{v \in E \mid \phi(u, v) = 0\}.$$

      (i) Montrer que si u est un vecteur propre de f, alors $F_u = F'_u$.
      (ii) A-t-on toujours $F_u = F'_u$?

Corrigé

Planche 20
Agro-Veto 2022

Question de cours.
Pour n et k entiers naturels, donner l'expression du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Exercice.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur cet espace suivant la loi normale centrée réduite. On note φ la fonction densité continue de X, Φ sa fonction de répartition, f la fonction $x \mapsto \mathbb{P}(X > x)$ et (E) l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + xy(x) = 0.$$

On considère la fonction M définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, M(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E). Montrer que φ est solution de (E).
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}$. Déterminer la limite de M en $+\infty$.
4. a. Montrer que f est dérivable et exprimer sa fonction dérivée f' en fonction de φ.
   b. Montrer que M est dérivable. Calculer sa dérivée M' à l'aide des fonctions f et φ. En déduire le sens de variation de M sur $\mathbb{R}^+$.
5. a. Écrire un script Python permettant d'afficher sur un même graphique les courbes des fonctions $x \mapsto M(x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}$ sur l'intervalle $[1, 5]$.
   Pour calculer $f(x)$, on pourra utiliser la fonction `norm.sf()` du module `scipy.stats`.
   b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que:
   $$\forall x > 0, f(x) = \frac{\varphi(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$
   c. Montrer que pour $x > 0$, on a :
   $$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \leqslant M(x) \leqslant \frac{1}{x}$$
   Indication : on pourra intégrer une deuxième fois par parties.
   En déduire un équivalent de $M(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Corrigé

Planche 21
Agro-Veto 2022

Question de cours.
Stabilité des lois de Poisson par la somme.

Exercice.
Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left[(1-x)e^x\right]^n \mathrm{d}x$.

1. Justifier que la suite (I_n) est ainsi bien définie, et calculer I_0 et I_1.
2. a. Justifier que pour tout entier naturel n,
$$I_n = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\left(1-\frac{k}{N}\right)e^{k/N}\right]^n.$$
   b. Écrire alors une fonction en Python qui prend en argument un entier n et renvoie une valeur approchée de I_n.
   c. Utiliser la fonction précédente pour établir une conjecture sur la limite éventuelle de $\sqrt{n}I_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. a. Démontrer que pour tout réel x, $e^{-x} \geqslant 1-x$.
   b. Étudier les variations de la suite (I_n).
4. Pour tout réel $x \in]0,1[$, on pose $H(x) = -\dfrac{2}{x^2}(x+\ln(1-x))$.
   a. Démontrer que la fonction H est prolongeable par continuité en 0.
   On notera encore H son prolongement, et on admet que H réalise une bijection croissante de $[0,1[$ vers $[1,+\infty[$.
   b. Démontrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^1 \exp\left(-n\frac{x^2}{2}H(x)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}H\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)\mathrm{d}u.$$
   c. Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u$, et en déduire que pour tout entier naturel non nul n, $I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels appartenant à $[0,1[$ qui converge vers 0, et telle que la suite $(\sqrt{n}u_n)$ diverge vers $+\infty$.
   a. Donner un exemple d'une telle suite.
   b. On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = H(u_n)$. Démontrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant \int_0^{u_n}\exp\left(-\frac{nx^2}{2}H(u_n)\right)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{nv_n}}\int_0^{\sqrt{nv_n}u_n} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$
   c. D'après les questions 4.c et 5.b, on a :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{\frac{2}{\pi v_n}}\int_0^{\sqrt{nv_n}u_n} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \leqslant \sqrt{\frac{2n}{\pi}}I_n \leqslant 1.$$
   Remarquons que $v_n = H(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} H(0) = 1$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{nv_n}u_n = +\infty$. On en déduit que :
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2n}{\pi}}I_n = 1,$$
   c'est-à-dire : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Corrigé

Planche 22
Agro-Veto 2022

Question de cours.
Donner deux expressions de la dérivée de la fonction tangente.

Exercice.
Soient a_1, a_2 et a_3 trois réels distincts. Soit A la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on pose :

$$s_i = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{3} a_j,\ \ p_i = \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{3} a_j \text{ et } d_i = \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{3} (a_i - a_j).$$

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3 et renvoie la matrice A, sous forme de liste de listes.

2. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier i et une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3, et renvoie une liste contenant les valeurs de s_i, p_i et d_i.

3. Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \ \varphi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3)).$$

   a. Démontrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
   b. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique $\mathbb{R}_2[X]$, et $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice représentative de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
   c. Déterminer le noyau de φ et en déduire que φ admet une réciproque, notée φ^{-1}.

4. Pour tout entier $i \in [\![1,3]\!]$, on pose : $L_i(X) = \dfrac{1}{d_i} \displaystyle\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{3} (X - a_j)$.

   a. Démontrer que : $\forall i \in [\![1,3]\!],\ \ L_i = \varphi^{-1}(e_i)$.
   b. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la matrice A est inversible, et déterminer A^{-1}. (On exprimera les coefficients de A^{-1} en fonction des réels s_i, p_i et d_i.)
   c. Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3 et renvoie la matrice A^{-1}, sous forme de liste de listes. Appliquer cette fonction avec $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $a_3 = 4$.

Corrigé

Planche 23
Agro-Veto 2022

Question de cours.
Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $T = \max(X, Y)$ et $W = \dfrac{1}{T}$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de la variable aléatoire W.

1. Justifier que la fonction Python écrite ci-dessous permet de renvoyer un nombre de façon aléatoire en suivant la loi exponentielle de paramètre 1 :

```
import numpy as np

def expo() :
    return −np.log(random())
```

2. Écrire un script en langage Python qui permette de conjecturer l'existence et la valeur de l'espérance de W.
3. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T. Démontrer alors que T admet une densité, et déterminer une de ses densités.
4. Démontrer que la variable aléatoire W admet une espérance si et seulement si l'intégrale
$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$$
converge.
5. a. Justifier que pour tout réel u, $e^u \geqslant 1 + u$.
   b. En déduire que : $\forall t > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \leqslant e^{-t}$.
   c. Démontrer que l'intégrale I est convergente.
6. À l'aide du changement de variables, $u = 2t$, démontrer que :
$$\forall x > 0,\ \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$
On admettra que les deux intégrales de l'égalité sont bien convergentes.
7. Démontrer alors que $I = \lim\limits_{x\to 0} 2\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
8. En utilisant le théorème des gendarmes, démontrer que l'espérance de W vaut $2\ln(2)$.

Corrigé

Planche 24
Agro-Veto 2022

Question de cours.
Formule de Bayes.

Exercice.
Soit N un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant N boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N.
On procède à des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule dans l'urne avant le tirage suivant.
On note pour tout $k \geqslant 1$, X_k le numéro obtenu au k-ème tirage, et Z_k le nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

1. a. Écrire une fonction Python `NbDiff(L)` prenant en argument une liste `L` et qui renvoie le nombre d'éléments distincts présents dans cette liste.
   b. Écrire une fonction Python `Z(N,k)` qui, prenant en arguments les valeurs de N et k, renvoie une simulation de Z_k.
   c. Estimer l'espérance de Z_k à l'aide de votre programme, et conjecturer son comportement lorsque :
      (i) $N = 10$ et $k \to +\infty$
      (ii) $k = 10$ et $N \to +\infty$
      (iii) $N = k$ et $N \to +\infty$
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1 et la loi de la variable aléatoire Z_2.
   En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.
3. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
   a. Déterminer $\mathbb{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathbb{P}(Z_k = k)$.
   b. Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, N]\!]$: $\mathbb{P}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{N}\mathbb{P}(Z_k = \ell) + \frac{N-\ell+1}{N}\mathbb{P}(Z_k = \ell - 1)$.
   c. En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}(Z_k) + 1$.
4. Montrer alors que :
$$\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{E}(Z_k) = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^k\right).$$
5. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Z_k)$ dans les trois cas suivants, en comparant avec vos résultats numériques de la question 1.c.
   a. lorsque N est fixé et $k \to +\infty$
   b. lorsque k est fixé et $N \to +\infty$
   c. lorsque $N = k$ et $N \to +\infty$

Corrigé

Planche 25
Agro-Véto 2021

Question de cours.

Espérance et variance d'une variable aléatoire de la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

Exercice.

Pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.
Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_a(x) = \langle x, a\rangle$$

1. Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f_a est une application linéaire.
2. Etude d'un exemple. On pose dans cette question (uniquement) : $a = (1, 2, \ldots, n)$.
   Expliciter f_a et donner une base de son noyau.
   Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}(f_a)$?
3. Pour a et b dans $\mathbb{R}^n$, montrer que : $f_a = f_b \Longleftrightarrow a = b$.
4. Lorsque $a \neq 0$, quel est le rang de f_a? En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(f_a)$ lorsque $a \neq 0$.
5. On note $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Écrire la matrice de f_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et retrouver les résultats des questions 3 et 4.
6. Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   Montrer : $x = y \Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}^n, f_a(x) = f_a(y)$
7. Soient a et x deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   Écrire un programme Python qui calcule $f_a(x)$ et qui teste si un vecteur x est dans le noyau de f_a.
8. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
   Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = f_a$ et que ce a est donné par $a = \sum_{k=1}^{n} g(e_k)\, e_k$.
9. On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On admet que cet ensemble, muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un réel, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (a) Montrer que $\phi : a \mapsto f_a$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
   (b) En déduire que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est de dimension finie, préciser sa dimension et donner une base.

Corrigé

Planche 26
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Stabilité des lois binomiales par la somme.

Exercice.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z).$$

On considère aussi l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose en outre $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = g(e_1) + e_1$.

1. a. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
   b. À l'aide de Python, déterminer les valeurs propres de g et conjecturer la dimension de chaque sous-espace propre de f. L'endomorphisme f semble-t-il diagonalisable ?
   On pourra se servir de la commande `np.linalg.eig(A)` après l'importation `import numpy as np`.

2. a. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b. Déterminer la matrice T de g dans $\mathcal{C}$.
   c. En déduire les valeurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

3. On note
$$E = \{M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \mid AM = MB\}.$$
   a. Écrire une fonction Python d'en-tête `E(M)` qui retourne `True` si `M` est dans E, et `False` sinon. *On rappelle que, si `N` est une matrice contenant des booléens, l'instruction `N.all()` renvoie `True` si `N` ne contient que des `True` et renvoie `False` sinon.*
   b. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   c. Montrer, par l'absurde, que si M est dans E alors elle n'est pas inversible.
   d. Montrer que $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}\left(B^T\right)$.
   e. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A associée à la valeur propre 2 et si $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de B^T associée à la valeur propre 2, alors $XY^T \in E$.
   f. En déduire que $\dim E \geqslant 2$.

Corrigé

Planche 27
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice.
On note n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\| \cdot \|$. Soient u et v deux vecteurs de norme 1. On note f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall w \in E,\ f(w) = \langle w, u \rangle v + \langle w, v \rangle u.$$

1. a. Écrire une fonction Python `ps` qui prend en argument deux vecteurs u et v sous forme de listes et renvoie la valeur du produit scalaire $\langle v, u \rangle$.
   b. Écrire une fonction Python `f` qui prend en argument trois vecteurs u, v et w sous forme de listes et renvoie le vecteur $f(w)$ sous forme de liste lui-aussi.
2. On suppose **uniquement dans cette question** que u et v sont colinéaires.
   a. Montrer que, pour tout $w \in E$, $f(w) = \pm 2 \langle w, u \rangle u$.
   b. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
   c. Montrer que u est un vecteur propre de f et déterminer sa valeur propre associée.
   d. En déduire que f est diagonalisable.
3. On suppose désormais que u et v sont non colinéaires.
   a. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u, v)$.
   b. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$.
4. On suppose **uniquement dans cette question** que u et v sont orthogonaux.
   a. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2})$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}\, f$. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2})$ est une base orthonormée de E.
   b. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}$.
   c. En déduire que f est diagonalisable.
5. On revient au cas général (où u et v sont non colinéaires, mais pas nécessairement orthogonaux).
   a. Soit $(w_1, \ldots, w_{n-2})$ une base de $\mathrm{Ker}\, f$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w_1, \ldots, w_{n-2})$ est une base de E.
   b. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
   c. En déduire que f est diagonalisable.

Corrigé

Planche 28
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Rappeler les deux expressions de la dérivée de la fonction tan.

Exercice.
On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On s'intéresse au rang du premier lancer auquel on obtient pour la première fois la succession des résultats “Pile, Pile, Face”, dans cet ordre. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient cette configuration. Si celle-ci n'est jamais obtenue, on conviendra que X vaut -1. Par exemple, si on obtient dans cet ordre : “Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face”, alors X prend la valeur 7. Pour tout entier naturel n non nul, on pose F_n : “on obtient Face au n-ème lancer” et P_n : “ on obtient Pile au n-ème lancer”. Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on pose :

- B_n l'événement défini par $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$
- U_n l'événement défini par $U_n = \bigcup\limits_{k=3}^{n} B_k$
- $u_n = \mathbb{P}(U_n)$

1. a. Écrire une fonction Python sans argument qui simule les lancers de dé jusqu'à l'apparition de la séquence “Pile, Pile, Face” et qui renvoie sous forme de liste les résultats de tous les lancers réalisés.
   b. Utiliser la fonction précédente pour émettre une conjecture quant à l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X.
2. a. Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$ et justifier que les événements $B_n,\ B_{n+1}$ et B_{n+2} sont deux-à-deux incompatibles.
   b. Calculer $u_3,\ u_4$ et u_5 et démontrer que : $\forall n \geqslant 3,\ u_{n+3} = u_{n+2} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}u_n$.
   c. Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = -1)$.
3. On admettra dans cette question le résultat suivant : pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, si la série de terme général $\mathbb{P}(Y > n)$ converge, alors Y admet une espérance et :
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y > n).$$
   Pour tout entier naturel n, on note $v_n = \mathbb{P}(X > n)$.
   a. Donner la valeur de $v_0,\ v_1,\ v_2$ et v_3.
   b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} - v_{n+3} = \dfrac{1}{8}v_n$.
   c. Montrer que X admet une espérance et déterminer cette espérance.

Corrigé

Planche 29
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

Exercice.
On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f et g, alors $X+Y$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité h est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On s'intéresse à une modélisation du temps de présence de nouvelles espèces qui apparaissent entre les instants 0 et $\theta > 0$ dans un milieu donné. À chaque nouvelle espèce (e), on associe deux variables aléatoires :

- l'instant X_e d'apparition qui est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, \theta]$.
- sa durée de vie Y_e dans le milieu qui est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1 et indépendante de la précédente.

1. On s'intéresse à une espèce (e).
   a. Que représente $X_e + Y_e$?
   b. Déterminer une densité de $X_e + Y_e$.
   c. Pour tout $t > 0$, on pose $p = \mathbb{P}(X_e + Y_e > \theta + t)$. Montrer que $p = \dfrac{1-e^{-\theta}}{\theta}e^{-t}$.
2. On suppose que les variables aléatoires associées aux différentes espèces sont mutuellement indépendantes et on note N le nombre aléatoire d'espèces qui apparaissent. On suppose que N est indépendante des variables aléatoires associées aux espèces et que N suit la loi de Poisson de paramètre μ. Pour tout $t > 0$n note Z_t le nombre d'espèces, parmi celles qui sont apparues, qui sont encore présentes dans le milieu à l'instant $\theta + t$.
   a. Écrire un programme Python `Esp2Zt(theta,mu,t)` qui calcule et renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(Z_t)$. On rappelle qu'après avoir importé le module `numpy.random`, l'instruction `rand()` (respectivement `poisson(a)` et `exponential(b)`) renvoie une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ respectivement de loi de Poisson de paramètre a et de loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{b}$.
   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de Z_t sachant $N = n$.
   c. En déduire que Z_t suit la loi de Poisson de paramètre μp. Vérifier la cohérence de ces résultats avec les valeurs obtenues avec le programme de la question 2.a pour $\theta = 6,\ \mu = 16,\ t = 4$ et $\theta = 6,\ \mu = 30, t = 7$.
3. On admet dans la suite que $W_t = N - Z_t$ suit la loi de Poisson de paramètre $\mu(1-p)$ puis que Z_t et W_t sont indépendantes.
   a. Montrer que $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{W_t+1}\right) = \dfrac{1-e^{-\mu(1-p)}}{\mu(1-p)}$ puis calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{Z_t}{W_t+1}\right)$ en fonction de μ et p.
   b. Montrer que, pour tout $a \in]0,1[$:
   $$\mathbb{P}(Z_t \geqslant aN) = \mathbb{P}\left(\frac{(1-a)Z_t + a}{W_t+1} \geqslant a\right)$$
   puis en déduire que $\mathbb{P}(Z_t \geqslant aN) \leqslant \dfrac{(1-a)\mu p + a}{a\mu(1-p)}$.
   c. On suppose que $\mu = \theta^2$. Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,2[$, $\displaystyle\lim_{\theta\to+\infty} \mathbb{P}\left(Z_{\ln\theta} \geqslant \frac{N}{\theta^\alpha}\right) = 0$.

Corrigé

Planche 30
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice.
Deux amis Anna et Benoît jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel X. Si cet entier X est impair, Anna donne X euros à Benoît, et on considère que Benoît a gagné. Si X est nul, on considère que la manche est nulle. Si X est pair non nul, Benoît donne X euros à Anna, et on considère que Anna a gagné. On pose G le gain algébrique de Anna. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre a ($a > 0$). On note enfin :

- A : "Anna gagne", $p = \mathbb{P}(A)$
- B : "Benoît gagne", $q = \mathbb{P}(B)$
- C : "la manche est nulle", $r = \mathbb{P}(C)$

1. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire G. *On rappelle que* `np.random.poisson(a)` *permet de simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre a.*
2. a. Déterminer r et exprimer p et q sous forme d'une somme.
   b. Exprimer $p + q$ et $p - q$ en fonction de a.
   c. En déduire les valeurs de p et q en fonction de a.
3. Compléter le programme de la question 1 afin qu'il permette de donner une estimation de la valeur de l'espérance du gain d'Anna d'une part, et de la probabilité pour Anna de gagner d'autre part.
4. D'après les simulations effectuées, d'après vous, à qui le jeu donne-t-il l'avantage ? *On pourra tester les valeurs de gain et la probabilité qu'Anna gagne pour $a = 2$.*
5. a. Exprimer G en fonction de X.
   b. Calculer l'espérance du gain G d'Anna.
6. On suppose désormais que X suit une loi géométrique de paramètre $\alpha \in]0, 1[$ (on conserve les notations précédentes).
   a. Déterminer p, q et r.
   b. Calculer $\mathbb{E}(G)$ après avoir justifié son existence.
   c. Comment interpréter le signe de G ?

Corrigé

Planche 31
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Donner deux conditions suffisantes et non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

Exercice.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

   a. Montrer que $Y = X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   b. En déduire que X admet une espérance et une variance et préciser leur valeur.
   c. Écrire un programme Python renvoyant une simulation de la variable aléatoire X.
   d. Montrer que, pour tout réel $s \in [0, 1]$, la variable aléatoire s^X admet une espérance et montrer que $\mathbb{E}\left(s^X\right) = \dfrac{1}{2 - s}$.

   On notera dans toute la suite f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $\forall s \in [0, 1],\ f(s) = \dfrac{1}{2 - s}$.

2. On considère une population qui évolue de génération en génération. On part de $Z_0 = 1$ individu et on note, pour tout $n \geqslant 1$, Z_n le nombre d'individus à la n-ème génération, supposant que les individus de la $(n-1)$-ème génération meurent après avoir donné naissance. À chaque génération $n \in \mathbb{N}$, on suppose que chaque individu i engendre une portée d'individus de la génération suivante, de taille $X_{n+1,i}$, suivant la même loi que X, et indépendamment du nombre de descendants des autres individus existants (ou ayant existé auparavant).

   a. Écrire une fonction Python qui, prenant un entier n en entrée, simule l'expérience, et renvoie la liste $[Z_0, Z_1, \ldots, Z_n]$ des nombres de descendants de la population jusqu'à la n-ème génération. Conjecturer le comportement de la population au cours d'un grand nombre de générations.
   b. On note, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité que la population soit éteinte à la génération n. Justifier que la suite (u_n) est convergente vers un réel qu'on notera ℓ.
   c. Préciser la valeur de u_1 et vérifier que $u_1 = f(u_0)$.
   d. Calculer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0)$. En déduire que $u_2 = f(u_1)$.
   e. Démontrer plus généralement que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   f. En déduire la valeur de ℓ.

Corrigé

Planche 32
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice.
Rappel : *la méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant, de proche en proche, l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point :*

en tout point a, $\varphi(a+h) \approx \varphi(a) + h\varphi'(a)$ *lorsque* h *est petit (positif ou négatif).*

Soit $I =]1, +\infty[$. On considère l'équation différentielle (E) :

$$\forall t \in I,\ -t^2 y'(t) + t y(t) = (y(t))^2\,,$$

d'inconnue une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de (E).

1. a. Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ est solution de (E) sur $]1, +\infty[$.
   b. L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un espace vectoriel ?
   c. Représenter en Python la fonction f sur $[2, 4]$.
2. On cherche une solution y de l'équation différentielle (E) vérifiant $y(e) = 3$. Sous réserve d'existence de y, utiliser la méthode d'Euler pour représenter en Python un tracé approximatif de la courbe représentative de y sur l'intervalle $[2, 4]$ en partant du point $(e, 3)$. *On pourra tracer successivement une solution sur [e, 4] puis une solution sur [2, e].* Comparer avec le graphe obtenu à la question 1.
3. Déterminer les solutions sur I de l'équation différentielle linéaire (E') :

$$\forall t \in I,\ t^2 z'(t) + t z(t) = 1,$$

   d'inconnue $z : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.
4. Soit y une solution de (E), qui ne s'annule pas sur tout l'intervalle I. Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{y(t)}$ est solution de (E'). En déduire l'expression de y.
5. a. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des fonctions $\mathcal{S}$ qui ne s'annulent pas sur I.
   b. A-t-on $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$?
   c. Existe-t-il une solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I.

Corrigé

Planche 33
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Énoncer la formule des probabilités totales.

Exercice.
On s'intéresse à une population de saumons et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n le nombre de saumons de l'année n. Selon un modèle d'évolution, on a l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = y_n e^{r\left(1-\frac{y_n}{p}\right)}$ où p représente la capacité limite du milieu et r est le taux de croissance intrinsèque de la population (p et r sont deux réels strictement positifs).

1. Montrer qu'en posant $b = \dfrac{r}{p}$, $\alpha = e^r$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ x_n = by_n$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}.$$
Quel est le comportement de (x_n) si $x_0 = 0$? *Par la suite, on suppose que* $x_0 > 0$.
2. Montrer rapidement que (x_n) ne prend que des valeurs strictement positives.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction $f_\alpha : x \mapsto \alpha x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer les solutions de l'équation $f_\alpha(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$, selon les valeurs de α.
5. a. Écrire une fonction en Python qui prend en arguments un réel x_0 et un réel α et qui représente les termes x_k pour k variant entre 0 et 200. On fera apparaitre les points (k, x_k) pour k pair en bleu et ceux pour k impair en rouge. On rajoutera donc l'option `color='blue'` ou `color='red'` pour choisir la couleur du graphe.
   b. Tester votre programme dans le cas où $x_0 = 0,5$. Quel semble être le comportement de la suite pour $\alpha = 4$? Observer le comportement chaotique lorsque $\alpha = 15$.
6. On suppose que $\alpha \in]e, e^2[$.
   a. On introduit la fonction $g_\alpha : x \mapsto f_\alpha(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$. Étudier le signe de g_α sur $\mathbb{R}_+$.
   b. Montrer qu'il existe un réel $M \in [0, 1[$ tel que pour tout $x \in [1, +\infty[,\ |f'_\alpha(x)| \leqslant M$.
   c. Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+$. On notera λ_α la solution sur $[0, 1[$ et μ_α celle de $]1, +\infty[$.
   d. On souhaite montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$. On procède par l'absurde en supposant que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} \in [0, \lambda_\alpha]$ puis que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente. En déduire une contradiction et conclure.
   e. On admet que $f_\alpha\left(\alpha e^{-1}\right) > 1$. Montrer que, pour tout $x \in [1, \mu_\alpha],\ f_\alpha(x) \in [1, \mu_\alpha]$.
   f. Soit n_0 un entier naturel tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
   Montrer que $x_{n_0+1} \in [1, \mu_\alpha]$, puis que pour $n \geqslant n_0 + 1,\ |x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leqslant M\,|x_n - \ln(\alpha)|$.
   g. En déduire que (x_n) converge et préciser sa limite.

Corrigé

Planche 34
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire de F dans G.

Exercice.
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables à densité, indépendantes, et de même fonction de répartition F, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on ordonne les valeurs $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_k(\omega)$ la k-ème plus petite valeur. On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(k) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$. En particulier, on a $Y_1(\omega) = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Dans cette question, on suppose que les variables $X_1, \dots, X_n$ suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   a. Calculer $\mathbb{P}(Y_1 > x)$ pour tout réel x positif et en déduire la fonction de répartition de Y_1. Reconnaître une loi usuelle dont on donnera l'espérance et la variance.
   b. Montrer que si U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1]$ alors $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   c. Écrire un programme qui, pour un $n \in \mathbb{N}$ et un $i \in [\![1, n]\!]$ donnés, permet de simuler la variable aléatoire Y_i lorsque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent indépendamment la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pourra pour cela utiliser l'instruction `B=sorted(A)` qui fournit un tableau `B` contenant les valeurs du tableau `A` rangés dans l'ordre croissant.
2. Exprimer la fonction de répartition de Y_n à l'aide de F.
3. Les variables aléatoires Y_1 et Y_n sont-elles indépendantes ?
4. On souhaite maintenant obtenir la fonction de répartition de Y_i, pour n'importe quel $i \in [\![1, n]\!]$. On fixe donc i dans $[\![1, n]\!]$ et x dans $\mathbb{R}$ et on cherche à calculer $\mathbb{P}(Y_i \leqslant x)$. C'est la probabilité qu'au moins i variables parmi $X_1, \dots, X_n$ soient inférieures ou égales à x.
   a. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Z_k la variable telle que $Z_k(\omega) = 1$ si $X_k(\omega) \leqslant x$ et $Z_k(\omega) = 0$ sinon. Reconnaître la loi de Z_k (on exprimera le(s) paramètre(s) à l'aide de $F(x)$).
   b. On note $S = \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$. Que représente S ? Reconnaître sa loi.
   c. Montrer que $\mathbb{P}(Y_i \leqslant x) = \mathbb{P}(S \geqslant i)$ et en déduire l'expression de $\mathbb{P}(Y_i \leqslant x)$ sous la forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Corrigé

Planche 35
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Énoncer le théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice.
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que la variable aléatoire $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$ suit la même loi que X.
4. Écrire un programme Python simulant une réalisation de la variable aléatoire X.
5. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ? Si oui, les calculer, et vérifier vos réponses à l'aide du programme de la question 4.
6. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On définit, pour tout entier n non nul, la variable aléatoire T_n par :
$$T_n = \frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{\sqrt{n}}.$$
   a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition de T_n.
   b. Calculer alors pour tout réel x, $G(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n \leqslant x)$.
   c. On admet que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T à densité. Montrer que T admet pour densité la fonction g définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
   d. À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$, montrer que T admet une espérance et la déterminer.

Corrigé

Planche 36
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a.

Exercice.
On rappelle que si V et W sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f_v et f_W, alors $V+W$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité h est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_W(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Trois clients, notés A, B et C arrivent simultanément aux deux caisses inoccupées d'un magasin. A et B occupent immédiatement (à l'instant $t=0$) les deux caisses, C attend la première caisse laissée libre par A ou B. On néglige le temps de changement de personne. On suppose que les durées de passage à une caisse par A, B ou C sont des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$ et notées respectivement X, Y et Z.

1. À l'aide de simulations informatiques en Python, estimer la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.
2. On désigne par la variable aléatoire U le temps attendu par C avant d'être pris en charge à une caisse. Montrer que U admet une densité, puis en donner une.
3. Déterminer l'espérance et la variance de U.
4. On note T le temps total passé aux caisses par C, en comptant son temps d'attente et sa durée de passage à la caisse.
   a. Exprimer simplement la variable T en fonction des variables précédentes.
   b. Déterminer la loi de T.
   c. Déterminer l'espérance de T.
5. On admet que la variable aléatoire $|X-Y|$ a la même densité que U. Déterminer alors la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.

Corrigé

Planche 37
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Donner la caractérisation de l'indépendance de variables aléatoires discrètes.

Exercice.
Soient a et b des réels strictement positifs. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{e^{ax-b}}{1+e^{ax-b}}$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

2. a. Soit U suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. On note $X = \dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right) + \dfrac{b}{a}$. Montrer que la variable aléatoire X admet pour fonction de répartition F.
   b. Écrire une fonction en Python permettant de simuler la variable aléatoire X.

3. a. Montrer l'existence et donner la valeur de :
$$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t.$$
   b. Montrer que X admet une espérance égale à $\dfrac{b}{a}$.

4. On considère le tableau suivant dans lequel les F_i sont des valeurs expérimentales censées être proches des $F(x_i)$.

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2	3
F_i	0,03	0,18	0,62	0,92	0,99

   a. Afficher le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ où $y_i = \ln\left(\dfrac{F_i}{1-F_i}\right)$. Que remarque-t-on ?
   b. Comment calculer a et b ?
   c. Donner les coefficients de la droite de régression $y = \alpha x + \beta$ par la méthode des moindres carrés.
   d. Le module `numpy` comporte deux fonctions `mean` et `var` permettant de renvoyer respectivement la moyenne et la variance d'une liste de nombres. Écrire en Python une fonction permettant de renvoyer les coefficients a et b.

Corrigé

Planche 38
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On note $C = AB$.
Donner une expression du coefficient $c_{i,j}$ situé à la i-ème ligne, j-ème colonne de C

Exercice.

1. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$. Montrer que f est une densité.

   Par la suite, on note X une variable aléatoire de densité X. On dit que X suit la loi logistique.

2. Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$ suit la même loi que X.

3. Écrire une fonction en Python permettant de simuler X.

4. À l'aide de cette fonction, faire une conjecture sur $\mathbb{E}(X)$ puis donner une approximation de la valeur de $\mathbb{V}(X)$.

5. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$.

6. On cherche ici à déterminer précisément la variance de X.

   a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ est convergente. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que la variance de X existe et vérifie :
   $$\mathbb{V}(X) = 4\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

   b. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x + I_n \text{ où } I_n = (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}.$$

   c. Montrer que l'intégrale I_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire l'égalité :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

   d. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. En déduire que la variance de X est égale à $\dfrac{\pi^2}{3}$.

Corrigé

Planche 39
Agro-Véto 2021

Question de cours.

Donner une équation paramétrique d'une droite de l'espace passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par un vecteur $u(a, b, c)$.

Exercice.

Une urne contient des boules noires et blanches, avec une proportion p de noires et $q = 1 - p$ de blanches, où $0 < p < 1$. On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne. On s'intéresse aux successions de tirages amenant une même couleur. On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les n premiers tirages ont amené la même couleur et le $(n+1)$-ème l'autre couleur. De même, la deuxième série commence au tirage suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de couleur. Soit X la variable aléatoire égale à la longueur de la première série, Y la variable aléatoire égale à la longueur de la deuxième série.

1. a. Écrire une fonction en Python prenant en argument p et permettant de simuler X.
   b. Utiliser la fonction ci-dessous pour estimer $\mathbb{P}(X = Y)$.

```python
import random as rd

def XY(p) :
    x=1
    y=1
    a = rd.random()
    if a<p :
        while rd.random() < p :
            x += 1
        while rd.random() > p :
            y += 1
    if a>p :
        while rd.random() > p :
            x += 1
        while rd.random() < p :
            y += 1
    return x,y
```

2. a. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
   b. Déterminer la loi de X ; vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et montrer que $\mathbb{E}(X) \geqslant 2$.
   c. Déterminer la loi de Y et son espérance.
3. a. Déterminer la probabilité de l'événement $[X = Y]$.
   b. Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $p = \dfrac{1}{2}$.
   c. Pour quelle valeur de p la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est-elle maximale ?
4. On effectue maintenant un nombre $n \geqslant 2$ de tirages comme précédemment, dans une urne comportant le même nombre de boules noires que de boules blanches. On appelle N_n le nombre de séries obtenues.
   a. Quelles valeurs peut prendre N_n ?
   b. Donner la loi de N_n et son espérance pour $n = 1,\ n = 2$ et $n = 3$.
   c. Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on note X_i la variable indicatrice de l'événement "la boule tirée au i-ème tirage et la boule tirée au $(i+1)$-ème tirage sont de couleurs différentes". Déterminer la loi de X_i. En déduire l'espérance de N_n.

Corrigé

Planche 40
Agro-Véto 2021

Question de cours.
Donner une expression de $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note H_n la matrice carrée d'ordre n telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le terme de la ligne i, colonne j de H_n est $\dfrac{1}{i+j-1}$. Par exemple, $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que H_n est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.
2. Écrire une fonction Python qui, pour un n donné, renvoie H_n et l'inverse du produit de ses valeurs propres. La tester pour $n = 3$.
3. Déterminer de manière exacte les valeurs propres de H_2.
4. Montrer que H_2 et H_3 sont inversibles.
5. On note Φ l'application qui, à tout n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, associe le polynôme $\Phi(a) = a_1 + a_2X + \dots + a_nX^{n-1}$. Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6. On pose $P = a_1 + a_2X + \dots + a_nX^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_kX^{k-1}$. Montrer que :
$$\int_0^1 (P(t))^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_ia_j}{i+j-1}.$$
Indication : $\left(\sum_{i=1} b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_ib_j$.
7. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_n. Pour x et y dans $\mathbb{R}^n$, on note $\langle x \mid y\rangle$ le produit scalaire de x et y.
   a. Montrer que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle f(e_i) \mid e_j\rangle = \dfrac{1}{i+j-1}$.
   b. Montrer que, si $x = (a_1, \dots, a_n)$, alors $\langle f(x) \mid x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \dfrac{a_ia_j}{i+j-1}$.
   c. En déduire que $\langle f(x) \mid x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ puis que les valeurs propres de H_n sont positives.

Corrigé

Planche 41
Agro-Veto 2019

Question de cours.
Donner le développement limité de la fonction sinus en 0 à l'ordre 5.

Exercice.
Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X_k = -1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Calculer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.

   b. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$.

   c. Écrire un programme Python de paramètres n et ε qui simule S_n et renvoie 1 si $\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon$ et 0 sinon.

   d. Écrire un programme Python renvoyant une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$.
   Le tester pour $n = 100$, $n = 1000$, $n = 10000$ puis apporter un regard critique par rapport à la question 1.b.

2. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \geqslant 0,\ \mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n$.

   b. Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, $\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$, puis $\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

   c. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(\frac{-n\varepsilon^2}{2}\right) \leqslant 2\exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right).$$
   (On étudiera les variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $t \mapsto \frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon$).
   Apporter un regard critique par rapport à la question 1.b.

Corrigé

Planche 42
Agro-Veto 2019

Question de cours.
Représenter graphiquement la fonction sinus.

Exercice.
On admet que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_k.$$

On rappelle qu'une permutation de $[\![1, n]\!]$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même .
On dit qu'un entier $k \in [\![1, n]\!]$ un point fixe de la permutation p si $p(k) = k$. On définit un dérangement de $[\![1, n]\!]$ comme étant une permutation de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe .
On représente usuellement une permutation p de $[\![1, n]\!]$ par la n-liste des images $[p(1), p(2), \ldots, p(n)]$. Dans une telle liste, tout entier de $[\![1, n]\!]$ apparait une fois et une seule.

1. En utilisant la fonction `randint` du module `random`, écrire une fonction Python permettant de simuler une permutation de $[\![1, n]\!]$.
2. Écrire une fonction Python prenant en argument une permutation P de $[\![1, n]\!]$, et renvoyant `True` si c'est un dérangement, `False` sinon.
3. Déterminer une approximation de la probabilité qu'une permutation de $[\![1, 50]\!]$ soit un dérangement (en supposant qu'elles sont toutes équiprobables).
4. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$.
   a. Justifier que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$.
   b. En déduire la probabilité d_n qu'une permutation de $[\![1, n]\!]$ prise au hasard soit un dérangement.
   c. Donner $\lim_{n \to +\infty} d_n$. Ce résultat est-il en accord avec celui de la question 3 ?
5. On appelle F_n le nombre de points fixes d'une permutation P de $[\![1, n]\!]$.
   a. Exprimer F_n à l'aide de variables aléatoires de Bernoulli.
   En déduire l'espérance de F_n.
   b. Donner la loi de F_n.

Corrigé

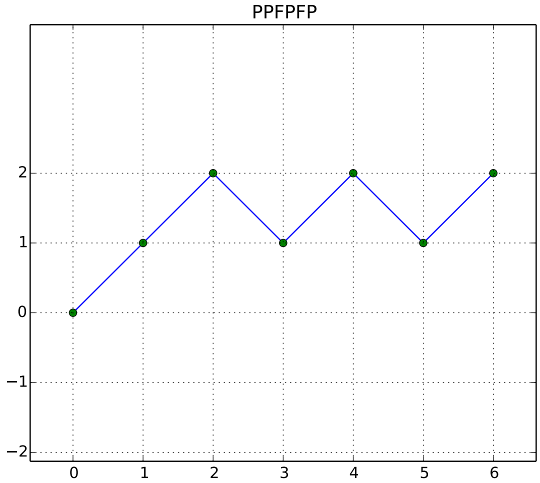
Planche 43
Agro-Veto 2019

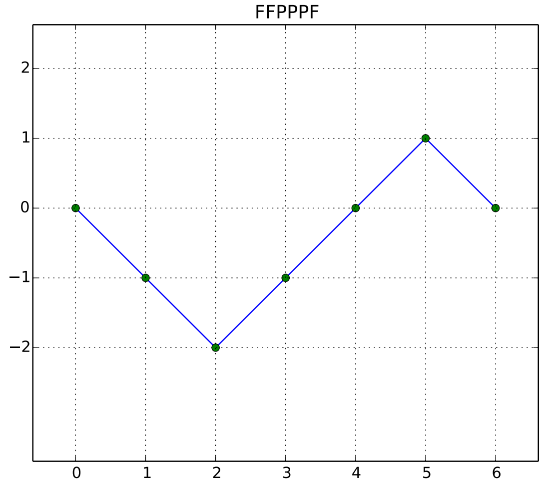
Question de cours.
Représenter graphiquement une densité de la loi normale centrée réduite.

Exercice.
On effectue $2n$ tirages d'une pièce de monnaie équilibrée. On appelle X_{2n} la variable aléatoire égale au nombre de "pile" obtenus. On note A_{2n} l'événement “au cours des $2n$ lancers, le nombre de "pile" obtenus a toujours été strictement supérieur au nombre de "face" obtenus”.

1. Si $n = 2$, quelle est la probabilité de A_{2n} ?
2. a. Écrire une fonction Python simulant $2n$ lancers de la pièce et renvoyant 1 si A_{2n} est réalisé, 0 sinon.
   b. A l'aide de la fonction précédente, estimer la probabilité de A_{2n} pour $n = 2$ et $n = 5$.

   Dans la suite, on représente chaque suite des $2n$ lancers de la pièce par un chemin partant du point $O(0, 0)$, tel que, pour chaque lancer de la pièce, on progresse d'une unité vers la droite et d'une unité vers le haut si l'on obtient pile, et on progresse d'une unité vers la droite et d'une unité vers le bas si l'on obtient face. Voici par exemple, pour $n = 3$, les chemins considérés si l'on obtient PPFPFP et si l'on obtient FFPPPF.





3. Combien y a-t-il de chemins possibles ?
4. Pour $i \in [\![0, 2n]\!]$, combien de chemins réalisent $[X_{2n} = i]$?
5. Quelle est la loi de X_{2n}?
6. On admet dans un premier temps que, pour $i > n$, $\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}(A_{2n}) = \frac{i-n}{n}$.

   a. Justifier que $\mathbb{P}(A_{2n}) = \dfrac{1}{2^{2n}} \left(\dfrac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=n+1}^{2n} i\binom{2n}{i}}_{S_1} - \underbrace{\sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i}}_{S_2} \right)$.

   b. En calculant séparément les deux sommes intervenant dans l'expression ci-dessus, donner $\mathbb{P}(A_{2n})$.
7. Le but de cette question est de démontrer la propriété admise précédemment : pour $i > n$, $\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}(A_{2n}) = \dfrac{i-n}{n}$.

   On suppose donc dans toute cette question $[X_{2n} = i]$ réalisé. On s'intéresse en conséquence uniquement aux chemins partant de O et pour lesquels, parmi les $2n$ pas effectués vers la droite, il y en a eu i qui montaient. On note $Z(2n, 2i - 2n)$ le point d'arrivée commun à ces chemins.

a. Combien y a-t-il de ces chemins au total ?

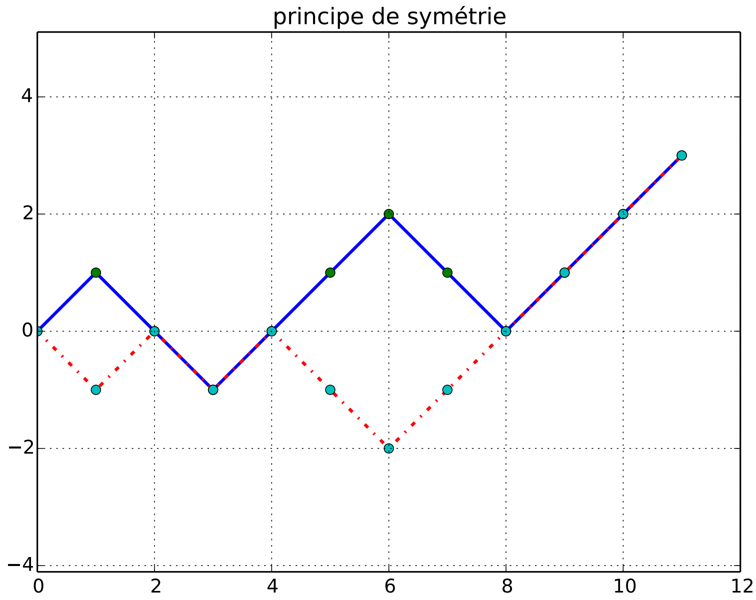
b. Combien y a-t-il de ces chemins passant par $A(1, 1)$?

c. Montrer que parmi ces chemins il y a en a exactement $\binom{2n-1}{i}$ passant par $B(1, -1)$.

d. On remarque que l'événement A_{2n} est réalisé si, et seulement si, le chemin obtenu ne coupe pas l'axe Ox. On cherche donc à dénombrer les chemins partant de O et arrivant en Z et ne coupant pas l'axe Ox.

Pour cela, on dénombre tout d'abord ceux qui coupent l'axe Ox.

(i) En utilisant une symétrie axiale d'axe Ox, comme dans le dessin suivant, justifier qu'il y a autant de chemins passant par A et coupant l'axe Ox, que de chemins passant par B .



(ii) En déduire le nombre de chemins passant par A et ne coupant pas l'axe Ox.

(iii) Retrouver ainsi que pour $i > n$, $\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}(A_{2n}) = \dfrac{i-n}{n}$.

Corrigé

Planche 44
Agro-Veto 2019

Question de cours.
Définition d'une application surjective.

Exercice.
On dispose de N boules numérotées de 1 à N, indiscernables au toucher, et de 2 urnes A et B.

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et N et on change d'urne la boule portant le numéro correspondant.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

1. Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = k-1)$ et $\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

2. a. Écrire une fonction `etape` prenant en arguments `N` et le nombre `k` de boules dans A à un instant donné et qui renvoie le nombre de boules dans A à l'instant suivant.

   b. Écrire une fonction renvoyant sous forme d'une liste les valeurs successivement prises par X_0, ..., X_n.

   À partir de maintenant et dans toute la suite, on suppose $N = 3$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$; on note aussi $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.

   b. Montrer que 1 est valeur propre de M et donner le sous espace propre associé.

   c. On suppose que X_0 suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{2}$. Quelle loi suit alors X_n ?

   d. Quel est l'ensemble des lois que pourrait suivre X_0 pour que X_n ait la même loi que X_0 ?

4. On suppose que l'urne A est initialement vide. On appelle D la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour que l'urne A soit à nouveau vide.

   a. Écrire une fonction en Python simulant la réalisation de D.

   b. (i) Calculer $\mathbb{P}(D = 2)$ et $\mathbb{P}(D = 4)$.

      (ii) Pourquoi D ne peut-il prendre que des valeurs paires ?

      (iii) Montrer que $\mathbb{P}(X_{2k+2} = 0) = \dfrac{1}{9}\mathbb{P}(X_{2k} = 0) + \dfrac{2}{9}$.

      (iv) On note désormais $u_k = \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ et $d_k = \mathbb{P}(D = 2k)$.

      Montrer que $[X_{2k} = 0] = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} [X_{2k} = 0] \cap [D = 2j])$.

      (v) En déduire que $d_k = u_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} d_j u_{k-j}$.

   c. A l'aide des relations des questions 4.b.(iii) et 4.b.(v), écrire une fonction en Python renvoyant la liste $[d_1, \ldots, d_n]$.
   S'il reste du temps, pour $n = 5$, comparer les résultats obtenus par simulation de D avec les résultats de la fonction précédente.

Corrigé

Planche 45
Agro-Veto 2019

Question de cours.
Énoncer les propriétés de l'intégrale.

Exercice.
On dispose d'un dé équilibré à n faces avec lequel 2 joueurs (nommés A et B) prennent part à un jeu. A lance le dé et verse 3 euros à B. B lance le dé et tant qu'il n'obtient pas un nombre supérieur ou égal à celui obtenu par A il relance le dé. À chaque lancer, il verse 1 euro à A. On note :

- X : la variable aléatoire égale au nombre obtenu par A.
- M : la variable aléatoire égale à la somme versée à A.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Écrire une fonction en Python permettant de simuler la réalisation de M (l'emploi de la fonction `randint` est conseillé).
3. Calculer la probabilité de l'événement $[M = j]$ sachant que $[X = 1]$.
4. Soit $k \geqslant 2$. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(M = j \mid X = k)$ et $\mathbb{P}(M \geqslant j \mid X = k)$.
5. Calculer $\mathbb{P}(M \geqslant j)$.
6. On admet que $\mathbb{E}(M) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(M \geqslant j)$. Calculer $\mathbb{E}(M)$. Donner sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
7. Déterminer l'espérance de G, gain algébrique de A, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Planche 46
Agro-Veto 2019

Question de cours.
Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice.
Un fabricant de poudre chocolatée met dans chacune de ses boîtes une image à collectionner. Il y a en tout n images différentes, et une seule par boîte.
On note T la variable aléatoire correspondant au nombre de boîtes nécessaires pour avoir toute la collection d'images. Pour tout i appartenant à $[\![2,n]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de boîtes à acheter pour obtenir une $i$ème image différente des $i-1$ déjà obtenues.
On définit également une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = -\ln(n) + 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. On admet qu'elle est convergente.

1. Écrire un programme en Python prenant en argument epsilon (supposé réel strictement positif) et qui renvoie le premier u_n tel que l'écart $u_{n+1} - u_n$ soit inférieur à epsilon.
2. a. Pour $i \in [\![2,n]\!]$, donner la loi de T_i.
   b. Exprimer T en fonction de $T_2,\ T_3, \ldots,\ T_n$.
   c. Montrer que $\mathbb{E}(T) = n\left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)$.
   d. Soit c un réel strictement positif. Montrer que $\mathbb{P}(T > c\,n\ln(n)) \leqslant \dfrac{1}{c} + \dfrac{u_n}{c\ln(n)}$.
3. a. Pour i,k dans $\mathbb{N}^*$, on pose $A_{i,k}$: "on n'a pas obtenu l'image i lors des k premiers tirages". Calculer $\mathbb{P}(A_{i,k})$.
   b. Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{i,k}\right) \leqslant n\exp\left(-\dfrac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   Indication: on pourra montrer que $1+t \leqslant \exp(t))$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$)
   c. Montrer que $\mathbb{P}(T > c\,n\ln(n)) \leqslant \dfrac{1}{n^{c-1}}$.
4. Comparer les deux inégalités des questions 2.d et 3.c.

Corrigé

Planche 47
Agro-Veto 2019

Question de cours.
Définition de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

Exercice.
Soient $a_0,\ a_1,\ldots,\ a_{n-1}$ des nombres complexes (non nécessairement distincts). on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_2 & & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

1. Étude du cas $n = 2$. On a $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.
   a. Quelles sont les valeurs propres de A ?
   b. A est-elle diagonalisable ?
2. Écrire une fonction en Python prenant en entrée une liste $L = [a_0, \ldots, a_{n-1}]$ et renvoyant un array représentant la matrice A.
3. Soient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, P le polynôme $a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$ et ω un nombre complexe vérifiant $\omega^n = 1$. Montrer que X est vecteur propre de A et donner la valeur propre associée.
4. Étude du cas $n = 4$.
   a. Déterminer tous les complexes z tels que $z^4 = 1$.
   b. Déduire de la question précédente 4 vecteurs propres de A .
   c. On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ et on note $\overline{Q}$ la matrice conjuguée de Q (c'est à dire la matrice carrée de même taille dont chaque terme de la ligne i colonne j est le conjugué du terme de la ligne i colonne j de Q).
      (i) Calculer $Q\overline{Q}$.
      (ii) En déduire que les 4 vecteurs propres donnés précédemment forment une famille libre.
      (iii) Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres en fonction de P.
   d. Donner les valeurs propres et la dimension des sous-espaces vectoriels propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Corrigé

Planche 48
Agro-Veto 2019

Question de cours.
Formule des probabilités composées.

Exercice.
On considère deux applications linéaires f, allant de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et g allant de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, où $p < n$. On appelle A matrice de f et B matrice de g, relativement aux bases canoniques de leurs espaces de départ et d'arrivée respectifs.

1. Donner les tailles de A et B.
2. Montrer que $g \circ f$ est un endomorphisme.
3. a. Montrer que le rang de g vérifie $\mathrm{rg}(g) \leqslant p$.
   b. Montrer que $g \circ f$ n'est pas surjective.
4. On prend $n = 3$, $p = 2$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a. En utilisant l'outil informatique, montrer que AB est diagonalisable et la diagonaliser.
   b. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nul. Montrer que BX est différent de 0.
   c. Montrer que si λ est valeur propre de AB alors λ est aussi valeur propre de BA.
   d. BA est-elle diagonalisable ?
5. On suppose maintenant $p = 3$ et $n > 3$. On note C la matrice carrée d'ordre 3 telle que $C = AB$.
   a. Écrire une fonction en Python prenant en argument deux arrays représentant deux matrices A et B, et qui renvoie les valeurs propres de AB et de BA.
   b. Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de C, alors λ est une valeur propre non nulle de BA.
   c. On suppose $n = 4$ et que C a trois valeurs propres distinctes non nulles. Montrer que BA est diagonalisable

Corrigé

Planche 49
Agro-Veto 2019

Question de cours.
Énoncer le théorème de Schwarz.

Exercice.
Dans cet exercice , on considère une population de tortues.

1. Le nombre X d'œufs pondus par une tortue chaque année suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chacun d'eux a une probabilité p d'éclore . On appelle Y le nombre d'œufs éclos .

   a. Écrire une fonction Python simulant une ponte et donnant le nombre d'œufs éclos.
   b. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
   c. En déduire la loi de Y. Donner l'espérance de Y.

2. Des études sur ce type de tortue ont permis de déterminer que :

   - les tortues deviennent adultes à 2 ans, et que seules 20% parviennent à cet âge
   - 40% des tortues adultes de l'année n meurent avant la fin de l'année
   - les femelles composent la moitié de la population et donnent naissance à 4 bébés chaque année, de l'âge de 2 ans jusqu'à la fin de leur vie.

   On définit a_n comme le nombre d'adultes vivant l'année n, et b_n le nombre de bébés de cette même année.

   a. Déterminer la valeur de a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et b_n ainsi que celle de b_{n+1} en fonction de a_n .
   b. On note $E = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 0.6u_{n+2} - 0.4u_n = 0\}$.
   Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de E.
   c. On considère que l'on a comme conditions initiales $a_0 = 8000$, $a_1 = 7700$ et $a_2 = 7400$.
   Écrire une fonction Python de paramètre n qui renvoie a_n. La suite (a_n) semble-t-elle converger ?
   d. (i) Donner les racines réelles et complexes du polynôme $P = X^3 - 0.6X^2 - 0.4$.
   (ii) Prouver que si r est racine de P, la suite des puissances de r appartient à E.
   (iii) Montrer que l'application ϕ, qui à toute suite u appartenant à E associe (u_0, u_1, u_2) est un isomorphisme de E sur $\mathbb{C}^3$. En déduire que E est de dimension 3.
   (iv) Notons r_1, r_2, r_3 les trois racines de P. On admet que la famille $((r_1^n), (r_2^n), (r_3^n))$ est libre dans E. Montrer que c'est une base de E.
   (v) En déduire la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(on ne demande pas la valeur explicite de la limite)*.

Corrigé

Planche 50
Agro-Véto 2019

Question de cours.
Énoncer l'inégalité de Markov.

Exercice.
On considère d'une part deux urnes A et B et d'autre part 3 boules numérotées de 1 à 3.

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on transfère la boule portant le numéro correspondant dans l'urne où elle n'était pas.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

On suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $[\![0;3]\!]$.

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument une valeur de n, simule la réalisation de la variable aléatoire X_n et renvoie la valeur de X_n obtenue.

2. Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

   Déterminer U_0 et démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.

3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E. Soit φ l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = XP(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)P'(X).$$

   a. Montrer que φ est un endomorphisme de E, justifier que sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.

   b. Pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, on pose : $P_k(X) = \frac{1}{8}(X-1)^k(X+1)^{3-k}$.
   Démontrer que pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, $\varphi(P_k) = \left(1 - \frac{2}{3}k\right) P_k$.

   c. En déduire que l'endomorphisme est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

4. On pose : $Q = \frac{1}{4}(X^3 + X^2 + X + 1)$.

   a. Expliciter les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}$. Quel vecteur retrouve-t-on ?

   b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2$.

5. À l'aide des questions précédentes, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 2)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 3)$.
   Par quelle loi pourrait-on approcher la loi de X_n pour une grande valeur de n ?

6. Vérifier le résultat de la question précédente à l'aide d'une simulation informatique.

Corrigé

Planche 51
Agro-Véto 2019

Question de cours.
Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Donner son tableau de variation.

Exercice.
Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$.

On pose $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2, j^3 et j^4.
2. a. Soit r et s deux complexes non nuls. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
   Donner une base de vecteurs propres de M.
   b. La matrice M est-elle diagonalisable lorsque $r = 0$ ou $s = 0$?
3. Écrire une fonction `decalage(L)` qui renvoie, si $L = [a_1, \ldots, a_n]$, la liste $L_1 = [a_2, \ldots, a_n, a_1]$.
   Utiliser cette fonction pour écrire une fonction `matrice(a_1,a_2,a_3)` qui renvoie la matrice A.
   On pourra par exemple compléter le script suivant :

```
def matrice(a_1,a_2,a_3):
    A=....
    L=....
    for i in ...
        A.append(L[:])
        ...
    return ...
```

4. Si a_1, a_2 et a_3 sont réels, la matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?
6. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$. On pourra utiliser sans justifier que la famille (U, X_1, X_2) est libre.
   a. Calculer AX_1 et AX_2.
   En déduire qu'il existe des complexes r et s tels que $AX_1 = s^2 X_2$ et $AX_2 = r^2 X_1$.
   b. Déterminer le spectre de A.
   On pourra exprimer les valeurs propres à l'aide des complexes r et s introduits à la question 6 et utiliser la question 2.
7. Préciser dans les cas suivants si la matrice A est diagonalisable.

   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} j & 1 & 0 \\ 1 & 0 & j \\ 0 & j & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé

Planche 52
Agro-Véto 2019

Question de cours.
Définition de l'espérance d'une variable aléatoire X discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Exercice.
Dans tout l'exercice, on considère $\mathbb{R}^3$ muni produit scalaire canonique.
On rappelle que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors leur produit scalaire est :

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

   Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{0; 1\}$ et déterminer les sous-espaces propres E_0 et E_1 de f.

2. La matrice A est-elle inversible ?

3. Écrire une fonction Python `proj` qui prend en argument une matrice carrée M (entrée par exemple sous la forme d'une liste de listes) et qui renvoie un booléen : `True` si $M^2 = M$, `False` sinon.

   Tester cette fonction sur la matrice A.

4. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = E_1$.

5. Écrire une fonction Python `ps` prenant en argument deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ codés sous forme de tableaux numpy ou de listes, et retournant leur produit scalaire.

6. a. Montrer que les deux sous-espaces propres E_0 et E_1 sont orthogonaux, c'est-à-dire :

   $$\forall u \in E_0, \quad \forall v \in E_1, \quad \langle u, v\rangle = 0.$$

   On pourra éventuellement utiliser la fonction `ps`.

   b. En déduire que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, on a :

   $$f(x) \in E_1 \text{ et } \forall y \in E_1, \quad f(x) - x \text{ orthogonal à } y.$$

   On a donc montré que f était la projection orthogonale sur E_1.

7. Déterminer une base orthonormale de E_1. En déduire, en utilisant la fonction `ps`, une valeur approchée de la distance du vecteur $t = (1; 2; 1)$ à l'espace E_1 à 10^{-2} près.

Corrigé

Planche 53
Agro-Véto 2019

Question de cours.
À quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

Exercice.
Rappel : algorithme de dichotomie. *On considère une fonction f continue sur un segment $[a,b]$. On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a,b]$, en un point que l'on note γ. On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour tout entier naturel k (en notant $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$), $(a_{k+1}, b_{k+1}) = (a_k, c_k)$ si $f(a_k)f(c_k) \leqslant 0$ et $(a_{k+1}, b_{k+1}) = (c_k, b_k)$ sinon. On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers γ, en vérifiant :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leqslant \gamma \leqslant b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

On peut montrer que si l'entier k est tel que $\frac{b-a}{2^k} \leqslant \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées de γ à ε-près.

1. On considère pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x^n - \ln(x) - n$.

   a. Dresser le tableau de variations de f_n.

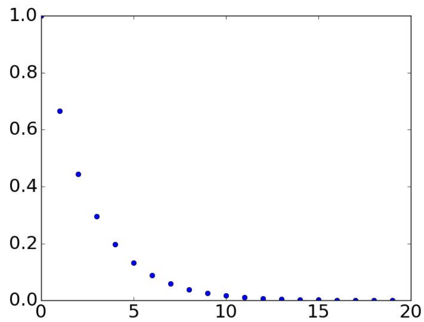
   b. *On rappelle et on admet l'inégalité suivante :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leqslant x - 1$ $(\star)$.
   En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $u_n \in \left]0; n^{-\frac{1}{n}}\right[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et un unique réel $v_n \in \left]n^{-\frac{1}{n}}; +\infty\right[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.

2. **Étude de la suite** (v_n)
   La suite $(v_n)_{n\geq 2}$ vérifie donc l'égalité : $\forall n \geqslant 2,\ v_n^n - \ln(v_n) - n = 0$.

   a. Justifier en utilisant si besoin $(\star)$ que $f_n\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) > 0$, puis en déduire que : $\forall n \geqslant 2,\ v_n \leqslant (2n)^{\frac{1}{n}}$.

   b. En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes v_n pour n allant de 2 à 30. Représenter la suite (v_n) graphiquement.
   On rappelle que la fonction `plot` des modules `pylab` ou `matplotlib.pyplot` permet de faire des représentations graphiques comme le montre l'exemple suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
X=[n for n in range(20)]
Y=[(2/3)**k for k in X]
plt.plot(X,Y,'o')
plt.show()
```



   c. Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite ℓ.

   d. *On admet le résultat suivant : si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, alors $\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(b_n)$. On rappelle de plus que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$.* Déterminer un équivalent de $v_n - \ell$.

3. **Étude de la suite** (u_n)

   a. Proposer une méthode déterminant des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes u_n pour n allant de 2 à 8.

   b. Calculer $f_n(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de (u_n).

   c. Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$, puis montrer que u_n est équivalent à e^{-n}.

Corrigé

Planche 54
Agro-Véto 2019

Question de cours.
Rappeler la formule des accroissements finis.

Exercice.
Rappel : *la fonction définie ci-dessous permet de représenter graphiquement la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans* $[\![0;n]\!]$ *(*$n \in \mathbb{N}$*), loi étant la liste* $[\mathbb{P}(X_n = 0), \dots, \mathbb{P}(X_n = n)]$.

```
from matplotlib.pyplot import *
def graphe(loi):
    lx = [i for i in range(len(loi))]
    bar(lx,loi)
    ylim(0,0.5)
    show()
```

Pour se rendre d'un endroit à un autre, les individus d'une fourmilière ont le choix entre deux trajets disjoints, que nous nommerons A et B. À chaque fois qu'une fourmi emprunte l'un des deux chemins, elle y dépose une certaine quantité de phéromone qui peut éventuellement dépendre de la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin.
Notations : pour chaque $n \geqslant 1$, α_n (respectivement β_n) désigne la quantité de phéromone présente sur le chemin A (resp. B) après le $n^{\text{è}}$ trajet. A_n (resp. B_n) désigne l'évènement « la n^{e} fourmi choisit le trajet A (resp. B) ». Nous supposerons que chaque fourmi choisit de façon aléatoire le chemin qu'elle emprunte, en affectant à chacun une probabilité proportionnelle à la quantité de phéromone qui y est présente.
On a donc : $\mathbb{P}_{[\alpha_n=a]\cap[\beta_n=b]}(A_{n+1}) = \frac{a}{a+b}$ et $\mathbb{P}_{[\alpha_n=a]\cap[\beta_n=b]}(B_{n+1}) = \frac{b}{a+b}$.
Enfin, X_n désignera le nombre de fourmis ayant choisi le trajet A lors des n premiers trajets.
Nous supposerons qu'initialement $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et qu'à chaque trajet une fourmi multiplie par un facteur $r > 1$ la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin qu'elle emprunte.

1. Déterminer la loi des variables X_1, X_2 et X_3.

2. Rédiger une fonction `simulX` qui reçoit un entier n et un réel r, simule les déplacements de n fourmis suivant la règle énoncée et renvoie le nombre X_n de fois où le chemin A a été emprunté.

3. a. Rédiger une fonction `loiX` qui reçoit un entier n et un réel r et renvoie, sous forme de liste, des valeurs approchées des probabilité $[\mathbb{P}(X_n = 0), \dots, \mathbb{P}(X_n = n)]$ obtenues en faisant 1 000 simulations de la variable X_n.
   b. Représenter graphiquement la loi de la variable X lorsque $n = 100$ et $r = 2$. Commenter.

4. Exprimer en fonction de n et de r la probabilité $\mathbb{P}(X_n = n)$.
   On ne tentera pas de simplifier l'expression obtenue.

5. On pose : $\forall n \geqslant 1$, $p_n(r) = \frac{r}{1+r} \cdots \frac{r^n}{1+r^n}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{r^{2n+1}}\right)$.
   Démontrer que pour tout $r > 1$, les suites $(p_n(r))_{n\geq 1}$ et $(q_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
   On notera $p(r)$ et $q(r)$ leurs limites respectives.

6. En remarquant que $\forall n \geqslant 1$, $p_n(r) = \frac{1}{1+r^{-1}} \cdots \frac{1}{1+r^{-n}}$, montrer que : $p(r) \geqslant \exp\left(-\frac{1}{r-1}\right)$.
   On pourra admettre sans le démontrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

7. Démontrer que $\forall r > 1$, $q(r) \leqslant \exp\left(-\frac{r}{r^2-1}\right)$.

8. On admet que $\forall r > 1$, $p(r) = q(r)$. Déduire des questions précédentes un encadrement de la limite de la probabilité $\mathbb{P}(X_n = n)$ en fonction de r.

Conclusion : ce modèle vous semble-t-il approprié pour rendre compte du comportement des fourmis dans la réalité ?
Corrigé

Planche 55
Agro-Véto 2019

Question de cours.
Si f est la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x)=\sqrt{1-x}$, déterminer une expression de sa dérivée f'.

Exercice.
On souhaite estimer un paramètre $p\in]0;1[$. On note : $q=1-p$.
Soit un entier $n\geqslant 1$ fixé. On considère $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires, indépendantes, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et définies sur un même espace probabilités.
On note : $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$.

1. a. Justifier que $p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}$.
   b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'intervalle $\left[\overline{X_n}-\sqrt{\frac{5}{n}};\overline{X_n}+\sqrt{\frac{5}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $0,95$.
2. Écrire une fonction Python `test(n,p,a,b)` qui prend en arguments un entier `n`, une probabilité `p`, deux flottants `a` et `b`, simule une réalisation de $\overline{X_n}$ et retourne 1 si $\overline{X_n}$ appartient à $[a,b]$ et 0 sinon.
3. On cherche par la suite un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $0,95$ d'amplitude plus petite. On fixe un réel strictement positif t quelconque et ε un réel strictement positif quelconque.
   a. Établir l'égalité : $\mathbb{P}\left(\overline{X_n}-p\geqslant\varepsilon\right)=\mathbb{P}\left(e^{nt\overline{X_n}}\geqslant e^{nt(p+\varepsilon)}\right)$.
   b. En utilisant l'inégalité de Markov, établir l'inégalité suivant : $\mathbb{P}\left(\overline{X_n}-p\geqslant\varepsilon\right)\leqslant e^{n\left(\ln(pe^t+q)-t(p+\varepsilon)\right)}$.
   c. On admet l'inégalité : $\ln(pe^t+q)-tp\leqslant\frac{t^2}{8}$. Ainsi, on a l'inégalité suivante :
   $$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \mathbb{P}\left(\overline{X_n}-p\geqslant\varepsilon\right)\leqslant e^{n\left(\frac{t^2}{8}-t\varepsilon\right)}.$$
   En déduire l'inégalité : $\mathbb{P}\left(\overline{X_n}-p\geqslant\varepsilon\right)\leqslant e^{-2n\varepsilon^2}$.
4. On pose $\overline{Y_n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(1-X_k)$. Établir l'inégalité $\mathbb{P}\left(\overline{Y_n}-q\geqslant\varepsilon\right)\leqslant e^{-2n\varepsilon^2}$.
5. Déduire des questions 3(c) et 4 l'inégalité :
$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$
6. Comment choisir ε pour obtenir un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 ? L'amplitude de l'intervalle de confiance est-elle plus réduite que celle obtenue à la question 1(b) ?

Corrigé

Planche 56
Agro-Véto 2019

Question de cours.
Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective.

Exercice.
Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geqslant 2$, on note $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, et on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. a. Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $]0, 1]$. Vérifier que la variable $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   b. En déduire une fonction Python qui prend un entier un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n.
   c. En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{S_n}$.
2. Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geqslant 2$.

   On note F_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$
   En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n.
3. a. Montrer que pour tout réel u de $[0, 1]$, on a :
$$(1 - u)^n \geqslant 1 - nu.$$
   b. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))\, \mathrm{d}x$ est convergente et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - F_n(x)) = 0$.
4. a. Pour tout $A > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$$\int_0^A x f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^A (1 - F_n(x))\, \mathrm{d}x - A(1 - F_n(A)).$$
   b. En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :
$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))\, \mathrm{d}x.$$
5. À l'aide du changement de variable $t = 1 - e^{-x}$, montrer que :
$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t}\, \mathrm{d}t,$$
   et en déduire finalement que :
$$\mathbb{E}(Y_n) = S_n.$$

Corrigé

Planche 57
Agro-Véto 2019

Question de cours.
Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E.

Exercice.
Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Si X *est une variable aléatoire, on notera* $\mathbb{E}(X)$ *son espérance et* $\mathbb{V}(X)$ *sa variance.*
Soient $a \in]0;1]$ et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité.
2. On considère dorénavant X une variable aléatoire de densité f.
   Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. On considère la variable aléatoire Y donnée par :
   $$Y = \frac{X^2}{2a}.$$
   a. Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
   b. On pose $U = 1 - e^{-Y}$ (de sorte que $Y = -\ln(1-U)$). Montrer que U suit la loi uniforme sur $]0,1[$.
   c. En déduire une fonction Python `Y()` qui simule la variable Y.
   d. Écrire une fonction Python `X(a)` qui prend en entrée un réel $a \in]0,1]$ et qui simule X.
4. a. Donner une densité, que l'on notera g, d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance nulle et de **variance** a.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, en déduire que X possède une espérance et la calculer.
   c. En utilisant la variable Y, montrer que X^2 possède une espérance et la calculer.
   d. En déduire $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(4-\pi)a}{2}$.
5. On considère désormais que le paramètre $a \in]0;1]$ est inconnu et on souhaite l'estimer.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes ayant toutes la même loi que X. On note :
   $$S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$
   a. Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.
   b. Montrer que X^2 admet une variance et montrer que $\mathbb{V}(X^2) = 4a^2$.
   c. Montrer que $\mathbb{V}(S_n) \leqslant \frac{1}{n}$. Puis, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n à partir de laquelle $\left]S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right[$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.

Corrigé

Planche 58
Agro-Véto 2019

Question de cours.

Si α est un réel quelconque, déterminer sur $]0,+\infty[$ une expression d'une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha}}$.

Exercice.

Une compagnie fait passer des entretiens d'embauche à n candidats. On suppose que la compétence de chaque candidat est quantifiée par une variable aléatoire X_i suivant une loi uniforme sur $[0;1]$, d'autant plus élevée que le candidat est compétent. De plus, on suppose que les variables $(X_1,\dots,X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

À la fin de chaque entretien, la compagnie doit immédiatement donner sa décision : soit elle embauche le candidat, soit elle passe au suivant, sans possibilité de revenir sur ses pas. La compagnie cherche à élaborer une stratégie qui lui permettrait de maximiser l'espérance de la compétence du candidat qu'elle choisira. Pour ce faire, elle décide de fixer un seuil $s \in [0;1]$. Si, parmi les $n-1$ premiers candidats, aucun ne dépasse le seuil, la compagnie embauchera le dernier candidat. Sinon, elle choisira le premier candidat qui dépasse le seuil.

Pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, on note A_k l'évènement : « pour tout $i \in [\![1;k-1]\!]$, $X_i < s$, et $X_k \geqslant s$ », et B l'évènement : « pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, $X_k < s$ ».

On définit par conséquent la variable aléatoire $Z_{n,s}$, compétence du candidat retenu, comme suit :

$$Z_{n,s} = \begin{cases} X_n & \text{si } B \text{ est réalisé,} \\ X_k & \text{si } A_k \text{ est réalisé } (1 \leqslant k \leqslant n-1) \end{cases}.$$

1. a. Écrire un programme Python qui prend en argument un réel $s \in [0;1]$, un entier naturel non nul n, et retourne une réalisation de $Z_{n,s}$.
   b. En déduire un programme qui retourne une valeur approchée de la compétence moyenne du candidat recruté via ce protocole.
2. Calculer $\mathbb{E}(Z_{n,0})$ et $\mathbb{E}(Z_{n,1})$.
3. Montrer que, pour tout $t \in [0;1]$, on a : $\mathbb{P}\left(B \cap [Z_{n,s} \leqslant t]\right) = s^{n-1}t$.
4. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $0 < s < 1$.
   Soit $t \in [0;1]$. Pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, montrer que :
   $$\mathbb{P}\left(A_k \cap [Z_{n,s} \leqslant t]\right) = \begin{cases} (t-s)s^{k-1} & \text{si } t \geqslant s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}.$$
5. En déduire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(Z_{n,s} \leqslant t)$ en fonction de $t \in [0;1]$.
6. Montrer que $Z_{n,s}$ est une variable à densité, et en donner une densité.
7. En déduire que : $\mathbb{E}(Z_{n,s}) = \dfrac{1}{2}(1+s-s^n)$.
8. Déterminer le seuil s_n^* qui maximise la compétence moyenne du candidat embauché en fonction de n.
9. À l'aide de la fonction programmée en 1.b, tracer sur un graphique l'évolution de la valeur de $\mathbb{E}(Z_{n,s})$ en fonction de s pour $n = 5, 10, 50$, et vérifier les conclusions de la question précédente dans ces cas.

Corrigé

Planche 59
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Énoncer le théorème des sommes de Riemann.

Exercice.
On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densité f_X et f_Y alors $X+Y$ est une variable à densité et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(t-u)\,\mathrm{d}u$$

est une densité de $X+Y$.
On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à densité indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$.
On pose, pour tout entier naturel non nul n, $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que M_n est une variable à densité et en donner une densité f_n.
2. Montrer que M_n admet une espérance et calculer celle-ci.
3. Calculer $\mathbb{P}\left(M_n > \mathbb{E}(M_n)\right)$ et donner sa limite quand n tend vers $+\infty$.
4. Simuler M_n à l'aide de Python.
5. Écrire une fonction qui simule 10 000 fois M_n et donne une estimation de $\mathbb{P}\left(X_{n+1} > M_n\right)$.
6. a. Quelle est la loi de $-X_{n+1}$?
   b. Déterminer une densité de $M_n - X_{n+1}$.
   c. En déduire la valeur de $\mathbb{P}\left(X_{n+1} > M_n\right)$.

Corrigé

Planche 60
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Théorème de transfert pour une variable aléatoire réelle discrète.

Exercice.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Écrire en Python une fonction permettant l'affichage graphique de $\tan^2$, $\tan^4$, $\tan^6$ et $\tan^8$.
2. Faire une conjecture sur la monotonie et l'existence d'une limite de la suite (u_n) et la démontrer.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{2n+3}$ et $u_n \geqslant \dfrac{1}{2(2n+3)}$.

   Donner la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
4. De même qu'à la question précédente, en utilisant la valeur de $u_{n-1} + u_n$, donner un majorant de u_n pour $n \geqslant 1$.
5. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Écrire une fonction en Python prenant n en argument et renvoyant la valeur de u_n.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   a. Montrer que :
   $$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ (1+\tan^2 t)\sum_{k=0}^{n}(-\tan^2)^k(t) = 1 + (-1)^n \tan^{2n+2}(t).$$
   b. Montrer que $S_n = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$.
   c. En déduire un algorithme permettant d'avoir une valeur approchée de π à ϵ près.

Corrigé

Planche 61
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Soient a et b deux réels tels que $a^2 - 4b > 0$. Quelles sont les solutions de $y'' + ay' + by = 0$?

Exercice.
Rappel : algorithme de dichotomie.
On considère une fonction g continue et monotone sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α. On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- *Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$* et :

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (a_k, c_k) & \textit{si } g(a_k)g(c_k) \leqslant 0 \\ (c_k, b_k) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers α.
On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution et que celle-ci est strictement positive. On notera par la suite x_n cette solution.
2. Écrire une fonction Python permettant de déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de x_2.
3. Quelle est la monotonie de la suite (x_n) ? Montrer que cette suite est convergente.
4. On définit une suite (u_n) en posant $u_n = n^2 x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   À l'aide de Python, représenter graphiquement cette suite. Que dire de sa convergence ?
   Démontrer cette conjecture et donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
5. On pose $g(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$.
   a. Montrer que cette fonction est croissante sur $[x_2, 1]$ et donner son tableau de variation sur $[x_2, 1]$.
   b. Étudier le signe de $g(x) - x$ sur $[x_2, 1]$.
   c. On pose $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Montrer que la suite (v_n) est monotone et converge vers x_2.

Corrigé

Planche 62
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Donner la définition du nombre dérivé en a d'une fonction f.

Exercice.

1. a. Donner la nature de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$.

   b. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   Montrer que :
   $$\forall k \geqslant 2 \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:
   $$\forall n \geqslant 2,\ 1 + \int_2^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \int_1^{n-1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

   c. Montrer que $\ln(n-1) \sim \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   En déduire un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Une boîte contient initialement une boule blanche et une boule noire . On effectue des tirages successifs avec remise et après chaque tirage on rajoute une boule noire avant de procéder au tirage suivant.

   On note X le rang d'apparition de la première boule noire et Y le rang d'apparition de la première boule blanche.

   a. Écrire un programme simulant la variable aléatoire X.

   b. Déterminer la loi de X. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

   c. Déterminer la loi de Y. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Corrigé

Planche 63
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Courbes représentatives de l'exponentielle et du logarithme.

Exercice.
Sur une plage, le drapeau permettant ou non la baignade peut être de trois couleurs : vert, orange ou rouge.
Une étude statistique sur une grande période a permis de montrer que :

- Si le drapeau est vert un jour donné, alors il est encore vert le jour suivant avec la probabilité $\frac{1}{2}$, ou orange ou rouge de façon équiprobable.
- Si le drapeau est orange un jour donné, alors il est vert le jour suivant avec la probabilité $\frac{1}{2}$, ou orange avec la probabilité $\frac{1}{4}$, ou encore rouge.
- Si le drapeau est rouge un jour donné, alors il est orange le jour suivant avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou rouge avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On note V_n l'événement "le drapeau est vert le jour numéro n" et $v_n = P(V_n)$. On définit de même O_n, o_n, R_n et r_n.

1. Déterminer v_{n+1}, o_{n+1} et r_{n+1} en fonction de v_n, o_n et r_n et $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, si l'on note $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ o_n \\ r_n \end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = MX_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. Quel est le rang de M ? Que peut-on en déduire ?
4. Calculer $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduit-on pour M en terme de valeurs propres ?
5. Justifier que 1 est valeur propre de M et donner les vecteurs propres associés .
6. Montrer qu'il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$ et préciser ces matrices. Vérifier avec Python que P est bien inversible.

   On rappelle l'instruction `inv` du package `numpy.linalg` permet de calculer un tel inverse. Par exemple, si l'on importe la bibliothèque `numpy` avec l'alias `np` et si on exécute la commande `C=np.array([[2,1],[2,6]])` *,* `np.linalg.inv(C)` *renvoie* `array([[ 0.6, -0.1], [-0.2, 0.2]])` *).*
7. Exprimer X_n en fonction de X_1 et P, D et $n \in \mathbb{N}^*$.
8. On suppose que le jour numéro 1, le drapeau est vert. Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de v_n, o_n et r_n.
9. Écrire une fonction Python prenant en argument v_1, o_1, r_1 et n, et renvoyant les prévisions de la couleur du drapeau pour le jour numéro n.

Corrigé

Planche 64
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Énoncer le théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice.
On considère n variables aléatoires réelles indépendantes $T_1, \dots, T_n$ suivant la même loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). On pose $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$.

1. a. Montrer que si U suit une loi uniforme sur $[0, 1[$, alors la variable aléatoire $X = -\dfrac{\ln(1-U)}{\lambda}$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.
   b. Écrire une fonction Python qui simule la loi de S_n.

2. *On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, à densités respectives f_U et f_V, alors $U+V$ admet une densité g qui est définie pour tout réel x par :*

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\,\mathrm{d}t$$

   a. Déterminer des densités respectives de S_1, S_2, S_3.
   b. En déduire plus généralement une densité de S_n.

3. Soit Y_n la variable aléatoire définie par : $Y_n = \dfrac{S_{n+1} - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}}$.
   a. Déterminer une densité de Y_n en fonction de celle de S_{n+1}.
   b. Soit g_n la fonction définie par :

$$g_n(x) = \begin{cases} e^{-x\sqrt{n}+n\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} & \text{si } x > -\sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer qu'une densité f_n de Y_n peut s'écrire sous la forme $f_n : x \mapsto \dfrac{\sqrt{n}}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n g_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$.
   d. On admet que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ *(formule de Stirling).*
   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Interpréter ce résultat.

Corrigé

Planche 65
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Que signifie “f est négligeable devant g” ?

Exercice.
Une fourmi se déplace sur un polygone à p sommets numérotés de 0 à $p-1$. Lorsqu'elle arrive sur un sommet, elle décide de manière équiprobable de repartir en arrière ou de poursuivre son chemin. La fourmi est au départ sur le sommet 0. On notera T_p le temps mis par la fourmi pour revenir à son point de départ pour un polygone à p côtés et n le nombre de sommets atteints.

1. Écrire une fonction Python `chemin(n,p)` renvoyant la liste des n sommets atteints dans un polygone à p sommets.
2. Écrire une fonction `tempsMoyen(p)` qui renvoie le temps moyen mis par la fourmi pour revenir au sommet de départ.
3. Quel lien semble-t-on pouvoir établir entre T_p et p ?
4. a. Montrer que $T_3 - 1$ suit une loi géométrique et préciser son paramètre .
   b. Quelle est l'espérance de T_3 ?
5. La fourmi se déplace sur le carré ABCD et au départ elle est en A. On notera respectivement a_n, b_n, c_n, d_n les probabilités que la fourmi soit en A, B, C, D à l'instant n et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

   a. Justifier que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   b. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n$, où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Calculer M^2 et M^3 .
7. Exprimer X_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
8. Donner la loi de T_4 et son espérance.

Corrigé

Planche 66
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Formule de Taylor-Young.

Exercice.
Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\Phi(P) = 9XP - (X^2 - 1)P'$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. On modélise un polynôme par la liste de ses coefficients donnés par ordre croissant. Par exemple le polynôme $X + 2X^3 + X^4$ va être modélisé par `[0,1,0,2,1]`.

   a. Écrire une fonction prenant en argument une liste de ce type représentant un polynôme P et renvoyant une liste modélisant le polynôme dérivé P' .

   b. Écrire une fonction prenant en argument une liste représentant un polynôme P et renvoyant une liste modélisant le polynôme XP .

   c. En déduire une fonction renvoyant une liste représentant $\Phi(P)$ à partir d'une liste représentant P.

3. On donne $P = 2X^2 + 4X + 2$. Calculer $\Phi(P)$ et le factoriser.

4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Montrer que $\Phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n + 1$.

   Pour quel degré a-t-on une inégalité stricte ?

5. On considère l'équation (E) : $\Phi(P) = 9P$.

   a. Le polynôme nul est-il solution ?

   b. On cherche à déterminer tous les polynômes non nuls solutions de (E).
   Montrer que ceux-ci sont forcément de degré 9.
   Montrer qu'on peut les mettre sous la forme $(X + 1)^k Q(X)$.
   Montrer qu'on a toujours $k = 9$ et $\deg Q = 0$.

   c. Déduire des questions précédentes que 9 est valeur propre de Φ et donner le sous-espace vectoriel propre associé.

Corrigé

Planche 67
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Qu'appelle-t-on famille génératrice d'un espace vectoriel E ?

Exercice.
Rappel : algorithme de dichotomie.
On considère une fonction g continue et monotone sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α.
On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- *Pour tout entier naturel k, on note* $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et :

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (a_k, c_k) & \textit{si } g(a_k)g(c_k) \leqslant 0 \\ (c_k, b_k) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers α.
Une course comporte n coureurs. Les temps de parcours des coureurs sont des variables aléatoires à densité $(X_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$, indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On note T_1 le temps de parcours du gagnant.
   a. Montrer que T_1 est à densité et en donner une densité .
   b. Quel est le temps moyen mis par le gagnant ?
2. On note T_k le temps de parcours du coureur arrivé en k-ème position et, pour tout réel x de $[0, 1]$, N_x le nombre de coureurs ayant fini au plus tard à l'instant x.
   a. Simuler T_k à l'aide de Python .
   Indication : Si `L` *est une liste Python,* `sorted(L)` *est une nouvelle liste comportant les éléments de L triés par ordre croissant.*
   b. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que $[T_k \leqslant x] = [N_x \geqslant k]$. En déduire que :
   $$\mathbb{P}(T_k \leqslant x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$
3. On s'intéresse au 3-ème coureur.
   a. Montrer que $\mathbb{P}(T_3 \leqslant x) = G(x)$ où $G(x) = 1 - \left((1-x)^n + nx(1-x)^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2(1-x)^{n-2}\right)$.
   b. Justifier que G est croissante sur $[0, 1]$.
   c. A l'aide de la méthode de dichotomie, trouver le temps de parcours qui permet d'être sur le podium (c'est-à-dire au pire troisième) dans 95 % des cas. Quelle est la valeur obtenue pour $n = 10$?
4. On considère 2 variables aléatoires à densité X et Y, indépendantes.
   a. Montrer que $P(X = Y) = 0$.
   b. Montrer que l'événement "il n'y a aucun ex-aequo" est quasi-certain.

Corrigé

Planche 68
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Rappeler la formule de Bayes.

Exercice.
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$, où $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X. On pose $T_n = \prod_{k=0}^{n} X_k$.

1. a. Écrire une fonction Python prenant en argument p et n et simulant la loi de T_n.
   b. Écrire une fonction Python prenant en argument p et n et renvoyant l'espérance de T_n.
   c. Essayer pour $n = 20$ et $p = 0.5$.
2. a. Calculer l'espérance et la variance de X.
   b. Donner l'espérance de T_n. En déduire la loi de T_n.
3. a. On pose $u_n = \mathbb{P}(T_n = 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = (2p - 1)u_n + 1 - p$.
   b. Retrouver la loi de T_n.
4. On considère une variable aléatoire N, indépendante de la famille de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $T(\omega) = \prod_{k=0}^{N(\omega)} X_k(\omega)$. On définit ainsi une nouvelle variable aléatoire T, qui est le produit d'un nombre aléatoire de variables aléatoires.
   Déterminer la loi de T.
5. On considère une variable aléatoire H suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, définie sur le même univers que X et indépendante de X. On note D la variable aléatoire $D = HX$.
   a. Donner la fonction de répartition de D.
   b. En déduire une densité de D.

Corrigé

Planche 69
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Donner l'allure de la fonction densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice.
On considère une suite u définie par la valeur de $u_0 > 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1}u_n$.

1. Écrire une fonction U qui prend u_0 et n en argument et qui renvoie la liste des termes $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$.
2. En supposant que la suite (u_n) converge, montrer que sa limite vaut 1.
3. Tester la fonction $U(a, 10)$ pour différentes valeurs de $a > 0$.
   Que conjecturer sur le sens de variation et la convergence de u_n?
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 2,\ u_{n+1} \leqslant u_n$. Prouver alors la conjecture émise à la question précédente concernant la convergence de la suite (u_n).
5. On suppose ici $u_0 > 1$.
   a. Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n < u_0$.
   b. Écrire en Python une fonction f renvoyant le plus petit N_0 tel que $u_{N_0} < u_0$.
6. On cherche à exprimer u_n sous la forme $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec a, b réels.
   a. Montrer que si a et b existent alors $a = \lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n - 1)$ et $b = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(u_n - 1 - \dfrac{a}{n}\right)$.
   b. On définit pour tout n, $v_n = n(u_n - 1)$.
   Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe un entier naturel p tel que $v_{n+1} = u_p$.
   En déduire alors l'existence et la valeur de a.
   c. Prouvez de même l'existence de b et donner sa valeur .
7. On pose, pour tout entier naturel n, $z_n = n!\,u_n$.
   a. Montrer que : $\forall n \geqslant 0 \quad z_{n+1} - z_n = (n+1)!$.
   En déduire l'expression de z_n sous forme de somme.
   b. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k!$ est équivalent à $n!$
   c. Retrouver alors la convergence de la suite (u_n) et la valeur de sa limite.

Corrigé

Planche 70
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Résoudre $\cos(x) = \cos(a)$, a étant un réel donné.

Exercice.
On considère un groupe de n personnes, chacune ayant la probabilité p d'être malade. On réalise des tests sanguins pour savoir si ces personnes sont malades.
Pour cela, on fait un mélange avec la moitié de chacun des n échantillons et on réalise un test sur le mélange. S'il est positif, alors on réalise un test individuel sur chaque moitié d'échantillon restante ; sinon, on s'arrête là.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués .

1. a. Trouver le support, la loi et l'espérance de X.
   b. Montrer que cette méthode de tests est rentable 'en moyenne' si et seulement si $p < p_n$, où $p_n = 1 - (1/n)^{1/n}$.
   c. Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Cette fois-ci, on réalise des groupes de m personnes (m divise n) . On effectue le test comme précédemment sur chaque groupe; s'il est positif, on réalise ensuite le test pour chaque membre du groupe.

   On appelle Z le nombre de groupes dont le test est positif .

   a. Donner la loi de Z.
   b. Exprimer X en fonction de Z et en déduire $E(X) = \dfrac{n}{m} + n\,(1 - (1-p)^m)$.
   c. Grâce à l'outil informatique, trouver la valeur de m qui minimise cette espérance pour $p = 0.01$ et $n = 25$.
   d. On pose $u_m = \dfrac{1}{m} - (1-p)^m$. Montrer que pour tout $m \geqslant 1$, $\dfrac{1}{2^{m-1}} \leqslant \dfrac{1}{m}$.

      En déduire que si $p > \dfrac{3}{4}$ la suite (u_m) est décroissante.

Corrigé

Planche 71
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Donner le rapport entre la matrice d'un vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}_2$ et la matrice de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}_1$, sachant que l'on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

Exercice.
Une certaine sorte de vache produit entre 1 et n litres de lait par jour (nombre entier de litres), de manière équiprobable. On considère une vache donnée. On note X_k le nombre de litres produits par la vache le jour k, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, et T_n la variable aléatoire égale au nombre de jours au bout desquels on a obtenu n litres de lait.
On rappelle la formule du triangle de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

1. a. Écrire une fonction Python simulant T_n.
   b. Écrire une fonction Python renvoyant une valeur approchée de l'espérance de T_n.
   c. Faire une conjecture sur la valeur de l'espérance de T_n lorsque n est grand.
2. a. Rappeler la loi de X_k et son espérance.
   b. Donner $S_k(\Omega)$.
   c. Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.
   d. Vérifier que, si $k \leqslant n$, $\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$.
   e. Par récurrence sur k, montrer que pour tous $k \in [\![1, n]\!]$ et i tels que $k \leqslant i \leqslant n$, $\mathbb{P}(S_k = i) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{i-1}{k-1}$.
3. a. Donner $T_n(\Omega)$.
   b. Montrer que $\mathbb{P}(T_n > k) = \mathbb{P}(S_k < n) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k}$
   c. En déduire $\mathbb{P}(T_n = k)$.
   d. On admet que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T_n > k)$.
   Calculer l'espérance de T_n. et en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Planche 72
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Qu'est-ce qu'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$?

Exercice.
On étudie la dissolution d'une pastille de chlore dans une piscine. On note T le temps qu'elle met pour se dissoudre, et on fait les hypothèses suivantes :

- $\mathbb{P}(T > 0) = 1$
- Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\mathbb{P}(t < T \leqslant t + h \mid T > t) \underset{h \to 0^+}{\sim} \lambda h$, où λ est un réel strictement positif donné.

1. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que Y suit loi uniforme sur $[0; 1[$ et $X = -\dfrac{\ln(1 - Y)}{\lambda}$.
   a. Donner la fonction de répartition de X.
   b. Montrer que X suit une loi exponentielle et donner son paramètre.
   c. Écrire une fonction Python simulant X pour λ donné.
2. Soit F la fonction de répartition de T.
   Que vaut F sur $] - \infty; 0]$? Montrer que F est continue à droite en 0.
3. Montrer que $\dfrac{F(t + h) - F(t)}{h} \underset{h \to 0^+}{\sim} \lambda - \lambda F(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
4. En déduire que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que F vérifie une équation différentielle de la forme $y' + \lambda y = \lambda$ sur $[0, +\infty[$.
5. Donner la fonction de répartition de T.
6. Donner la loi de T ainsi que son espérance et sa variance.

Corrigé

Planche 73
Agro-Veto 2018

Question de cours.
Donner la définition de vecteurs colinéaires.

Exercice.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

1. a. Rappeler $\mathbb{E}(X^k)$ pour k appartenant à $\{0, 1, 2\}$.
   b. La fonction **normal** de la librairie `numpy.random` permet de simuler une loi normale centrée réduite.
   Ainsi, si on importe via la commande `from numpy.random import normal`, alors l'instruction `u = normal()` affecte à u une valeur aléatoire, en suivant une loi normale centrée réduite.
   À l'aide de simulations en Python, donner une valeur approchée de $\mathbb{E}(X^k)$.
   c. Montrer que $\mathbb{E}(X^k) = (k-1)\mathbb{E}(X^{k-2})$
   d. À l'aide de la formule précédente, écrire une fonction Python de paramètre k qui renvoie la valeur exacte de $\mathbb{E}(X^k)$.
   e. Calculer $\mathbb{E}(X^{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   f. Calculer $\mathbb{E}(X^{2n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite (u_n) où $u_n = \ln(\mathbb{E}(X^{2n}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Calculer $u_n - u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   La suite (u_n) peut-elle converger?
   b. Écrire une fonction Python utilisant le résultat de la question 2.a et renvoyant la valeur de $\dfrac{u_n}{n \ln n}$.
   Cette suite semble-t-elle converger ?
   c. Montrer que :
   $$\forall k \geqslant 2, \int_{k-1}^{k} \ln(2t-1)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(2k-1) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(2t-1)\,\mathrm{d}t.$$
   d. À l'aide de sommations, en déduire que u_n est équivalent à $n \ln n$ au voisinage de $+\infty$.

Corrigé

Planche 74
Agro-Veto 2017

Question de cours.
Donner la loi de probabilité de la loi géométrique de paramètre p, son espérance et sa variance.

Exercice.
Trois joueurs A, B et C participent à un tournoi qui consiste en une succession de manches ne faisant intervenir que deux des joueurs et se déroule de la façon suivante :

- À chaque manche, chacun des deux protagonistes a la même probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner.
- Un joueur gagne le tournoi si et seulement s'il gagne deux manches de suite, et alors le tournoi prend fin.
- A et B s'affrontent lors de la première manche ; le gagnant de cette manche affronte alors C pour une deuxième manche. Si le tournoi n'est pas alors terminé, le gagnant de cette deuxième manche reste en lice et affronte celui qui avait été éliminé lors de la première manche.
- Et ainsi de suite... Après chaque manche, il y a donc soit un vainqueur du tournoi, soit le gagnant de la manche affronte celui qui n'y avait pas participé.

On note X le nombre de manches nécessaires pour terminer le tournoi, et pour tout entier naturel non nul i, A_i l'événement "A gagne la manche numéro i". On note également G_A : "A gagne le tournoi". On utilise des notations semblables pour B et C.

1. Faire un programme pour simuler un tournoi, qui renvoie le joueur gagnant et le nombre de manches jouées.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 3)$.
3. Pour tout $i \geqslant 2$, on note E_i : 'le joueur entrant à la manche i gagne cette manche'.
   a. Exprimer $[X > 3]$ en fonction de $[X > 2]$ et E_3. En déduire $\mathbb{P}(X > 3)$.
   b. Soit $k \geqslant 3$. Exprimer $[X > k]$ en fonction de $[X > 2]$ et des E_i.
   En déduire $\mathbb{P}(X > k)$, puis $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \geqslant 2$.
   c. Vérifier que X est bien une variable aléatoire.
   d. Étudier l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. *On pourra s'aider de la loi de $X - 1$.*
4. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(G_{A_i})$ que le joueur A remporte le tournoi à l'issue de la $i$ème manche pour i variant de 1 à 6, de même pour B et C . (On pourra s'aider d'un arbre.)

   Pour alléger les notations, on s'autorise à ne pas noter certains signes $\cap$. Ainsi, $A_1 \cap B_2 \cap C_3$ pourra être noté plus simplement $A_1B_2C_3$.
5. Montrer que $G_A \cap B_1 = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\bigcap_{i=0}^{n} B_{3i+1}C_{3i+2}A_{3i+3} \right) \cap A_{3n+4} \right)$. En déduire $\mathbb{P}\left(G_A \cap B_1\right)$.
6. Montrer que $G_A \cap A_1 = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_{3i+1}C_{3i+2}B_{3i+3} \right) \cap A_{3n+4}A_{3n+5} \right) \cup A_1A_2$. En déduire $\mathbb{P}\left(G_A \cap A_1\right)$.
7. Déduire des questions précédentes $\mathbb{P}(G_A)$, puis $\mathbb{P}(G_B)$, puis $\mathbb{P}(G_C)$

Corrigé

Planche 75
Agro-Véto 2018

Question de cours.

Qu'appelle-t-on *racine* d'un polynôme ?

Qu'appelle-t-on *ordre de multiplicité* d'une racine d'un polynôme ?

Exercice.

On considère l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre, ainsi que l'ensemble :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix},\ (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. À l'aide d'un programme Python, déterminer la plus petite valeur propre parmi les matrices de F dont les coefficients sont égaux à 0 ou 1.

   On pourra par exemple utiliser la fonction `numpy.linalg.eig` *comme le montre l'exemple suivant :*

   ```
   import numpy.linalg as la
   vap, vep = la.eig([[1,2],[3,4]])
   ```

   Après cette suite d'instructions, la variable `vap` *contient la liste des valeurs propres de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et la variable* `vep` *est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de cette matrice.*

2. a. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   b. Donner une base de $E \cap F$.

3. a. Montrer que $A \in E \cap F$.

   b. Montrer que A est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale vérifiant $A = PD\,{}^tP$ où ${}^tP$ est la matrice transposée de P.

4. Vérifier que ${}^tPMP$ est diagonale pour toute matrice $M \in E \cap F$.

5. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le spectre de $M = \begin{pmatrix} y+z & y & x \\ y & x+z & y \\ x & y & y+z \end{pmatrix}$.

Corrigé

Planche 76
Agro-Véto 2018

Question de cours.
Donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Exercice.
On rappelle que dans le package `numpy`*, la commande* `numpy.transpose(A)` *donne la transposée de* `A`*, la commande* `numpy.linalg.eigh(A)` *donne les valeurs propres et les vecteurs propres éventuels de A et la commande* `numpy.eye(n,n)` *crée la matrice I_n et la commande* `numpy.ones((n,n))` *crée la matrice de taille $n \times n$ ne comportant que des 1.*
Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant n$. On considère une matrice $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = J_n + (k-1)I_n$ avec :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire un programme Python permettant de déterminer, suivant la valeur de n, les valeurs propres de la matrice M^2, ses vecteurs propres et qui permet de vérifier les résultats obtenus. On étudiera, en particulier, le cas $n = 3$ et $k = 2$.
2. a. Déterminer, dans le cas général, le rang de J_n.
   b. Étudier les valeurs propres éventuelles de J_n et donner la dimension de ses sous-espaces propres.
   c. Justifier, de deux façons différentes, que J_n est diagonalisable.
3. a. Justifier que M^2 est également diagonalisable.
   b. Déterminer les valeurs propres de M^2 et donner la dimension de ses sous-espaces propres.
4. Déterminer les valeurs propres possibles pour M.

On considère un réseau social comportant n personnes, et tel que chaque couple de deux personnes distinctes ont exactement un ami en commun et que chaque personne a exactement k amis, avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Une personne n'est pas amie avec elle-même. On numérote les personnes de 1 à n.
On désigne par $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(R)$ la matrice telle que $A_{i,j} = 1$ si les personnes i et j sont amies et $A_{i,j} = 0$ sinon.

5. Déterminer un exemple de réseau vérifiant les hypothèses pour $n = 3$.
6. Justifier que A est symétrique.

On admet, que le coefficient $(A^2)_{i,j}$ avec $i \neq j$, donne le nombre de fois où la personne i a un ami en commun avec la personne j. On admet également que $(A^2)_{i,i}$ donne le nombre d'amis de la personne i.

7. Donner une expression de la matrice A^2.
8. a. Donner le nombre de couples comportant deux personnes distinctes du réseau.
   b. Pour une personne donnée, déterminer le nombre de couples de deux personnes distinctes dont elle est un ami en commun.
   c. En déduire la relation $k^2 - k + 1 = n$.
9. a. En déduire les valeurs propres éventuelles de A.
   b. On sait que $\displaystyle\sum_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)} n_i \lambda_i = 0$ où n_i est la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i.
   Montrer que $n = 3$.

Corrigé

Planche 77
Agro-Véto 2018

Question de cours.

Densité de la loi normale centrée réduite.

Exercice.

On pourra utiliser pour les programmes Python la fonction `linalg.matrix_rank()` *du module* `numpy`*, qui permet de connaitre le rang d'une matrice, comme le montre l'exemple suivant :*

```
import numpy as np
A = np.array( [ [1,2,1] , [2,3,2] , [3,5,3] ] )
print( np.linalg.matrix_rank(A) )
```

La dernière ligne affiche le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$*, i.e. 2.*

On pourra aussi utiliser la fonction `randint()` *du module* `random`*. Pour a et b deux entiers,* `randint(a,b)` *renvoie un entier équiprobablement choisi entre a et b (a et b étant inclus).*

1. a. Écrire une fonction en Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'ils sont colinéaires (*on pourra représenter les vecteurs par des listes*).

   b. Écrire une fonction en Python `vecteurs_propres` prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est un vecteur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. a. Vérifier que -1, 1 et 2 sont valeurs propres de A et préciser pour chacune un vecteur propre associé.

   b. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

   On note : $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n^* = \dfrac{M_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

   a. Donner, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'approximation de la probabilité $\mathbb{P}(-\alpha < M_n^* < \alpha)$ donnée par le théorème central limite.

   b. En déduire que $\left[M_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, M_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au seuil de 95%.

   On pourra admettre que, pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ et si Φ désigne la fonction de répartition d'une variable suivant la loi normale centrée réduite, alors $\Phi(1,96) \approx 0,975$.

4. On note N_V le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers de $[\![-5,5]\!]$.

   a. Expliquer comment le programme suivant permet d'estimer la valeur de N_V.

```
def simul ():
    u = [randint(-5,5) for k in range(3)]
    return vecteurs_propres(u)
n = 10000 # Valeur de n à définir.
nb = 0
for k in range(n):
    if simul ():
        nb += 1
print(round(nb/n*11**3)) # round(x) = l'entier le plus proche de x.
```

   b. Comment choisir n pour que l'on soit sûr à 95% de la valeur affichée ?

   c. Commenter le résultat obtenu.

Corrigé

Planche 78
Agro-Véto 2018

Question de cours.
Donner la définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice.
Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation $(E_n) : \dfrac{\ln^2(x)}{x} = \dfrac{1}{n}$ où n est un entier naturel non nul, et l'inconnue x un nombre réel strictement positif. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}.$$

1. a. Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.
   b. En déduire que (E_1) n'admet pas de solution.
   c. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation (E_n) admet deux solutions, que l'on notera α_n et β_n, telles que :
   $$1 \leqslant \alpha_n \leqslant e^2 \leqslant \beta_n.$$
2. À l'aide de l'outil informatique, représenter sur un même graphe la courbe représentative de f ainsi que les droites D_i d'équation $y = \dfrac{1}{i}$ pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$.
3. Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variations et sur les limites des suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$?
4. On s'intéresse dans cette question à la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$.
   a. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement monotone.
   b. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ admet une limite qu'on précisera.
   c. Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{\beta_n}{n}$.
   On admet que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$. Prouver alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$.
   d. En déduire un équivalent de $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$.
5. On s'intéresse dans cette question à la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$.
   a. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ admet une limite qu'on précisera.
   b. Donner un équivalent de $\alpha_n - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   Comment pourrait-on vérifier ce résultat avec l'outil informatique ?

Corrigé

Planche 79
Agro-Véto 2018

Question de cours.
Définition de la notion d'indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.

Exercice.
Soit x un réel de l'intervalle $[0,1[$ fixé. On définit les suites $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$, $(g_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(h_n(x))_{n\geqslant 1}$ par :

$$f_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^k\right),\ g_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-x^{2k-1}\right)\text{ et } h_n(x)=f_n(x)g_n(x).$$

On pose, sous réserve d'existence, $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$ et $h(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x)$.

1. Écrire un script Python qui affiche dans un repère les points de coordonnées $(f_n(x), g_n(x))$ lorsque x prend les valeurs $\dfrac{k}{100}$ avec $k\in\{0,\dots,80\}$ et $n=100$. Faire une conjecture d'une relation simple entre $f(x)$ et $g(x)$ en admettant leurs existences.

2. Montrer que pour tout $x\in[0,1[$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(g_n(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

3. a. Établir que : $\forall t\in\mathbb{R},\ 1+t\leqslant e^t$.
   En déduire que, pour tout $x\in[0,1[$, $f(x)$ existe et vérifie $1\leqslant f(x)\leqslant \exp\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.
   b. Montrer que la fonction f est continue en 0.

4. a. Justifier l'existence de $g(x)$ pour tout $x\in[0,1[$.
   b. Montrer que pour tout $t\in[0,1[$ et $x\in[0,1[$, $1-(1-x)^t\geqslant xt$.
   On pourra étudier une fonction de x ou utiliser la formule des accroissements finis.
   c. En déduire l'encadrement suivant, pour tout $x\in[0,1[$:
   $$\exp\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}\right)\leqslant g(x)\leqslant \exp\left(-\frac{x}{1-x^2}\right),$$
   puis la continuité de g en 0.
   d. Montrer que, pour tout $x\in[0,1[$, $f_n(x^2)g_n(x^2)=f_{2n}(x)g_n(x)$.
   En déduire que $h(x^2)=h(x)$.
   e. Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, on a : $h\left(x^{2^n}\right)=h(x)$.
   Conclure alors que pour tout $x\in[0,1[$, $h(x)=1$.
   f. Ce résultat confirme-t-il votre conjecture ?

Corrigé

Planche 80
Agro-Véto 2018

Question de cours.
Énoncer la loi faible des grands nombres.

Exercice.
Rappel : algorithme de dichotomie.
On considère une fonction g continue et monotone sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α.
On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- *Pour tout entier naturel k, on note* $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et :

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (a_k, c_k) & \textit{si } g(a_k)g(c_k) \leqslant 0 \\ (c_k, b_k) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers α.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α.
2. En utilisant des valeurs approchées de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ à l'aide de Python, justifier que $\dfrac{1}{3} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier n, deux réels a et b et la fonction f, et qui renvoie α à 10^{-n} près.
4. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que Φ est une densité de probabilité.
5. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
6. Montrer que pour tout $t > \alpha$, $f'(t) = t\Phi(t) - \dfrac{1}{t^2}$.
7. Soit X une variable aléatoire admettant Φ pour densité. Calculer l'espérance de X de deux manières différentes et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs.

Corrigé

Planche 81
Agro-Véto 2018

Question de cours.

Pour $|q| < 1$, donner l'expression des sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$.

Exercice.

On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes admettant respectivement les densités f et g, alors la variable aléatoire $U+V$ admet une densité $f \star g$ définie par : $(f \star g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Justifier l'existence, puis déterminer une densité f de la variable aléatoire U^2, ainsi qu'une densité de V^2.

2. On considère la variable aléatoire $Z = U^2 + V^2$. Justifier que Z admet une densité de probabilité, notée h.

3. Écrire un programme permettant du simuler la variable aléatoire Z et d'estimer $\mathbb{P}(Z \leqslant 1)$.

4. a. Montrer que, pour tout $x \in]0,1]$, $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

   b. Montrer que, pour tout $x \in]0,1]$, $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$.

   c. Montrer que, pour tout $x \in]0,1]$, $h(x) = \dfrac{\pi}{4}$. *On pourra utiliser le changement de variable $y = \sin^2 u$.*

   d. Interpréter graphiquement le résultat en termes d'aire.

5. On considère une suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\pi}{4}$ et on note $S_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

   a. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer en fonction de n et ε une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|S_n - \dfrac{\pi}{4}\right| \geqslant \varepsilon\right)$.

   b. En déduire à partir de quelle valeur de n il est possible de définir un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de $\dfrac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2}.

   c. À l'aide de la simulation précédente, déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de $\dfrac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2}.

6. Existe-t-il d'autres alternatives pour déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de $\dfrac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2} ?

Corrigé

Planche 82
Agro-Véto 2018

Question de cours.
Énoncer le théorème de Rolle.

Exercice.
Une urne contient initialement deux boules blanches et deux boules noires. Soit c un entier naturel. On effectue une série de tirages en suivant le protocole suivant :

- On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche, on arrête là. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on rajoute encore c boules noires dans l'urne.
- On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche (si on finit par obtenir une boule blanche), ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : “Les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires”. Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche et égale à 0 sinon.

1. Que dire de la loi de X si $c = 0$? Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$ en fonction de c pour c quelconque.
2. a. Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument la valeur de c et un entier naturel s. Cette fonction doit simuler l'expérience ci-dessus, avec un nombre maximal de tirages égal à s. Elle doit renvoyer le rang d'apparition d'une boule blanche si une boule blanche a été obtenue et 0 sinon.
   b. Utiliser la fonction précédente pour simuler un grand nombre de fois l'expérience pour donner une estimation de $\mathbb{P}(X = 0)$ pour $c = 1,\ c = 2$ et $c = 5$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+kc}{4+kc}$.
4. On suppose dans cette question que $c = 1$.
   a. Calculer la valeur de $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
   b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.
   c. En utilisant le théorème du transfert, démontrer que la variable aléatoire $X + 3$ admet une espérance et calculer cette espérance. En déduire l'espérance de X.
   d. Utiliser la fonction de la question 2(a) pour vérifier ce résultat à l'aide de simulations.
5. On suppose dans cette question que $c = 2$.
   a. Calculer la valeur de $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
   b. Donner la loi de X. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
6. Dans cette question, c est un entier naturel quelconque.
   a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\ln(\mathbb{P}(E_n)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{2}{2+kc}\right)$.
   b. Déterminer alors la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
   On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

Corrigé

Planche 83
Agro-Véto 2018

Question de cours.
Définition d'une matrice carré inversible.

Exercice.
On s'intéresse à l'évolution d'une population de bactéries procaryotes dans un écosystème donné répondant au modèle suivant. L'évolution est supposée réalisée par étapes successives, suivant chacune le même fonctionnement ; à chaque étape donnée, chaque bactérie, indépendamment des autres peut :

- soit donner lieu à une fission binaire, et se diviser en deux bactéries identiques indépendantes, ceci avec une probabilité $\dfrac{2}{3}$;
- soit mourir et se désintégrer avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$.

On appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de bactéries présentes après la n-ème étape. Au départ, il n'y a qu'une seule bactérie dans l'écosystème, et on note $X_0 = 1$.

1. Donner la loi et l'espérance de X_1.
2. a. Pour $n \geqslant 1$, justifier que X_n ne prend que des valeurs paires. Expliciter $X_n(\Omega)$.
   b. Écrire un programme informatique prenant en argument la valeur de n et renvoyant une simulation de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
   c. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $2i \in X_n(\Omega)$. Donner la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 2i]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction G_n par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} x^k P(X_n = k) \quad (\textit{avec la convention } 0^0 = 1).$$
   On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_{n+1} = G_n \circ G_1 = G_1 \circ G_n$.
   a. Donner les valeurs de $G_n(1)$ et $G_n'(1)$.
   b. En déduire une relation entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$.
   c. Calculer alors l'espérance de X_n en fonction de n.
4. On note $u_n = P(X_n = 0)$ pour tout entier naturel n non nul, et R l'événement "la population de bactéries finit par s'éteindre".
   a. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ G_{n+1}(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(G_n(x)\right)^2.$$
   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}u_n^2$.
   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à déterminer.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note D_n l'événement "la population disparait exactement à l'issue de l'étape n".
   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(D_n) = u_n - u_{n-1}$.
   b. En remarquant que $R = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$, déterminer la probabilité que la population s'éteigne.

Corrigé

Planche 84
Agro-Véto 2017

Soit t un réel positif ou nul. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_t(x) = x^3 + tx - 1$.

1. Montrer que le polynôme P_t admet une unique racine réelle $u(t)$.
2. On note u l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui, à tout réel positif t associe $u(t)$.

   a. Montrer que $u(\mathbb{R}_+) \subset]0,1]$.

   b. Démontrer que la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

   c. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$.
   Indication : utiliser l'expression de $P_t(u(t))$.

   d. Montrer que l'application u est bijective, de réciproque :

$$v : \begin{array}{ccc}]0,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \dfrac{1-y^3}{y}. \end{array}$$

   e. Représenter graphiquement grâce au langage `Python` la fonction v sur $]0,1]$.
   En déduire le tracé de représentation graphique de la fonction u.

   f. Justifier que la fonction u est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   g. Démontrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer une expression de $u'(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$ et $u(t)$.

Corrigé

Planche 85
Agro-Véto 2017

On définit la fonction numérique sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. a. Proposer une fonction Python prenant en argument un réel $x > 0$ et renvoyant une approximation de $f(x)$.
   b. Proposer une approximation du graphe de la fonction f à l'aide de l'outil informatique.
   Conjecturer un résultat sur la monotonie de la fonction f et sur ses limites au bord de son domaine de définition.
2. Soient x et x' dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < x'$. Déterminer le signe de $f(x) - f(x')$. En déduire que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Justifier que f admet une limite finie en $+\infty$. *On ne demande pas de calculer cette limite à ce stade.*
4. Dans cette question, on cherche à justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.
   a. Montrer que :
   $$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[,\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}.$$
   b. En déduire que f est continue en x_0.
5. Montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout réel x strictement positif, $\dfrac{A}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{A}{x}$.
   Ce résultat est-il cohérent avec le graphe de f ? En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.
6. Le but de cette question est de déterminer un équivalent simple de f en 0.
   a. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$
   Établir que g est une fonction bornée en admettant l'inégalité suivante :
   $$\forall t \in [0,1],\ |\cos(t) - 1| \leqslant \frac{t^2}{2}.$$
   b. En déduire un équivalent simple de f en 0.

Corrigé

Planche 86
Agro-Véto 2017

1. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels non nuls.

   Écrire une fonction Python qui renvoie `True` si $a_i^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2} \geqslant 2$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et `False` sinon. La fonction aura pour seul paramètre une liste contenant les réels $a_1, \dots, a_n$.

2. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = \sqrt{2}(0, 1, 0)$ et $\vec{w} = \sqrt{2}(0, 0, 1)$ et $\mathbb{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ admettant pour équation dans la base canonique $y - z = 0$.

   Déterminer les projetés orthogonaux des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sur le plan $\mathbb{P}$ et vérifier qu'ils ont la même norme.

3. Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et a_1, a_2 et a_3 trois réels tous non nuls.

   On suppose qu'il existe un plan $\mathbb{P}$ tel que les projetés orthogonaux des vecteurs $a_1\vec{e_1}$, $a_2\vec{e_2}$ et $a_3\vec{e_3}$ aient tous la même norme qu'on notera d.

   On considère $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})$ une base orthonormée de $\mathbb{P}$ et $\vec{\varepsilon_3}$ un vecteur normal à $\mathbb{P}$ de norme 1.

   On note p la projection orthogonale sur le plan $\mathbb{P}$.

   a. Donner une expression de $p(\vec{e_i})$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ à l'aide des vecteurs $\vec{\varepsilon_1}$ et $\vec{\varepsilon_2}$.

   b. Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a :
   $$\langle \vec{e_i}, \vec{\varepsilon_1} \rangle^2 + \langle \vec{e_i}, \vec{\varepsilon_2} \rangle^2 = \left(\frac{d}{a_i}\right)^2.$$

   c. Montrer que :
   $$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2} = \frac{2}{d^2}.$$

   d. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer que $|a_i| \geqslant d$ puis que :
   $$a_i^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{a_k^2} \geqslant 2.$$

Corrigé

Planche 87
Agro-Véto 2017

Un joueur dispose de N dés équilibrés à six faces. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de 6 obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de dés obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1,\ X_2,\ \ldots$ S'il ne reste plus de dés au m-ème lancer, on a alors, pour tout $k \geqslant m,\ X_k = 0$. Pour tout entier naturel non nul n, on définit la variable $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ qui correspond alors au nombre de 6 obtenus après n lancers.

1. Écrire en Python une fonction `X(N)` qui prend en argument le nombre de dés N et renvoie la valeur[1] de X_1.

2. En déduire une fonction Python `S(N,n)` qui prend en arguments les nombres de dés N et le nombre n de lancers effectués, et renvoie la valeur[2] de S_n.

3. On se propose de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n et on cherchera à déterminer p_n.

   a. **Question préliminaire :** Soient N, M et k des entiers tels que $M \leqslant k \leqslant N$. Montrer que :
   $$\binom{N}{M}\binom{N-M}{k-M} = \binom{N}{k}\binom{k}{M}.$$

   b. Montrer que la proposition est vérifie pour $n = 1$ et déterminer p_1.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n.

      (i) Soient M et k deux entiers naturels tels que $M \leqslant k \leqslant N$. Déterminer $P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M)$.

      (ii) En déduire que S_{n+1} suit une loi binomiale de paramètres N et p_{n+1} où $p_{n+1} = \dfrac{1+5p_n}{6}$.

   d. Déterminer une expression explicite de p_n.

4. On admet qu'il est presque-sûr qu'on obtienne tous les 6 au bout d'un nombre fini de lancers, c'est-à-dire qu'il existe presque-sûrement un rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $S_n = N$.

   On note T le nombre de lancers nécessaires pour n'avoir que des 6 (on pose par convention $T = +\infty$ si on n'obtient jamais tous les 6, ce qui a une probabilité nulle d'arriver), c'est-à-dire :
   $$T = \min\left(\{n \geqslant 1 \mid S_n = N\} \cup \{+\infty\}\right).$$

   Déterminer la fonction de répartition de T.

5. Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci.

   On admettra le résultat suivant : T admet une espérance si la série $\sum P(T > n)$ est convergente et dans ce cas $E(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n)$.

Corrigé

[1] Le sujet aurait du écrire : "simule la réalisation de la variable X_1".
[2] Même remarque.

Planche 88
Agro-Véto 2017

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E associé, défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3.$$

1. Écrire en `Python` une fonction `f_a(x, y, z, a)` qui renvoie les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de l'image $f_a(u)$ par l'application f_a du vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$.

2. a. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f_a$.

   b. Montrer que $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\operatorname{Ker} f_a$.

3. Écrire la matrice A de f_a relativement à la base $\mathcal{B}$ et calculer A^2. En déduire $f_a \circ f_a$.

4. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$.

   a. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E.

   b. Déterminer la matrice A' de f_a dans cette base.

   c. En déduire que 0 est la seule valeur propre de A. La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ?

5. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI_3$, où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathcal{R})$.

   a. Justifier que la matrice $B(x)$ est inversible pour tout x non nul.

   b. Exprimer $(A - xI_3)(A + xI_3)$ puis $(B(x))^{-1}$ en fonction de x, I_3 et A.

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $(B(x))^n$ en fonction de x, n, I_3 et A.

Corrigé

Planche 89
Agro-Véto 2017

Soit $\varepsilon \geqslant 0$.
On dit qu'un couple de variables aléatoires (X, Y) est un couple ε-différentiel si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$e^{-\varepsilon} P(X \in I) \leqslant P(Y \in I) \leqslant e^{\varepsilon} P(X \in I).$$

Intuitivement, les lois de X et Y seront d'autant plus proches que le plus petit ε tel que (X, Y) soit un couple ε-différentiel est proche de 0.

1. Soient X et Y deux variables à densité, de densités respectives f et g, et de fonction de répartition F et G.
   a. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-\varepsilon} f(t) \leqslant g(t) \leqslant e^{\varepsilon} f(t)$.
   Montrer que le couple (X, Y) est ε-différentiel.
   b. On suppose que (X, Y) est ε-différentiel. Soit $t \in \mathbb{R}$ où f et g sont continues et soit $h > 0$.
   Montrer que :
   $$e^{-\varepsilon}(F(t+h) - F(t)) \leqslant G(t+h) - G(t) \leqslant e^{\varepsilon}(F(t+h) - F(t)).$$
   En conclure que $e^{-\varepsilon} f(t) \leqslant g(t) \leqslant e^{\varepsilon} f(t)$.
2. **Un exemple : les lois de Laplace $\mathcal{L}(a, b)$.**
   On définit, pour $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, la fonction $f_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{a,b}(t) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|t-a|}{b}\right).$$
   a. Montrer que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.
   b. Établir que si X suit la loi $\mathcal{L}(a, b)$, i.e. $f_{a,b}$ est une densité de X, alors $E(X) = a$.
   c. Montrer que si X suit la loi $\mathcal{L}(a, b)$ et Y la loi $\mathcal{L}(a', b)$, alors (X, Y) est $\dfrac{|a-a'|}{b}$-différentiel.
3. **Simulation informatique d'une loi de Laplace**
   a. On suppose que V suit la loi exponentielle de paramètre 1, U la loi uniforme discrète sur $\{-1; 1\}$ et que U et V sont indépendantes. Montrer que $a + bUV$ suit la loi $\mathcal{L}(a, b)$.
   b. En déduire une fonction Python `laplace(a,b)` qui renvoie une valeur aléatoire distribuée suivant la loi $\mathcal{L}(a, b)$.

Corrigé

Planche 90
Agro-Véto 2017

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $u_1 \in]0,\pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin(u_n)$.

1. Montrer, pour tout $n \geqslant 3$, que $0 < u_n < \dfrac{\pi}{2}$.
2. Déterminer le seul réel vers lequel la suite (u_n) peut converger.
3. Représenter graphiquement u_n en fonction de n pour plusieurs valeurs de u_1, puis émettre une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer que s'il existe un entier $n_0 \geqslant 4$ tel que $u_{n_0} \leqslant u_{n_0-1}$ alors la suite décroit à partir du rang n_0.
   Pour cela, on pourra utiliser une expression de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *en fonction de* u_n *et* u_{n-1}.
5. Est-il possible que, pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n > u_{n-1}$?
6. Conclure en établissant la convergence de (u_n).
7. Émettre une conjecture sur la limite de $\sqrt{n}u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
8. En posant, pour $n \geqslant 1$, $x_n = \dfrac{u_n}{n}$, montrer que $x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{n^2}{6}x_n^3$ puis que $\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{3}$.
9. En admettant que le résultat précédent permet d'établir que :
$$\frac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3},$$
   vérifier la conjecture faite à la question 7.

Corrigé

Planche 91
Agro-Véto 2017

Soit N un entier supérieur ou égal à 3.

Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, une par une et sans remise les N boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la seconde fois, une boule noire.

1. Dans le cas où $N = 10$, simuler informatiquement une expérience et afficher les valeurs prises par X_1 et X_2.

   On rappelle à cet effet que la fonction `random` de la bibliothèque Python `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.

2. Soient i et j deux entiers de l'ensemble $[\![1, N]\!]$. Montrer que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N. \end{cases}$$

3. a. Justifier que les lois de X_1 et X_2 sont données par :

$$\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ P(X_1 = k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, N]\!],\ P(X_2 = k) = \frac{2(k-1)}{N(N-1)}.$$

   b. Ces variables sont-elles indépendantes ?

4. Démontrer que la variable $N + 1 - X_2$ a la même loi que X_1.

5. On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, N]\!]$ et on désigne par D l'événement : ‘à ne prend pas la même valeur que B”.

   a. Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\dfrac{N-1}{N}$.

   b. On définit les variables aléatoires $Y_1 = \min(A, B)$ et $Y_2 = \max(A, B)$.
   Calculer, pour tout $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$, la probabilité conditionnelle $P_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j])$.

   c. Expliquer pourquoi le programme suivant permet de simuler des variables aléatoires qui suivent les mêmes lois que X_1 et X_2 dans le cas où $N = 10$.

```
from random import *
a = randint(1,10)
b = randint(1,10)
while a == b:
    b = randint(1,10)
print(min(a,b))
print(max(a,b))
```

Corrigé

Planche 92
Agro-Véto 2017

Soit $x \in [-1,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n(x) = \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t, \quad J_n(x) = \int_0^x \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad J(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

1. Calculer $J(x)$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $I_k(x)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n(x)$ est bien défini puis que :
$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$
4. Écrire une fonction `Jn` en Python qui prend en argument un réel $x \in [-1,1]$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoie la valeur de $J_n(x)$.
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1],\ |J(x) - J_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$
6. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n(x)$.
7. À l'aide de Python, proposer une fonction qui prend en argument un réel $x \in [-1,1]$ et qui renvoie une valeur approchée de $J(x)$ à 10^{-4} près, sans utiliser de la fonction `atan` dans une bibliothèque.
8. Le résultat reste-t-il vrai lorsque $x \notin [-1,1]$?

Corrigé

Planche 93
Agro-Véto 2017

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par ses trois premiers termes réels $u_0,\ u_1$ et u_2 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2}).$$

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Écrire une fonction en Python prenant en argument les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et renvoyant la liste de ses n premiers termes. Utiliser cette fonction pour étudier le comportement asymptotique de la suite sur quelques exemples.

2. Démontrer que 0 n'est pas valeur propre de A.

3. Démontrer que, pour tout nombre complexe λ, λ est valeur propre de A si, et seulement si λ est solution de l'équation $x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.

4. Démontrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, un nombre complexe z de module strictement plus petit que 1, tels que :
$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5. Pour tout entier naturel n, exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n et en déduire une expression de X_n en fonction de $n,\ A$ et X_0.

6. Démontrer alors qu'il existe trois nombres complexes $a,\ b$ et c (qu'on ne demande pas d'expliciter) tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + bz^n + c\overline{z}^n.$$

7. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |bz^n + c\overline{z}^n| = 0$.

   Que peut-on alors dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(bz^n + c\overline{z}^n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(bz^n + c\overline{z}^n)$?

8. En déduire que $a \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Corrigé

Planche 94
Agro-Véto 2017

On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g, alors $X+Y$ est une variable à densité, dont une densité h est donnée par le produit de convolution :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Dans cette question, on note $Z = X_1 + X_2$.
   a. Déterminer à l'aide de Python une valeur approchée de $P(Z \leqslant 1)$.
   b. Montrer que $P(X_1 \leqslant X_2) + P(X_2 \leqslant X_1) = 1$.
   c. Montrer que $P(X_1 \leqslant X_2) = P(X_2 \leqslant X_1)$.
   d. Montrer que $1 - X_2$ et X_2 ont la même loi. En déduire la valeur exacte de $P(Z \leqslant 1)$.
   e. Après avoir représenté l'ensemble $[0,1] \times [0,1]$, interpréter géométriquement la probabilité précédente.
2. Dans cette question, on considère $T = X_1^2 + X_2^2$ et on note f_T une densité de T.
   a. Montrer que la variable aléatoire X_1^2 est à densité et en déterminer une densité.
   b. Déterminer $T(\Omega)$ et déterminer une expression de $f_T(x)$ pour $x \in]0,1]$.
   On laissera le résultat sous forme d'une intégrale.
   c. Soit $x \in]0,1]$. On note $I_x = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}$, dont on admet la convergence.
   Montrer que :
   $$\forall x \in]0,1],\ I_x = I_1.$$
   d. Exprimer $P(T \leqslant 1)$ en fonction de I_1. En déduire à l'aide de Python une valeur approchée de I_1.

Corrigé

Planche 95
Agro-Veto 2016

1. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S_n = 4\sum_{k=0}^{n} \frac{I_k}{2^{k+1}}.$$

   a. Donner la valeur de I_0 et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

   (On pourra utiliser une intégration par parties).

   b. Écrire une fonction informatique ayant pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de I_n.
   Écrire ensuite une deuxième fonction d'argument n renvoyant la valeur de S_n.
   Calculer ainsi $S(10)$. Que remarque-t-on ?

2. a. Soit t un réel positif et n un entier naturel. Établir :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^2)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}.$$

   b. En déduire que :

$$\pi - S_n = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t.$$

   c. Montrer enfin que $0 \leqslant \pi - S_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

3. Écrire une fonction informatique `approx` ayant comme argument un réel `eps` strictement positif et renvoyant une valeur de π à `eps` près.

Corrigé

Planche 96
Agro-Véto 2016

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère N urnes, numérotées de 1 à N, sachant que pour chaque i, l'urne numérotée i contient i jetons numérotés de 1 à i. On considère l'épreuve aléatoire consistant en une suite de tirages selon les règles suivantes :

- le premier tirage est effectué dans l'urne N ;
- si le jeton obtenu au k-ème tirage porte le numéro i, alors le $(k+1)$-ème tirage est effectué dans l'urne i ;
- les différents jetons d'une même urne sont tirés équiprobablement.

On note, pour chaque entier naturel k non nul, X_k la variable aléatoire donnant le numéro du jeton obtenu au k-ème tirage.

1. Quelle est la loi de X_1 ?
2. Écrire une fonction en `Python`, prenant en argument un entier N, qui simule l'expérience ci-dessus, et renvoie le nombre de tirages nécessaires à l'obtention du premier 1.
3. Établir, pour k entier naturel non nul et $i \in [\![1, N]\!]$:
$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j}\mathbb{P}(X_k = j).$$
4. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, la suite finie $(\mathbb{P}(X_k = i))_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est décroissante.
5. a. Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X_k = 1))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, puis justifier qu'elle est convergente.
   b. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \geqslant \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{N}\Big(1 - \mathbb{P}(X_k = 1)\Big).$$
   c. En déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbb{P}(X_k = 1) = 1$.
   Que peut-on dire de l'événement "tous les tirages donnent un numéro différent de 1" ?
6. Déduire de la question précédente que, pour tout $i \in [\![2, N]\!]$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbb{P}(X_k = i) = 0$.
7. On note Y_N le rang du tirage pour lequel on obtient le jeton 1 pour la première fois. On peut démontrer (et nous l'admettrons) que :
$$\mathbb{E}(Y_N) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}.$$
Réaliser une simulation qui confirme graphiquement cette expression de $E(Y_N)$ en fonction de N.

Corrigé

Planche 97
Agro-Véto 2016

On étudie la descendance d'une fleur dont le nombre de descendants suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2,p)$ où le réel $p \in]0,1[$ est fixé. Les descendants de la première fleur ont des descendants de façon mutuellement indépendante et dans les mêmes conditions que la première fleur.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n la probabilité de l'événement E_n : "il n'y a plus de descendance à la génération n".

1. **Étude de la suite (u_n).**
   a. Calculer u_1.
   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$u_{n+1} = \big((1-p) + pu_n\big)^2.$$
   c. Étudier la suite (u_n). Quelle est sa limite (en fonction de p) ? Commenter les résultats obtenus.
2. **Simulation informatique.**
   a. Rédiger deux fonctions informatiques qui simulent la descendance d'une fleur respectivement sur une génération et sur n générations.
   b. Rédiger une troisième fonction qui renvoie la fréquence d'extinction de la descendance après 20 générations sur un grand nombre de simulations.

Corrigé

Planche 98
Agro-Véto 2016

Un scientifique étudie une population de souris femelles uniquement. Il note les propriétés suivantes :

- chacune des souris donne naissance en moyenne à une femelle sa première année de vie et à huit femelles pendant sa deuxième année ;
- la probabilité pour qu'une souris femelle survive une deuxième année est de 0,25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà de la deuxième année.

On distingue donc deux catégories de femelles : les jeunes, âgées de moins d'un an, et les adultes dont l'âge est compris entre un et deux ans.
Notons, pour tout entier naturel n, j_n le nombre de jeunes souris femelles et a_n le nombre de souris adultes femelles après n années.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les hypothèses ci-dessus peuvent se traduire par le système suivant :

$$\begin{cases} j_{n+1} = j_n + 8a_n \\ a_{n+1} = 0,25 j_n. \end{cases}$$

   On représente la population des souris femelles à l'aide du vecteur $S_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$. Expliciter alors une matrice L telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on ait $S_{n+1} = LS_n$.

2. En déduire une expression de S_n en fonction de L, S_0 et n.

3. a. Déterminer une base (U_1, U_2) de vecteurs propres de L.
   b. Soient λ et μ les coordonnées de S_0 dans la base (U_1, U_2). Exprimer S_n en fonction de λ, μ et n.

4. On considère que la population initiale est composée de 20 jeunes souris femelles et d'aucune souris femelle adulte.
   a. Écrire un programme informatique qui renvoie les listes $[j_0, j_1, \ldots, j_{10}]$ et $[a_0, a_1, \ldots, a_{10}]$.
   b. Exprimer j_n et a_n en fonction de n.
   c. On désigne par t_n le nombre total de souris femelles après n années.
   Justifier que, pour tout entier naturel n, $t_n = 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n$.
   d. Déterminer la limite de $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.
   e. Vers quelle répartition jeunes/adultes semble tendre la population ?

Corrigé

Planche 99
Agro-Véto 2016

(i) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $x^2 - y > 0$.

Indications : on commencera par étudier le nombre de valeurs propres de la matrice A dans le cas où elle est diagonalisable.

(ii) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On note F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires X et Y.

a. Montrer que les variables aléatoires X^2 et $-Y$ admettent une densité. Déterminer une densité de chacune de ces variables.

b. En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leq z \leq 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappel : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g, alors $X + Y$ est une variable à densité, dont la densité h est donnée par le produit de convolution :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

c. Quelle est la probabilité que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

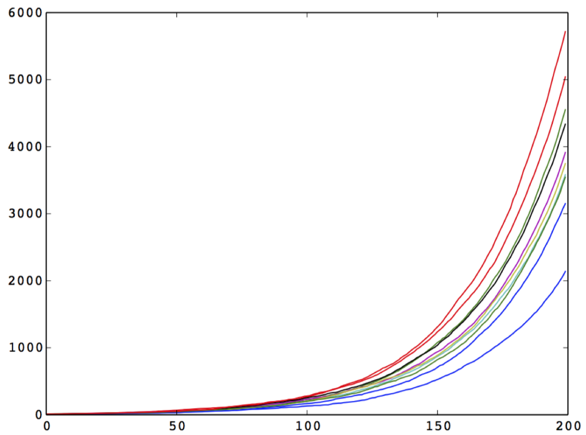
Corrigé

Planche 100
Agro-Véto 2015

Exercice.
Un agent biologique pathogène se déplace et se multiplie dans l'air par division de chaque cellule en deux cellules identiques. Les cellules sont initialement immortelles, puis neutralisées par un agent désinfectant pulvérisé pour combattre l'infection. On discrétise le temps en instants successifs séparés d'une durée δt, et on note pour tout entier naturel n :

- U_n le nombre de cellules pathogènes actives en suspension à l'instant $n\delta t$.
- X_n et Y_n le nombre de cellules actives respectivement divisées/neutralisées entre $n\delta t$ et $(n+1)\delta t$.

1. Dans un premier temps, les cellules pathogènes évoluent sans désinfectant. On note α la probabilité, pour une cellule de se diviser à un intervalle de temps quelconque δt et on suppose que les cellules n'interagissent pas.
   a. Déterminer la loi conditionnelle de la variable X_n sachant l'événement $[U_n = k]$.
   (On reconnaitra le schéma d'une loi usuelle).
   En déduire en fonction de k la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} i\mathbb{P}_{[U_n=k]}(X_n = i)$.
   b. En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \alpha\mathbb{E}(U_n)$.
   c. Exprimer $\mathbb{E}(U_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(U_n)$, puis montrer que $\mathbb{E}(U_n) = (1+\alpha)^n N$, où N est le nombre initial de cellules.
   d. Lors d'une expérience, on observe l'évolution du nombre de bactéries dans dix boites de Pétri. Chacune contient au départ 10 cellules pathogènes. Les résultats de cette expérience sont représentés sur le graphique suivant.



   Évaluer à l'aide de ces courbes la valeur du coefficient α.

2. On introduit l'agent désinfectant de sorte que, à chaque instant, chaque cellule pathogène peut être neutralisée avec la probabilité β, et sinon elle peut se diviser avec la probabilité α précédente.
   a. Exprimer $\mathbb{E}(U_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(U_n)$, puis $\mathbb{E}(U_n)$ en fonction de n.
   b. Déterminer une condition sur α et β pour que l'infection soit enrayée.

3. Simuler informatiquement l'évolution d'une population de cellules pathogènes comptant initialement N cellules lorsqu'on pulvérise l'agent infectant.
   On choisira des valeurs de α et β permettant de décrire les différents cas de figure possible.

Corrigé

Planche 101
Agro-Veto 2015

Exercice.
L'exercice comprend trois parties. La partie 3 peut être abordée sans que la partie 2 n'ait été traitée.
Partie 1 : définition d'une fonction.
Soit t un réel positif ou nul. Pour tout réel x, on pose $P_t(x) = x^3 + tx^2 + 1$.

1. Démontrer que le polynôme P_t admet une unique racine que l'on notera $r(t)$.

   On note r l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ qui, à tout réel positif t associe le réel $r(t)$.

Partie 2 : ébauche de la courbe de la fonction r.
On a construit la représentation graphique de la fonction P_2 sur la figure 1 ci-après.

2. Expliquer comment construire sur cette figure le point de coordonnées $(2, r(2))$.

3. Avec le logiciel Geogebra, on a répété la construction précédente en faisant varier t de 0 à 10 avec un pas de 0,1 et on a obtenu la figure 2 ci-après.

   Que peut-on conjecturer relativement à $r(0)$? au signe de $r(t)$? à la limite de la fonction r en $+\infty$? à la branche infinie de la courbe de r en $+\infty$?

   Démontrer ces conjectures.

4. Démontrer que la fonction r réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty, -1]$.

   Déterminer la fonction réciproque de la fonction r, que l'on nommera s.

5. En déduire que la fonction r est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Dresser le tableau de r.

Partie 3 : approche informatique.

6. Rédiger une fonction informatique qui, recevant `t` et un entier `n`, renvoie une valeur approchée de $r(t)$ à 10^{-n} près.

7. Utiliser cette fonction pour construire la courbe de r. Commenter la courbe obtenue.

Figure 1

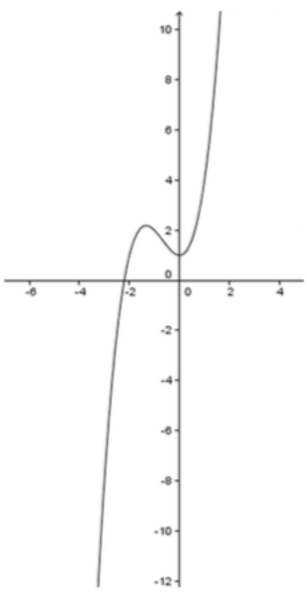
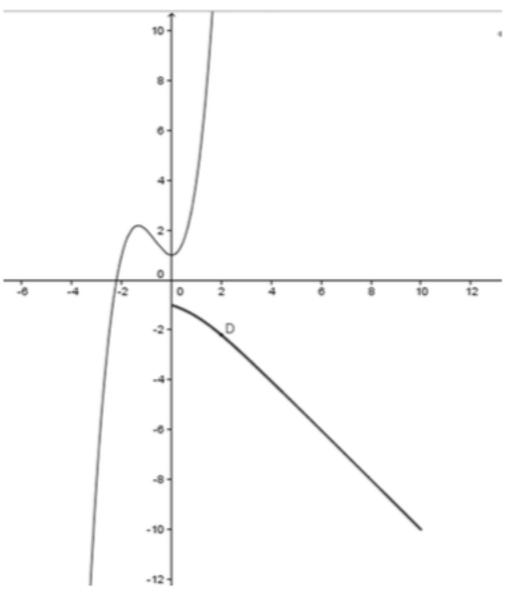


Figure 2



Corrigé

Planche 102
Agro-Veto 2015

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. On définit l'application :
$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'. \end{array}$$
   a. Justifier rapidement que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Déterminer la matrice de M de Φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b. Préciser les valeurs propres de Φ. L'application Φ est-elle diagonalisable ?
   c. L'application Φ est-elle bijective ?

2. Pour tout entier $p \in [\![0, n]\!]$, on considère les polynômes :
$$T_p = X^p(1 - X)^p \text{ et } L_p = \frac{1}{p!}(T_p)^{(p)},$$
   où $(T_p)^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de T_p. Fixons un entier $p \in \mathbb{N}$.
   a. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_p.
   b. Notons L_p sous la forme $L_p = \sum_{k=0}^{p} a_{k,p}X^k$. Établir que :
$$\forall k \in [\![0, p]\!], a_{k,p} = (-1)^k \binom{p}{k}\binom{p+k}{k}.$$
   c. Déterminer une relation entre $a_{k+1,p}$ et $a_{k,p}$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$. Préciser la valeur de $a_{0,p}$.
   d. En vous appuyant sur la question 2.c, écrire une fonction informatique qui prend en argument un entier naturel p et renvoie les coefficients $a_{0,p},\ a_{1,p},\ \dots, a_{p,p}$ de L_p.
   Tester cette fonction dans le cas où $p \in \{0; 1; 2\}$.
   e. Dans cette question, $n = 2$ et Φ est donc l'application :
$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'. \end{array}$$
   Vérifier que (L_0, L_1, L_2) est une base de vecteurs propres de Φ.

Corrigé

Planche 103
Agro-Veto 2015

On rappelle que si S et T sont deux variables à densité indépendantes, de densités respectives f_S et f_T, alors $S+T$ est une variable à densité, de densité f_{S+T} définie par :

$$f_{S+T} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(t) f_T(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que si U suit une loi uniforme sur $[0,1[$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la variable aléatoire $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On note $S_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la variable S_n est à densité, de densité :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

3. On suppose qu'à un arrêt de bus, les différences entre les temps de passage successifs d'un autobus sont indépendantes, et de même loi exponentielle de paramètre λ. On définit un instant 0, puis on note $S_1, S_2, \ldots$, les temps de passages successifs des autobus. On note alors, pour un instant $t > 0$ donné, N_t la variable égale au nombre d'autobus qui sont passés entre l'instant 0 et l'instant t à l'arrêt de bus. Autrement dit, on a : $\forall n \geqslant 0, [N_t = n] = [S_n \leqslant t < S_{n+1}]$.

   a. Pour tout $n \geqslant 0$, exprimer l'événement $[N_t \geqslant n]$ à l'aide de la variable S_n.
   Justifier alors que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(N_t = n) = P(S_n \leqslant t) - P(S_{n+1} \leqslant t)$.

   b. En déduire que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(N_t = n) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$.

4. On suppose plus précisément que les temps de passage successifs d'un autobus ont pour moyenne 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ donné pour prendre le bus. On se pose les questions suivantes :

   - combien de temps en moyenne va-t-il attendre le prochain bus ?
   - combien de temps en moyenne s'écoule entre le prochain bus et celui qui a précédé ?

   On réalise le programme Python suivant :

```
from math import log
from random import random
def autobus():
    a = 0 ; b =0 ; N = 10000
    for k in range(N):
        s = 0
        while s < 100 :
            r = s
            s = s - 10*log(random())
            u = s - 100 ; v = s - r
        a = a + u ; b = b + v
    print(a/N, b/N)
```

   a. Expliquer ce que représente les variables `r`, `s`, `u` et `v` dans le programme.

   b. Le programme affiche finalement les valeurs suivantes :

   `10.062252    20.315494`

   Pourquoi les valeurs affichées sont-elles paradoxales vis-à-vis de la situation ?

Corrigé

Planche 104
Agro-Veto 2015

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant. Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage amenant une boule noire (si on obtient la boule noire), et qui vaut 0 si on n'obtient jamais de boule noire. L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

1. a. Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise `m` fois l'expérience décrite ci-dessus (en arrêtant les tirages après l'obtention de `tmax` boules blanches), et renvoie la proportion des expériences où une boule noire a été obtenue :

```
def estimeProbaEchec(m, tmax):
    compteSucces = 0
    for i ..........:
        b = ..........
        succes = 0
        tirages = 0
        while succes == .......... and tirages ..........:
            tirages ..........
            if random() ..........:
                succes = 1
            else:
                ..........
        compteSucces += ..........
    return ..........
```

   b. Utiliser cette fonction avec plus valeurs de `tmax` pour établir une conjecture en réponse au problème posé.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note B_n l'événement "les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules blanches" et on note $u_n = P(B_n)$.

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.

   b. Étudier les variations de la suite (u_n) puis démontrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.

   c. Démonter que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, puis démontrer que la suite $(-\ln(u_n))$ est convergente.

   d. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1 - P(B_n)$.

   Répondre alors au problème posé.

Corrigé

Corrigé de l'exercice de la planche 1

1. Notons u la suite constante égale à 1.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(x-\frac{1}{2}+\frac{k}{n}\right) = n\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{n-1}{2} = nx-\frac{1}{2} = u_n f(nx).$$

La suite u est donc bien adaptée à la fonction $f : x \mapsto x - \frac{1}{2}$.

2. En dérivant l'égalité de fonction :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n f(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right),$$

on trouve immédiatement le résultat :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ nu_n f'(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

3. a. Puisque $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 x^k \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$, on peut écrire :

```python
def calc(L):
    res = 0
    for k in range(len(L)):
        s += L[k]/(k+1)
    return s
```

b. On trouve après calculs que $B_1 = X - \frac{1}{2}$ et $B_2 = X^2 + X - \frac{5}{6}$. On sait que $B_1 \in \mathcal{E}$ d'après la question 1. On déduit de la question 2 que $B_0 = B_1'$ appartient aussi à $\mathcal{E}$.

c. (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On commence par remarquer que B_{p-1} est un polynôme de degré $p-1$ (cela se démontre sans difficulté par récurrence). En notant $a \neq 0$ son coefficient dominant, on remarque que les coefficients dominants des polynômes $x \mapsto u_n B_{p-1}(nx)$ et $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} B_{p-1}\left(x+\frac{k}{n}\right)$ sont respectivement $au_n n^{p-1}$ et an.
On en déduit que $u_n = \frac{1}{n^{p-2}}$. La suite $\left(\frac{1}{n^{p-2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien adaptée à B_{p-1}.

(ii) En dérivant la fonction $\varphi_{p,n}$, on trouve que $\varphi'_{p,n} = 0$ (d'après la question précédente) donc que la fonction $\varphi_{p,n}$ est constante.

(iii) En appliquant les changements de variables affines $t = nx$ et $u = x + \frac{k}{n}$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi_{p,n}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n^{p-1}}\int_0^{\frac{1}{n}} B_p(nx)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{n}} B_p\left(x+\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{n^{p-2}}\int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} B_p(u)\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{n^{p-2}}\int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(iv) Le résultat est immédiat : la fonction $\varphi_{p,n}$ est constante d'intégrale nulle sur $[0,1]$, elle est donc nulle.

(v) On en déduit que la fonction B_p appartient à $\mathcal{E}$ (on connait même sa suite adaptée).
On peut alors montrer par récurrence que toutes les fonctions B_p appartiennent à $\mathcal{E}$.

Retour à la planche 1

Corrigé de l'exercice de la planche 2

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 3+\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 16+2\lambda & -\lambda^2+10\lambda-15 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 10 & -\lambda^2+12\lambda-17 \\ 0 & 16+2\lambda & -\lambda^2+10\lambda-15 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 10 & -\lambda^2+12\lambda-17 \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   où $Q(\lambda) = 10(-\lambda^2+10\lambda-15) - (16+2\lambda)(-\lambda^2+12\lambda-17) = 2\left(\lambda^3 - 9\lambda^2 - 29\lambda + 61\right)$. On en déduit le résultat.

2. On trouve (via Python par exemple !) que $f(0) = 61$ et $f(3) = -80$. La fonction f' est un trinôme du second degré dont les racines sont $\alpha = 3 - 2\sqrt{\dfrac{14}{3}} < 0$ et $\beta = 3 + 2\sqrt{\dfrac{14}{3}} > 3$.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Puisque $\alpha < 0 < 3 < \beta$ et $f(0) > 0$ et $f(3) < 0$, $f(\alpha) > 0$ et $f(\beta) < 0$. En appliquant le théorème de la bijection sur les intervalles $]-\infty, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$ et $[\beta, +\infty[$, on trouve que la fonction s'annule exacte une fois sur chacun de ces intervalles. Elle admet donc trois racines distinctes, correspondant aux valeurs propres de A.

4. On commence par calculer : $f(-4) = -31$ et $f(12) = 145$. On utilise la dichotomie pour déterminer une valeur approchée de ces racines : on cherche λ_1 dans $[-4, 0]$, λ_2 dans $[0, 3]$ et λ_3 dans $[3, 12]$. En appliquant le code ci-dessous, on trouve alors que $\lambda_1 \approx -3,632$, $\lambda_2 \approx 1,517$ et $\lambda_3 \approx 11,112$.

```
def f(x):
    return x**3-9*x**2 -29*x + 61

def dichotomie(a,b):
    g, d = a, b
    while d-g > 0.02:
        m = (g+d)/2
        if f(g)*f(m) < 0:
            d = m
        else:
            g = m
    return (d+g)/2

for (a,b) in [(-4,0), (0,3), (3,12)]:
    print(dichotomie(a,b))
```

5. La matrice A admet trois valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable d'après la condition suffisante de diagonalisabilité.

6. a. On a évidemment l'inclusion $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $0_3 \in \mathcal{C}(A)$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U, V \in \mathcal{C}(A)$. Puisque :

$$(\lambda U + V)A = \lambda UA + VA = \lambda AU + AV = A(\lambda U + V),$$

   $\lambda U + V \in \mathcal{C}(A)$. On en déduit que $\mathcal{C}(A)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Puisque :

$$MD = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 b & \lambda_3 c \\ \lambda_1 d & \lambda_2 e & \lambda_3 f \\ \lambda_1 g & \lambda_2 h & \lambda_3 i \end{pmatrix} \text{ et } DM = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b & \lambda_1 c \\ \lambda_2 d & \lambda_2 e & \lambda_2 f \\ \lambda_3 g & \lambda_3 h & \lambda_3 i \end{pmatrix}$$

et puisque les valeurs propres de D sont deux à deux distinctes, $M \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, $b = c = d = f = g = h = 0$, i.e. si, et seulement si, M est diagonale.

c.
$$M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$$

d. Notons $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (formée des matrices élémentaires).
D'après la question 6.b, $\mathcal{C}(D) = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$. À l'aide de l'équivalence de la question précédente, on trouve que $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1})$. La liberté de la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ assure celle de $\mathcal{F} = (PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1})$. On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{C}(A)$.

Retour à la planche 2

Corrigé de l'exercice de la planche 3

1. On utilise la remarque suivante : la probabilité un jour donné de choisir un éléphant déjà examiné est égale au rapport du nombre d'éléphants déjà examinés sur le nombre total d'éléphants.

```
import random as rd

def simuleY(k,n):
    examines = 0
    for i in range(k):
        x = rd.random()
        if x > examines/n:
            examines += 1
    return examines
```

2. La variable aléatoire Y_1 est constante égale à 1.

On remarque que $Y_2(\Omega) = \{1; 2\}$. À l'aide de la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \frac{n}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \text{ et } \mathbb{P}(Y_2 = 2) = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $G_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_k = i) X^i$.

a. Remarquons que $Y_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.

$$G_k(1) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_k = i) = 1.$$

Puisque $G_k' = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(Y_k = i) X^i$, on trouve que :

$$G_k'(1) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(Y_k = i) = \mathbb{E}(Y_k).$$

b. On trouve immédiatement que $G_1 = X$ et $G_2 = \dfrac{1}{n} X + \dfrac{n-1}{n} X^2$.

c. Remarquons que :

$$[Y_{k+1} = i] = ([Y_{k+1} = i] \cap [Y_k = i]) \cup ([Y_{k+1} = i] \cap [Y_k = i-1]) .$$

La réunion étant disjointe, on trouve :

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} = i) = \mathbb{P}(Y_k = i)\mathbb{P}_{Y_k=i}(Y_{k+1} = i) + \mathbb{P}(Y_k = i-1)\mathbb{P}_{Y_k=j}(Y_{k+1} = i-1).$$

On pouvait aussi appliquer la formule des probabilités totales avec $([Y_k = j])_{1 \leqslant j \leqslant n}$ *pour système complet d'événements.* Distinguons le cas $i = 1$. On a alors $\mathbb{P}(Y_k = i-1) = 0$ et ainsi :

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(Y_k = 1)\mathbb{P}_{Y_k=1}(Y_{k+1} = 1) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(Y_k = 1).$$

Si $i > 1$, on a alors :

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} = i) = \frac{i}{n}\mathbb{P}(Y_k = i) + \frac{n-i+1}{n}\mathbb{P}(Y_k = i-1).$$

Exprimer $\mathbb{P}(Y_{k+1} = i)$ à l'aide de probabilités faisant intervenir Y_k.

d. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_{k+1}=i)X^i \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{P}(Y_k=1)X + \sum_{i=2}^{n}\frac{i}{n}\mathbb{P}(Y_k=i)X^i + \sum_{i=2}^{n}\frac{n-i+1}{n}\mathbb{P}(Y_k=i-1)X^i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\mathbb{P}(Y_k=i)X^i + \sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{n}\mathbb{P}(Y_k=j)X^{j+1} \\
&= \frac{1}{n}XG_k' - \sum_{j=1}^{n}\frac{j}{n}\mathbb{P}(Y_k=j)X^{j+1} + X\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(Y_k=j)X^j \\
&= \frac{1}{n}XG_k' - \frac{1}{n}X^2G_k' + XG_k \\
&= \frac{1}{n}X(1-X)G_k' + XG_k.
\end{aligned}$$

En dérivant cette égalité et en l'évaluant en 1, on trouve :

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) = 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbb{E}(Y_k).$$

La suite $(\mathbb{E}(Y_k))$ est donc arithmético-géométrique. On trouve après calculs que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Y_k) = n - \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}}.$$

4. a. Trivial : la linéarité de Φ découle de celle de la dérivation.
   b. Aucune difficulté...
   c. Il suffit de montrer que $\Phi\left(\mathbb{R}_n[X]\right) \subset \mathbb{R}_n[X]$. On est amené par la question précédente à considérer la famille $\mathcal{F}_n = (P_0, \cdots, P_n)$. On commence par remarquer que tous ces polynômes appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrons la liberté de $\mathcal{F}_n$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $\mathcal{F}_\infty = (1-X, X)$ est trivialement libre. Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathcal{F}_{n-1}$ est libre. Soit $(\lambda_0, \cdot, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n$, i.e. :

$$\lambda_0(1-X)^n + \lambda_1 X(1-X)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}X^{n-1}(1-X) + \lambda_n X^n = 0.$$

   En évaluant en 1, on trouve que $\lambda_n = 0$. En divisant la dernière relation par $(1-X)$ (le produit de polynômes est intègre), on est ramené à $\lambda_0(1-X)^{n-1} + \lambda_1 X(1-X)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1}X^{n-2} = 0$. On en déduit que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ par liberté de $\mathcal{F}_{n-1}$, ce qui conclut la récurrence
   Par argument de cardinalité, la famille $\mathcal{F}_n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Puisque $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) = \Phi\left(\mathrm{Vect}(P_0, \cdots, P_n)\right) = \mathrm{Vect}\left(\Phi(P_0), \cdots, \Phi(P_n)\right) \subset \mathbb{R}_n[X]$, la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   d. D'après la question précédente, $\mathcal{F}_n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de φ. On en déduit que φ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\Phi) = \left\{\frac{j}{n},\ j \in [\![0, n]\!]\right\}$.

5. a. On applique la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}X^j(1-X)^{n-j} = (X+1-X)^n = 1 = G_0,$$

   et :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ P_j = X^j(1-X)^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^k X^{j+k} = \sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i.$$

b. D'après la question 3.d, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ G_{k+1} = \Phi(G_k)$. On montre par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ G_k = \Phi^k(G_0)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ G_k &= \Phi^k(G_0)\\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Phi^k(P_j)\\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j\\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i\\ &= \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}\right] X^i \text{ car } \forall i<0,\ \binom{n-j}{i-j} = 0.\end{aligned}$$

c. Puisque $\mathbb{P}(Y_k = i)$ est le coefficient de degré i de G_k, on trouve par identification que :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(Y_k = i) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}\\ &= \sum_{j=0}^{i} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(n-j)!}{(i-j)!(n-i)!} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}\\ &= \sum_{j=0}^{i} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}\\ &= \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.\end{aligned}$$

Retour à la planche 3

Corrigé de l'exercice de la planche 4

1.
```python
def produit_scalaire(u,v):
    s = 0
    for k in range(len(u)):
        s += u[k] * v[k]
    return s
```

2. a. L'application f^* est linéaire par linéarité du produit scalaire. Pour tout $u \in E$, $f^*(u) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$ donc f est un endomorphisme de E.

   b. On connait l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f^*(e_j) \mid e_i\rangle = \langle e_j \mid f(e_i)\rangle.$$

   La relation est donc vraie pour tous vecteurs u et v de $\mathcal{B}$. Par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de f et f^*, on trouve le résultat.

3. On utilise la fonction écrite en question 1.

```python
def adjoint(f,u):
    n = len(u)
    res = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        e = np.zeros(n)
        e[i] = 1
        res[i] = produit_scalaire(u,f(e))
    return res
```

4. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
$$(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*))_{i,j} = \langle f^*(e_i) \mid e_j\rangle = \langle e_i \mid f(e_j)\rangle = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^T_{i,j}$$
   On en déduit la relation recherchée.

5. a. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est symétrique réelle donc f est diagonalisable (dans une base orthonormée).

   b. Soient $u \in \mathrm{Ker}(f)$ et $w \in E$. On note alors $w = f(v)$. D'après ce qui précède, on a :

$$\langle u \mid w\rangle = \langle u \mid f(v)\rangle = \langle f(u) \mid v\rangle = 0.$$

   On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) \subset (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ et $\mathrm{Im}(f) \subset (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$. On obtient les égalités d'espaces vectoriels par le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}\, f)^\perp = n - \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}\, f)^\perp = n - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f.$$

6. a. Par définition, $F^\perp \subset E$. On a évidemment $0 \in F^\perp$. Soient $(u,v) \in F^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall w \in F,\ \langle \lambda u + v \mid w\rangle = \lambda\langle u \mid w\rangle + \langle v \mid w\rangle = 0.$$

   On en déduit que $\lambda u + v \in F^\perp$, montrant ainsi que $F^\perp$ est stable par combinaisons linéaires, donc un sous-espace vectoriel de E.

   b. L'implication directe est triviale (c'est la définition de $F^\perp$). Supposons désormais que v est orthogonal à tout vecteur $u_1, \ldots, u_p$. Soit $w \in F$. Il existe $(w_1, \ldots, w_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $w = \sum_{i=1}^{p} w_i u_i$. Alors :

$$\langle v \mid w\rangle = \sum_{i=1}^{p} w_i \langle v \mid u_i\rangle = 0.$$

   On en déduit que $v \in F^\perp$.

c. La linéarité de Φ découle de la linéarité à gauche du produit scalaire. Puisque $\mathrm{Vect}(\Phi(u_1), \ldots, \Phi(u_p)) = \Phi(F) \subset \operatorname{Im}\Phi$, étudions la liberté de la famille $(\Phi(u_1), \ldots, \Phi(u_p))$. En effet, si cette famille est libre, elle est candidate pour être une base de $\operatorname{Im}\Phi$ car elle est de cardinal maximal ($\mathbb{R}^p$ est de dimension p). Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\lambda_1\Phi(u_1) + \cdots + \lambda_p\Phi(u_p) = 0$. Ainsi :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \left\langle u_k \mid \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \right\rangle = 0.$$

On déduit de la question 6.b que le vecteur $w = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ appartient à $F^{\perp}$. Puisque $w \in F$, on trouve que $w = 0$ (w est en particulier orthogonal à lui-même) et ainsi que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. On trouve alors que $\dim \operatorname{Im}\Phi = p = \dim \mathbb{R}^p$. L'application Φ est donc surjective.

d. On invoque le théorème du rang et le résultat de la question 6.b

$$\dim F^{\perp} = \dim \operatorname{Ker}\Phi = \dim E - \dim \operatorname{Im}\Phi = n - \dim F.$$

Retour à la planche 4

Corrigé de l'exercice de la planche 5

1. On trouve sans difficulté que K_1 n'admet aucune valeur propre réelle, plus précisément que $\mathrm{Sp}(K_1) = \{-i; i\}$. La matrice K_1 n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   Après calculs, on trouve que les vecteurs propres respectivement associés à $-i$ et i sont les vecteurs des ensembles :
$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\right) \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ et } \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right) \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

2. On fera attention au décalage d'indice !

```
import numpy as np

def K(n):
    mat = np.zeros((n+1,n+1))
    for i in range(n):
        mat[i,i+1] = i+1
    for j in range(n):
        mat[j+1,j] = -n-1+(j+1)
    return mat
```

3. On fera attention aux résultats obtenus par le code ci-dessous : il faut tenir compte des erreurs d'arrondi. *Un nombre comme* `4.99600361e-16` *peut être considéré comme nul.*

```
import numpy.linalg as la

for n in range(1,11):
    print("valeurs propres de K_" + str(n))
    print(la.eigvals(K(n)))
```

   En exécutant le code ci-dessus, on peut conjecturer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Sp}(K_n) = \{(n-2k)i, k \in [\![0, n]\!]\}.$$

4. a. Remarquons que $\cos(x) \neq 0$. En divisant par $\cos^n(x)$, on trouve que :
$$\begin{aligned}\lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 &\Leftrightarrow \lambda_0 \cos^n(x) + \lambda_1 \cos^{n-1}(x)\sin(x) + \cdots + \lambda_{n-1}\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \lambda_n \sin^n(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \cdots + \lambda_n \tan(x)^n = 0.\end{aligned}$$

   b. Étudions la liberté de la famille $\mathscr{B}_n$. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$. On considère le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$. D'après la question précédente, on a alors :
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ P(\tan x) = 0.$$
   Puisque la fonction tan prend une infinité de valeurs sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\left(\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}\right)$, le polynôme P admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. La famille $\mathscr{B}_n$ est ainsi libre et donc une base de l'espace vectoriel V_n qu'elle engendre. En particulier, on trouve que $\dim \mathbb{V}_n = n + 1$.

   c. L'application φ_n est linéaire par linéarité de la dérivation. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a :
$$\varphi_n(f_k) = f_k' = -(n-k)\cos^{n-k-1}\sin^{k+1} + k\cos^{n-k+1}\sin^{k-1} = kf_{k-1} - (n-k)f_{k+1} \in \mathbb{V}_n.$$

On en déduit que $\varphi_n(V_n) \subset V_n$ par linéarité de φ_n qui est donc bien un endomorphisme de V_n. On déduit des calculs effectués sa matrice dans la base $\mathscr{B}_n$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -n & 0 & 2 & \ddots & & (0) & \vdots \\ 0 & -n+1 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & n-1 & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & -2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = K_n.$$

d. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule de Moivre assure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\cos(x) + i\sin(x))^{n-k}(\cos(x) - i\sin(x))^k = e^{i(n-k)x}e^{-ikx} = e^{i(n-2k)x} = g_k(x).$$

e. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. La formule du binôme de Newton assure que :

$$\begin{aligned} g_k &= (\cos + i\sin)^{n-k}(\cos - i\sin)^k \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} i^j \binom{n-k}{j} \cos^j \sin^{n-k-j} \sum_{\ell=0}^{k} (-i)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \cos^\ell \sin^{k-\ell} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} i^{j+k-\ell} \binom{n-k}{j} \binom{k}{\ell} \cos^{j+\ell} \sin^{n-(j+\ell)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} i^{j+k-\ell} \binom{n-k}{j} \binom{k}{\ell} f_{j+\ell} \in V_n. \end{aligned}$$

f. On vérifie sans difficulté que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, g_k est un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $i(n-2k)$. Puisque ces valeurs propres sont toutes distinctes et au nombre de $n+1$ (i.e. $\dim V_n$), on a trouvé toutes les valeurs propres de φ_n et donc de K_n (puisque K_n est la matrice de φ_n dans une base de V_n).

g. D'après la question précédente et par la condition suffisante de diagonalisabilité, la matrice K_n est diagonalisable (et ses espaces propres sont de dimension 1).

h. La matrice K_n est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de K_n. Or :

$$0 \in \mathrm{Sp}(K_n) \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n]\!],\ i(n-2k) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n]\!],\ \Leftrightarrow n = 2k.$$

On en déduit que la matrice K_n est inversible si, et seulement si, n est impair.

i. Supposons n pair et notons $n = 2p$. Déterminer le noyau de K_n revient à déterminer l'espace propre de φ_n associé à la valeur propre 0. On l'a trouvé à la question 4.f : $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(g_p)$. Or :

$$\begin{aligned} g_p &= (\cos + i\sin)^p(\cos - i\sin)^p \\ &= \left(\cos^2 + \sin^2\right)^p \\ &= \sum_{j=0}^{p} \binom{j}{p} \sin^{2j} \cos^{2p-2j} \\ &= \sum_{j=0}^{p} \binom{j}{p} f_{2j}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{Ker}\, K_n = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \binom{k}{1} & 0 & \cdots & 0 & \binom{k}{k-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right)$$

Retour à la planche 5

Corrigé de l'exercice de la planche 6

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left[n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left[-1+o(1)\right] \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-1}.$$

2.
   - On se place dans le cas où $n=2$. On trouve immédiatement que $X(\Omega)=\{1;2\}$. On trouve la loi de X par dénombrement :
   $$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{2}.$$
   La variable X suit donc la loi uniforme sur $\{1;2\}$ et admet pour espérance $\mathbb{E}(X)=\frac{3}{2}$.
   - On se place dans le cas où $n=3$. On trouve la loi de X de la même manière :
   $$\mathbb{P}(X=1)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9},\ \mathbb{P}(X=3)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9},\ \mathbb{P}(X=2)=1-\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{3}.$$
   L'espérance de X est alors égale à $\frac{19}{9}$.

3. a.
```python
import random as rd

def numeros(n):
    return [rd.randint(1,n) for k in range(n)]
```
   b.
```python
def simule_X(n):
    num = numeros(n)
    return len(set(num))
```
   c.
```python
def esperance_X(n):
    N = 10000
    s = 0
    for k in range(N):
        s += simule_X(n)
    return s/N
```

4. Par dénombrement et équiprobabilité des tirages, on trouve que :

   a. $\mathbb{P}(X=1)=\frac{n}{n^n}=\frac{1}{n^{n-1}}$

   b. $\mathbb{P}(X=n)=\frac{n!}{n^n}$

   c. $\mathbb{P}(X=2)=\frac{\binom{n}{2}\left(2^n-2\right)}{n^n}$

   d. $\mathbb{P}(X=n-1)=\frac{\binom{n}{2}n\binom{n-1}{n-2}(n-2)!}{n^n}$.

5. a. Puisque $X_i(\Omega)=\{0;1\}$, on trouve immédiatement que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où $p=\mathbb{P}(A_i)=1-\mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right)=1-\frac{(n-1)^n}{n^n}$.

   b. Remarquons que $X=X_1+\cdots+X_n$. La variable aléatoire X admet une espérance par linéarité, égale à :
   $$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)=n\left[1-\frac{(n-1)^n}{n^n}\right].$$
   On déduit de la question précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{(n-1)^n}{n^n}=1-e^{-1}\neq 0$. Ainsi, $\mathbb{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1-e^{-1}\right)n$.

6. a. On trouve de la même manière que $X_iX_j \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ où :

$$\begin{aligned} q &= \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A_i} \cup \overline{A_j}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right) - \mathbb{P}\left(\overline{A_j}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}\right) \\ &= 1 - \frac{2(n-1)^n}{n^n} + \frac{(n-2)^n}{n^n}. \end{aligned}$$

   Pour i et j distincts entre 1 et n, calculer la loi de la variable X_iX_j.

   b. La variable aléatoire X est finie, elle admet donc une espérance. On peut montrer par récurrence que :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\ &= n\mathbb{V}(X_1) + n(n-1)\left[\mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)\right] \\ &= n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right] + n(n-1)\left[1 - \frac{2(n-1)^n}{n^n} + \frac{(n-2)^n}{n^n}.\right]. \end{aligned}$$

Retour à la planche 6

Corrigé de l'exercice de la planche 7

1. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\mathrm{rg}(A-\lambda I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & Q(\lambda) & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$
où $Q(\lambda) = 1-(2-\lambda)^2 = (\lambda-1)(3-\lambda)$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1,3\}$. En appliquant le théorème du rang, on trouve que :
$$\dim \mathrm{Ker}(A-I_3) + \dim \mathrm{Ker}(A-3I_3) = 3 - \mathrm{rg}(A-I_3) + 3 - \mathrm{rg}(A-3I_3) = 2 \neq 3.$$
L'endomorphisme φ n'est donc pas diagonalisable.

b. Puisque :
$$\mathrm{rg}(a_1,a_2,a_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$
la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On trouve après calculs que $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Le théorème de changement de base assure qu'en posant $P = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve que $A = PMP^{-1}$. En exécutant le script ci-dessous, on trouve que $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

```
import numpy.linalg as la
p = np.array([[1,0,1],[1,0,-1],[0,1,0]])
print(la.inv(p))
```

2. a. La fonction h est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre avec condition initiale. On trouve donc immédiatement que : $\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = e^{3t}$. Le code ci-dessous permet de tracer l'allure de la courbe représentative de h sur l'intervalle $[0,1]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def h(t):
    return np.exp(3*t)

abs = np.linspace(0,1,1000)
ord = h(abs)
plt.plot(abs,ord)
plt.show()
```

b. D'après le système différentiel vérifié par (f,g,h), on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$. On en déduit que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}APY(t) = MY(t).$$
On obtient le résultat attendu sur la première ligne : $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 3u(t) + v(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

c. La fonction u est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre et admet pour condition initiale $u(0) = \dfrac{1}{2}(f(0)+g(0)) = 1$. On trouve après calculs (variation de la constante) que : $\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = (t+1)e^{3t}$.

d. On trouve que : $\forall t \in \mathbb{R},\ w'(t) = w(t)$ et $w(0) = 0$. On en déduit que $w = 0$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors $f(t) = u(t) + w(t) = u(t)$ et $g(t) = u(t) - w(t) = u(t)$.

Retour à la planche 7

Corrigé de l'exercice de la planche 8

1. a. On sait que les variables aléatoires $-\frac{1}{\lambda}\ln(U)$ et $-\frac{1}{\mu}\ln(V)$ suivent respectivement les lois exponentielles de paramètres λ et μ. *Attention, le jury pouvait attendre ici de retrouver le résultat.*

   b.

```python
import random as rd
import numpy as np

def simule_min(el,mu):
    x = -np.log(rd.random())/el
    y = -np.log(rd.random())/mu
    return min(x,y)
```

   c. Posons $Z = \min(X, Y)$. On trouve immédiatement que $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t < 0$, $\mathbb{P}(Z \leqslant t) = 0$. Par indépendance de X et Y, on a :

$$\forall t \geqslant 0,\ \mathbb{P}(Z \leqslant t) = 1 - \mathbb{P}(Z > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t, Y > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t) = 1 - e^{(\lambda+\mu)t}$$

   On en déduit que la variable aléatoire $\min(X, Y)$ est à densité et suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

   d. On trouve sans difficulté que la variable aléatoire $-Y$ est à densité et, de densité donnée par :

$$f_{-Y} : t \mapsto \begin{cases} \mu e^{\mu t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

   e. La variable $X - Y$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité, elle est donc aussi à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) f_{-Y}(t)\, \mathrm{d}$$

   où $f_X : x \mapsto \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ est une densité de X.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_X(x-t)f_{-Y}(t) \neq 0 \Leftrightarrow \left\{ x - t \geqslant 0 t \leqslant 0 \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ t \leqslant x t \leqslant 0, \right.$$

   Si $x > 0$, on a alors :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mu e^{\mu t}\, \mathrm{d}t = \lambda\mu e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{0} e^{(\lambda+\mu)t}\, \mathrm{d}t = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda x}.$$

   Si $x \leqslant 0$, on a alors :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mu e^{\mu t}\, \mathrm{d}t = \lambda\mu e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{x} e^{(\lambda+\mu)t}\, \mathrm{d}t = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu x}.$$

   f. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \mathbb{P}(X - Y \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} h(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu x}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

   Calculer alors la probabilité de l'événement $[X \leqslant Y]$.

2. a. On utilise la loi faible des grands nombres pour estimer les probabilités des événements considérées. En exécutant le code ci-dessous, on trouve que les probabilités respectives que X_2 puis X_3 soient des creux sont environ égales à 0,5 et 0,2.

```python
def loi_exp(mu):
    return -np.log(1-rd.random())/mu

N = 10000
s2, s3 = 0,0
for k in range(N):
    x1, x2, x3, x4 = loi_exp(1), loi_exp(2), loi_exp(1), loi_exp(2)
    if x2 <= x1 and x2 <= x3:
        s2 += 1
    if x3 <= x2 and x3 <= x4:
        s3 += 1
print(s2/N,s3/N)
```

b. L'événement "X_2 est un creux" est $[X_2 \leqslant X_1] \cap [X_2 \leqslant X_3] = [X_2 \leqslant \min(X_1, X_3)]$. D'après la question 1.c, la variable aléatoire $\min(X_1, X_3)$ suit la loi exponentielle de paramètre 2. Par indépendance mutuelle de X_1, X_2 et X_3, et le lemme des coalitions, on trouve que X_2 et $\min(X_1, X_3)$. En appliquant le résultat de la question 1.f, on trouve que $\mathbb{P}(X_2 \leqslant \min(X_1, X_3)) = \dfrac{2}{2+2} = \dfrac{1}{2}$.
De la même manière, on trouve la probabilité que "X_3 est un creux" :

$$\mathbb{P}(X_3 \leqslant \min(X_2, X_4)) = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}.$$

3. a. On remarque si l'événement "X_2 et X_3 sont des creux" implique l'événement $X_2 = X_3$ qui est de probabilité nulle. On en déduit que la probabilité que og X_2 et X_3 sont des creux" est nulle.

b. En appliquant le lemme des coalitions, on trouve que les événements "X_4 est un creux" et "X_8 est un creux" sont-ils indépendants (par indépendance de X_3, X_4, X_5, X_7, X_8 et X_9.

c. Par indépendance des "creux" à ces positions, on trouve que le nombre de creux parmi ces 10 variables suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\dfrac{1}{2}$ (on reconnait le nombre de succès lors de la répétition de 10 expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre).

Retour à la planche 8

Corrigé de l'exercice de la planche 9

On dispose initialement d'une urne U_0 contenant 1 boule blanche et 2 boules rouges.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remplit ensuite l'urne U_{n+1} avec 3 boules de la facon suivante. On effectue 3 tirages avec remise dans l'urne U_n, et pour chaque boule rouge (respectivement blanche) tirée, on place une nouvelle boule rouge (respectivement blanche) dans l'urne U_{n+1}.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne U_n. En particulier $Y_0 = 1$.

1. La variable aléatoire Y_1 est égale au nombre de succès ("obtenir une boule blanche") lors de la répétition de 3 expériences de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès $\dfrac{1}{3}$, donc Y_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.

2. Par le même raisonnement, sachant que $[Y_n = k]$, la variable aléatoire Y_{n+1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \dfrac{k}{3}\right)$.

3.

```
import random as rd

def simule_Y(n):
    L = [1]
    for k in range(n):
        s = 0
        for i in range(3):
            if rd.random() < L[k]/3:
                s += 1
        L.append(s)
   return L
```

4. a. Sachant que $[Y_n = k]$, la variable aléatoire Y_{n+1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \dfrac{k}{3}\right)$. L'espérance de cette loi, étant égale à k, le résultat est immédiat.

   b. Les variables aléatoires Y_{n+1} et Y_n étant finies, elles admettent une espérance. En utilisant la formule des probabilités totales avec $([Y_n = k])_{0 \leqslant k \leqslant 3}$ comme système complet, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{3} j\mathbb{P}(Y_{n+1} = j) \\
&= \sum_{j=0}^{3} j \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(Y_n = k)\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \left(\sum_{j=0}^{3} j\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) \right) \mathbb{P}(Y_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{3} k\mathbb{P}(Y_n = k) \\
&= \mathbb{E}(Y_n).
\end{aligned}$$

   c. On trouve alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_0) = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \mathbb{P}\left(Y_n = 0\right),\ b_n = \mathbb{P}\left(Y_n = 1\right)\ c_n = \mathbb{P}\left(Y_n = 2\right)$ et $d_n = \mathbb{P}\left(Y_n = 3\right)$.

5. En utilisant la formule des probabilités totales avec $([Y_n = k])_{0\leqslant k\leqslant 3}$ comme système complet, on trouve :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} + c_{n+1} &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) + (Y_{n+1} = 2) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(Y_n = k)\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 1) + \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(Y_n = k)\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 2) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \mathbb{P}(Y_n = k)\frac{k(3-k)^2}{9} + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{P}(Y_n = k)\frac{k^2(3-k)}{9} \\
&= \frac{2}{3}\mathbb{P}(Y_n = 1) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(Y_n = 2) \\
&= \frac{2}{3}\left(b_n + c_n\right).
\end{aligned}$$

6. La suite $(b_n + c_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, elle converge donc vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant b_n \leqslant b_n + c_n$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ et de même $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $[Y_n = 0] \subset [Y_{n+1} = 0]$, $a_n \leqslant a_{n+1}$. La suite (a_n) est donc croissante. Puisqu'elle est majorée par 1, elle converge. La suite (d_n) converge par le même argument.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $1 = \mathbb{E}(Y_n) = b_n + 2c_n + 3d_n$, la suite (d_n) converge vers $\dfrac{1}{3}$. Puisque $a_n = 1 - b_n - c_n - d_n$, la suite (a_n) converge vers $\dfrac{2}{3}$.

9. On note T le numéro de la première urne ne contenant que des boules rouges ou que des boules blanches.

   a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que l'événement $[T > n] = [Y_n = 1] \cup [Y_n = 2]$. En effet, si l'urne n ne contient pas que des boules de même couleur, c'est qu'il y a encore une ou deux boules blanches. Ainsi, par disjonction des cas, on trouve que :
   $$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(Y_n = 1) + \mathbb{P}(Y_n = 2) = b_n + c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

   b. Remarquons que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

   La variable T suit donc la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$. Elle admet une espérance, égale à 3.

Retour à la planche 9

Corrigé de l'exercice de la planche 10

1. a. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes opératoires. Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

   b. La fonction g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes opératoires et : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = 2x\ln|x| + x$. De plus, pour x au voisinage de 0, on a : $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. La fonction g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. Puisque $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0 = g'(0)$, la fonction g' est continue en 0. On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \begin{cases} 2x\ln|x| + x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   c. La fonction g' est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes opératoires et : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = 2\ln|x| + 3$. De plus, pour x au voisinage de 0, on a $\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. La fonction g' n'est donc pas dérivable en 0, On en déduit que g n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $af_0 + bf_1 + cf = 0$. En évaluant en $x = 0$, on trouve $a = 0$. En évaluant en $x = 1$, on trouve $b = 0$. Puisque la fonction f est non nulle, $c = 0$. La famille (f_0, f_1, f) est donc libre ; on en déduit qu'il s'agit d'une base de $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f)$.

3. a. Montrons que Φ est définie sur F. Soit $\varphi \in F$. Il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda f$ et ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x\varphi(x) = \lambda_0 x f_0(x) + \lambda_1 x f_1(x) + \lambda g(x).$$
   Puisque f_0, f_1 et g sont dérivables, $\Phi(\varphi)$ existe bien et $\Phi(\varphi)(x) = \lambda_0 + 2\lambda_1 x + \lambda g'(x)$.
   Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\psi \in F$. Puisque $\Phi(a\varphi + \psi)$ est la dérivée de la fonction :
$$x \mapsto x\,(a\varphi(x) + \psi(x)) = ax\varphi(x) + x\psi(x),$$
   on trouve, par linéarité de la dérivation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(a\varphi_1 + \varphi_2)(x) = a\Phi(\varphi_1)(x) + \Phi(\varphi_2)(x)$. On en déduit que $\Phi(a\varphi_1 + \varphi_2) = a\Phi(\varphi_1) + \Phi(\varphi_2)$. L'application $\Phi : \varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est donc bien linéaire.

   b. D'après les calculs précédents, on trouve :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(f_0)(x) = 1 = f_0(x),\ \Phi(f_1)(x) = 2x = 2f_1(x),\ \Phi(f)(x) = g'(x) = 2f(x) + x = f_1(x) + 2f(x).$$
   On trouve bien que $\Phi(f_0) = f_0$, $\Phi(f_1) = 2f_1$ et $\Phi(f) = f_1 + 2f$.

   c. L'application Φ est bien linéaire. En remarquant que $\Phi(f_0)$, $\Phi(f_1)$ et $\Phi(f)$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, f)$, on trouve que : $\forall \varphi \in F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f),\ \Phi(\varphi) \in F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f)$. On en déduit que Φ est un endomorphisme de F. D'après la question précédente, sa matrice dans la base (f_0, f_1, f) est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   d. La matrice A est triangulaire supérieure. On peut donc lire son spectre sur la diagonale. On en déduit que 0 n'est pas valeur propre, A est inversible. Après calculs, on trouve que la matrice de Φ^{-1} dans la base $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, f)$ est :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   e. Remarquons que 1 et 2 sont les deux seules valeurs propres de Φ. Or :
$$\mathrm{rg}(A - I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \text{ et } \mathrm{rg}(A - 2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$
   Par le théorème du rang, on trouve que la somme des dimensions des espaces propres est :
$$\dim \mathrm{Ker}(A - I_3) + \dim \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = 2 \neq 3.$$
   L'endomorphisme Φ n'est donc pas diagonalisable.

Retour à la planche 10

Corrigé de l'exercice de la planche 11

1. La première et la troisième colonne de $M(a)$ sont égales, et non nulles si et seulement si $a \neq 0$.
   La deuxième colonne de $M(a)$ est linéairement indépendante des deux autres colonnes. Ainsi :
$$\text{rg}\left(M(a)\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ 2 & \text{si } a \neq 0. \end{cases}.$$

2. Puisque $\text{rg}(M(a)) \neq 3$, la matrice $M(a) = M(a) - 0.I_3$ n'est pas inversible donc 0 est une valeur propre de $M(a)$ et f_a. Par lecture de la matrice $M(a)$, $f_a(e_2) = e_2$, donc 1 est aussi une valeur propre de f_a.

3. • On se place dans le cas où $a = 0$. Alors $M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc : $\text{Ker}(f_0) = \text{Vect}(e_1, e_3)$.
   Puisque la famille (e_1, e_3) est libre, elle forme une base du noyau de f_0.
   • On se place dans le cas où : $a \neq 0$. Alors :
$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f_a) \Leftrightarrow M(a)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax + az = 0 \\ y = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0. \end{cases}$$
   Ainsi $\text{Ker}(f_a) = \text{Vect}(e_1 - e_3)$. Puisque le vecteur $e_1 - e_3$ est non nul, il forme une base du noyau de f_a.

4. Puisque $M(a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} = 2a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_a(e_1 + e_3) = 2a(e_1 + e_3)$. Puisque $e_1 + e_3 \neq 0$, le vecteur $e_1 + e_3$ est un vecteur propre de f_a, associé à la valeur propre $2a$.
   • On se place dans le cas où : $2a \notin \{0; 1\}$, i.e. $a \notin \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$.
   L'endomorphisme f_a admet donc trois valeurs propres distinctes (0, 1 et $2a$) donc f_a est diagonalisable dans ce cas. De plus $E_0 = \text{Vect}(e_1 - e_3)$, $E_1 = \text{Vect}(e_2)$ et $E_{2a} = \text{Vect}(e_1 + e_3)$.
   • On se place dans le cas où $2a = 1$, i.e. $a = \dfrac{1}{2}$. On a alors $\text{Sp}(f_a) = \{0, 1\}$.
   Les vecteurs e_2 et $e_1 + e_3$ sont deux vecteurs propres de f_a associés à la même valeur propre 1. Ces deux vecteurs étant linéairement indépendants, la dimension du sous-espace propre E_1 est supérieure ou égale à 2.
   Or f_a admet aussi 0 comme valeur propre, donc le sous-espace propre E_0 est de dimension supérieure ou égale à 1.
   La somme des dimensions des espaces propres de f_a est donc supérieure ou égale à 3 donc égale à 3 et f_a est diagonalisable et $E_1 = \text{Vect}(e_2, e_1 + e_3)$ et $E_0 = \text{Vect}(e_1 - e_3)$.
   • On se place dans le cas où $2a = 0$, i.e. $a = 0$. On a alors $\text{Sp}(f_a) = \{0, 1\}$.
   Alors $e_1 + e_3$ et $e_1 - e_3$ sont deux vecteurs propres associés à 0, linéairement indépendants, ils forment donc une base de $E_0 = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_1 - e_3)$. Puisque $E_1 = \text{Vect}(e_2)$, on trouve encore que f_a est diagonalisable.

   Dans tous les cas, f_a est diagonalisable.

5. a. Par définition, F est inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Puisque la matrice nulle commute avec A, elle appartient à F.
   Soient α_1 et α_2 deux réels, et M_1 et M_2 deux éléments de F. Calculons :
$$\begin{aligned} A(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) &= \alpha_1 A M_1 + \alpha_2 A M_2 \\ &= \alpha_1 M_1 A + \alpha_2 M_2 A \text{ car } M_1 \in F \text{ et } M_2 \in F \\ &= (\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2)A. \end{aligned}$$
   Ainsi $(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) \in F$. Donc F est stable par combinaison linéaire.
   En conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Soient a_1 et a_2 deux réels, et soient Q_1 et Q_2 deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned} g(a_1Q_1 + a_2Q_2) &= \Big((a_1Q_1 + a_2Q_2)(\lambda_1), (a_1Q_1 + a_2Q_2)(\lambda_2), (a_1Q_1 + a_2Q_2)(\lambda_3) \Big) \\ &= a_1\Big(Q_1(\lambda_1), Q_1(\lambda_2), Q_1(\lambda_3)\Big) + a_2\Big(Q_2(\lambda_1), Q_2(\lambda_2), Q_2(\lambda_3)\Big) \\ &= a_1 g(Q_1) + a_2 g(Q_2). \end{aligned}$$

Ainsi g est une application linéaire.
Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q \in \operatorname{Ker} g$. Ainsi $g(Q) = 0_{\mathbb{R}^3}$, donc $(Q(\lambda_1), Q(\lambda_2), Q(\lambda_3)) = (0,0,0)$. Ainsi Q admet au moins trois racines, qui sont supposées distinctes. Or Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, donc Q est nécessairement le polynôme nul. On en déduit que $\operatorname{Ker}(g) = \{0\}$ donc que g est injective.
D'après le théorème du rang ($\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie) on a :

$$\dim \operatorname{Im}(g) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \operatorname{Ker}(g) = 3 - 0 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

On en déduit que $\operatorname{Im}(g) = \mathbb{R}^3$, i.e. g est surjective.
L'application g est bien un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

c. La matrice A est de taille 3 et possède trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable : il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Puisque $C = P^{-1}MP$, on trouve que $M = PCP^{-1}$, puis :

$$\begin{aligned} M \in F &\Leftrightarrow AM = MA \\ &\Leftrightarrow (PDP^{-1})(PCP^{-1}) = (PCP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &\Leftrightarrow P(DC)P^{-1} = P(CD)P^{-1} \\ &\Leftrightarrow DC = CD \end{aligned}$$

d. Considérons $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$ (on évite la notation c_i qui est utilisée dans la suite de l'énoncé) et calculons :

$$CD = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\lambda_1 & a_2\lambda_2 & a_3\lambda_3 \\ b_1\lambda_1 & b_2\lambda_2 & b_3\lambda_3 \\ d_1\lambda_1 & d_2\lambda_2 & d_3\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs :

$$DC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\lambda_1 & a_2\lambda_1 & a_3\lambda_1 \\ b_1\lambda_2 & b_2\lambda_2 & b_3\lambda_2 \\ d_1\lambda_3 & d_2\lambda_3 & d_3\lambda_3. \end{pmatrix}$$

Après calculs, on trouve que :

$$CD = DC \Leftrightarrow a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = d_1 = d_2 = 0.$$

Ainsi : C commute avec D si et seulement si C est diagonale.
On en déduit que :

$$\begin{aligned} M \in F &\Leftrightarrow DC = XD \\ &\Leftrightarrow C = P^{-1}MP \text{ est diagonale} \\ &\Leftrightarrow \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3,\ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3,\ M = P \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

e. Supposons que $M \in F$.

D'après la question 5.d, il existe trois réels c_1, c_2, c_3 tels que $M = P \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} P^{-1}$.

D'après la question 5.b, puisque g est une application bijective, il existe un unique polynôme $Q = uX^2 + vX + w$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $g(Q) = (c_1, c_2, c_3)$, autrement dit tel que $Q(\lambda_1) = c_1,\ Q(\lambda_2) = c_2,\ Q(\lambda_3) = c_3$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M &= P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & Q(\lambda_3) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= uP \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} P^{-1} + vP \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} + wI_3 \\ &= uA^2 + vA + wI_3 = Q(A). \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $M = Q(A)$ où $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Puisque la matrice A commute avec I_3, A et A^2, elle commute avec toute combinaison linéaire de ces trois matrices, en particulier A commute avec $Q(A)$, garantissant alors que $M \in F$.

On en déduit donc que les matrices qui commutent avec A sont exactement les matrices M de la forme $Q(A)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$, i.e. $F = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.

f. Ici $a = 1$ donc $M(1)$ a trois valeurs propres distinctes d'après le résultat de la question 4. On peut donc appliquer le résultat de la question 5.e. Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$. Montrons la liberté de la famille (I_3, A, A^2) pour conclure. Soient γ_1, γ_2 et γ_3 trois scalaires tels que $\gamma_1 I_3 + \gamma_2 A + \gamma_3 A^2 = 0$. Après calculs, on trouve alors :

$$\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 = 0,\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0,\ \gamma_2 + 2\gamma_3 = 0.$$

Les deux premières équations donnent $\gamma_3 = 0$, ce qui entraîne $\gamma_2 = 0$ avec la troisième équation, donc $\gamma_1 = 0$ avec la première équation. Ainsi la famille (I_3, A, A^2) est libre.

Conclusion : (I_3, A, A^2) est une base de F.

Retour à la planche 11

Corrigé de l'exercice de la planche 12

1. a. On réalise les produits matriciels suivants :

$$X^TDX = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1x_1 \\ \vdots \\ d_nx_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2.$$

b. • Supposons que tous les coefficients de D soient strictement positifs. Soit X un vecteur colonne non nul. Il existe donc $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0} \neq 0$. D'après la question précédente, on a :

$$X^TDX = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 \geqslant d_{i_0} x_{i_0}^2 > 0.$$

• Réciproquement, supposons que $X^TDX > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En choisissant le vecteur colonne X tel que $x_i = 1$ et $x_k = 0$ pour tout $k \neq i$, on trouve que :

$$0 < X^TDX = d_i.$$

On en déduit que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs si et seulement si $X^TDX > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.

2. a. Le vecteur U_1 est non nul et $AU_1 = 4U_1$ donc U_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

b. On prouve une propriété du cours :

$$AX = X \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow X \in \operatorname{Ker}(A - I_3).$$

L'ensemble des vecteurs X tels que $AX = X$ est donc $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ qui est bien un sous-espace propre de A (associé à la valeur propre 1).
Remarquons que $AU_2 = U_2$ et $AU_3 = U_3$ puis que les vecteurs U_2 et U_3 sont normés et orthogonaux $\left(U_2^TU_3 = 0\right)$. On en déduit que la famille (U_2, U_3) est une famille orthonormée donc libre. En particulier la dimension de l'espace propre de A associé à la valeur propre 1 est supérieure ou égale à 2. Ainsi la somme des dimensions des espaces propres de A est supérieure ou égale à 3 donc est égale à 3 (car $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). On en déduit en particulier que $\dim \operatorname{Ker}(A - I_3) = 2$ puis que (U_2, U_3) en est une base (c'est une famille libre de cet espace de même cardinal que la dimension de l'espace en question).
On a donc bien prouvé que $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ admet pour base orthonormée (U_2, U_3).

c. La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}U_1, U_2, U_3\right)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers cette base orthonormée. On trouve alors que :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et $P^TP = I_3$. On trouve alors que :

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PD^2P^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. On trouve alors que :

$$A = PD^2P^T = (PD)\left(DP^T\right) = (PD)(PD)^T = MM^T$$

où $M = PD$ (on pouvait aussi choisir $M = PDP^T$). Puisque $0 \notin \operatorname{Sp}(D)$, D est inversible. La matrice M est donc inversible (comme produit de deux matrices inversibles).

e. Remarquons que $C^T = \left((M^{-1})^T\right)^T B^T(M^{-1})^T = M^{-1}B(M^{-1})^T = C$. La matrice C est bien symétrique réelle. D'après le théorème spectral, il existe une matrice diagonale Δ et une matrice orthogonale Q telles que $C = Q\Delta Q^T$. Ainsi :

$$MQ\Delta(MQ)^T = MQ\Delta Q^T M^T = MCM^T = MM^{-1}B(M^{-1})^T M^T = B.$$

f. On trouve immédiatement que : $RR^T = MQQ^TM^T = MM^T = A$.

3. a. Pour tout vecteur non nul X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$0 < X^T(A-B)X = X^T\left(RR^T - R\Delta R^T\right)X = X^T\left(RI_3R^T - R\Delta R^T\right)X = X^T R\left(I_3-\Delta\right)R^T X$$

On pourrait poser $S = R\left(I_3 - \Delta\right)R^T$, mais S dépendrait aussi de R.

Posons $S = I_3 - \Delta$. Soit Y un vecteur colonne non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède et par inversibilité de R, on a :

$$Y^TSY = Y^T(I_3-\Delta)Y = \left(Y^TR^{-1}\right)R\left(I_3-\Delta\right)R^T\left(\left(R^T\right)^{-1}Y\right) = \left(\left(R^{-1}\right)^TY\right)^T R\left(I_3-\Delta\right)R^T\left(\left(R^{-1}\right)^TY\right) > 0.$$

b. Remarquons que S est une matrice diagonale. D'après la question 1.b, il vient que les coefficients diagonaux de $S = I_3 - \Delta$ sont strictement positifs, donc que ceux de Δ sont tous strictement inférieurs à 1.

Retour à la planche 12

Corrigé de l'exercice de la planche 13

1. a. On commence par remarquer que $N(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement "on tire une boule blanche au k-ème tirage".
Si $k = 2$, $\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{k(k-1)}$.
Si $k \geqslant 3$, on trouve, via la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}\left(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2} \cap \overline{B_{k-1}}\right)\\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ldots\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots B_{k-3}}(B_{k-2})\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots B_{k-2}}\left(\overline{B_{k-1}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{k-2}{k-1}\times\frac{1}{k}\\ &= \frac{1}{k(k-1)}.\end{aligned}$$

b. Pour tout $k \geqslant 2$, $k\mathbb{P}(N = k) = \dfrac{1}{k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k}$. Puisque la série harmonique diverge et puisque la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} k\mathbb{P}(N = k)$ est à termes positifs, elle diverge d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs.

2. a. Notons $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Remarquons que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$.
Si $x < 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$. Si $x \geqslant 0$, alors :

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(\ln(1-U) \geqslant -\lambda x) = \mathbb{P}\left(1-U \geqslant e^{-\lambda x}\right) = \mathbb{P}\left(U \leqslant 1-e^{-\lambda x}\right) = 1-e^{-\lambda x} \text{ car } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[.$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi usuelle : $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

b.
```python
import random as rd
import numpy as np

def T(l):
    N = 2
    while rd.random() > 1/N: # tant qu'on tire une boule blanche
        N += 1
    maxi = -np.log(1-rd.random())/l # simulation de X_1
    for k in range(N-1):
        x = -np.log(1-rd.random())/l # simulation de X_2,...,X_N
        if x > maxi:
            maxi = x
    return maxi
```

c. En exécutant le code ci-dessous, on trouve que $\mathbb{E}(T) \approx 2$ (d'après la loi faible des grands nombres).

```python
nb_exp = 10000
somme = 0
for k in range(nb_exp):
    somme += T(1)
print("moyenne empirique = ", somme/nb_exp)
```

3. a. Pour tout $t \in [0,x]$, $t \neq 1$; ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t} = \frac{1-t^{n+1}}{1-t} + \frac{t^{n+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t}$$

b. En intégrant sur $[0,x]$ l'égalité précédente (toutes les fonctions en jeu sont continues sur $[0,x]$) et par linéarité de l'intégrale, on trouve :
$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$
Or :
$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x)$$
et :
$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n} t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k}.$$
On en déduit que :
$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

c. Pour tout $t \in [0,x]$, $0 < 1-x \leqslant 1-t$ et ainsi $0 \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1-t} \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1-x}$. Par croissance de l'intégrale ($0 \leqslant x$), on trouve que :
$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}.$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)} = 0$, on trouve par encadrement que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.$$
Par passage à la limite de la question 3.b, on trouve immédiatement que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

d. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{x^k}{k-1} - \frac{x^k}{k}\right)\\
&= \left(\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k-1}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k}\right)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n}\frac{x^k}{k}\right)\\
&= \left(-\frac{x^{n+1}}{n} + x\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\right) - \left(-x + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -x\ln(1-x) + x + \ln(1-x) = \varphi(x).
\end{aligned}$$
On en déduit en particulier que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2}\dfrac{x^k}{k(k-1)}$ converge et que sa somme vaut $\varphi(x)$.

4.
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(N=k)}(T \leqslant x) &= \mathbb{P}_{(N=k)}\left(\max(X_1,\dots,X_k) \leqslant x\right)\\
&= \mathbb{P}_{(N=k)}(X_1 \leqslant x,\dots,X_k \leqslant x)\\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x,\dots,X_k \leqslant x) \text{ par indépendance de } N \text{ et } X_1,\dots,X_k\\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)\dots\mathbb{P}(X_k \leqslant x)\\
&= (F(x))^k.
\end{aligned}$$

Puisque $([N = k])_{k\geqslant 2}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que (et la série converge par σ-additivité) :

$$\mathbb{P}(T \leqslant x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\mathbb{P}_{(N=k)}(T \leqslant x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(F(x))^k}{k(k-1)} = \varphi(F(x)) \text{ car } F(x) \in [0,1[.$$

5. La fonction de répartition de T est donc la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi\left(1 - e^{-\lambda x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Remarquons que φ est dérivable sur $[0,1[$ et :

$$\forall x \in [0,1[,\ \varphi'(x) = 1 - \ln(1-x) - 1 = -\ln(1-x).$$

Par composition, cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Une densité de T est donnée par la fonction :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}\varphi'\left(1 - e^{-\lambda x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

6. La variable aléatoire T admet une espérance si, et seulement si l'intégrale ci-dessous converge :

$$\int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x.$$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$. converge en tant que moment d'ordre 2 de la loi exponentielle de paramètre λ (par exemple $\mathbb{E}(X_1^2)$). On en déduit que T admet une espérance par linéarité et, en utilisant la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{E}(T) = \lambda\mathbb{E}(X_1^2) = \lambda\left(\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)\right) = \frac{2}{\lambda}.$$

Si $\lambda = 1$, on trouve $\mathbb{E}(T) = 2$, ce qu'on a trouvé de manière approchée à la question 2.c.

Retour à la planche 13

Corrigé de l'exercice de la planche 14

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1], f(x) = \dfrac{1}{3}\left(-e^{-x} + \ln\left(1+x^2\right)\right)$.

1. a. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ par les théorèmes opératoires et :
$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = \frac{1}{3}\left(e^{-x} + \frac{2x}{1+x^2}\right) \text{ et } f''(x) = \frac{1}{3}\left(-e^{-x} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right).$$
Soit $a \in [0,1]$. Une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $A = (a, f(a))$ est :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$
b. Pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant \dfrac{e^{-x}}{3} \geqslant \dfrac{e^{-1}}{3}$ (par décroissance de $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0,1]$).
D'après l'inégalité triangulaire, on a :
$$\forall x \in [0,1], |f''(x)| = \frac{1}{3}\left|-e^{-x} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right| \leqslant \frac{1}{3}\left(\left|-e^{-x}\right| + \left|\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right|\right) \leqslant \frac{1}{3}\left(1 + 2(1-x^2)\right) \leqslant 1.$$
c. D'après la question précédente, la fonction f est strictement croissante et continue sur $[0,1]$. D'après le théorème de la bijection, la fonction f réalise sur une bijection de $[0,1]$ vers $[f(0), f(1)]$. Puisque $0 \in]f(0), f(1)[$, il existe un unique réel ℓ de $]0,1[$ tel que $f(\ell) = 0$.

2. Soit $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \neq b$. On pose φ la fonction définie sur $[0,1]$ par :
$$\forall x \in [0,1], \varphi(x) = f(a) - f(x) - (a-x)f'(x) - \frac{1}{2}(a-x)^2\gamma,$$
où γ est un réel tel que $\varphi(b) = 0$.
a. Puisque f est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ par théorèmes opératoires et :
$$\forall x \in [0,1],\ \varphi'(x) = -(a-x)f''(x) + \gamma(a-x).$$
b. Remarquons que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Puisque φ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, il existe un réel c compris strictement entre a et b tel que $\varphi'(c) = 0$ d'après le théorème de Rolle.
c. On déduit des deux questions précédentes que $\gamma = f''(c)$ puisque $c \neq a$. En exploitant l'égalité $\varphi(b) = 0$, on trouve alors :
$$f(b) = f(a) - (a-b)f'(b) - \frac{1}{2}(a-b)^2 f''(c).$$

3. a. En exécutant le code ci-dessous, on remarque que la suite (u_n) semble converger rapidement vers un nombre proche de $0,76822$.

```
import numpy as np

def f(x):
    return (-np.exp(-x) + np.log(1+x**2))/3

def fprime(x):
    return (np.exp(-x) + 2*x/(1+x**2))/3

def valeurs(a,n):
    u = a
    L = [a]
    for k in range(n):
        u = u - f(u)/fprime(u)
        L.append(u)
    return L

for a in [0.3, 0.5, 0.8]:
    print(valeurs(a, 12))
```

b. On souhaite appliquer le résultat de la question 2.c à $a = \ell$ et $b = u_n$. Il faudrait pour cela montrer que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qu'on admettra ici.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2.c, il existe z_n compris entre ℓ et u_n tel que :

$$f(u_n) = f(\ell) - (\ell - u_n)f'(u_n) - \frac{1}{2}(\ell - u_n)^2 f''(z_n) = -(\ell - u_n)f'(u_n) - \frac{1}{2}(\ell - u_n)^2 f''(z_n).$$

En réinjectant dans la relation de récurrence, on trouve alors que :

$$u_{n+1} - \ell = \frac{(u_n - \ell)^2}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(u_n)}.$$

c. Montrons le résultat par récurrence.

- $\left(\frac{3e}{2}\right)^{2^0 - 1} |u_0 - \ell|^{2^0} = |u_0 - \ell|$ donc la propriété est initialisée.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3e}{2}\right)^{2^n - 1} |u_0 - \ell|^{2^n}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &= \frac{|u_n - \ell|^2}{2} \frac{|f''(z_n)|}{|f'(u_n)|} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3e}{2}\right)^{2^{n+1}-2} |u_0 - \ell|^{2^{n+1}} \times 3e \quad \text{d'après la question 1.b} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3e}{2}\right)^{2^{n+1}-2} |u_0 - \ell|^{2^{n+1}} \times 3e \quad \text{d'après la question 1.b} \\ &\leqslant \left(\frac{3e}{2}\right)^{2^{n+1}-1} |u_0 - \ell|^{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

  La propriété est donc héréditaire.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3e}{2}\right)^{2^n - 1} |u_0 - \ell|^{2^n}$.

d. En supposant que $|u_0 - \ell| \leqslant \frac{2}{10}$, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3e}{2}\right)^{2^n - 1} |u_0 - \ell|^{2^n} \leqslant \frac{2}{3e}\left(\frac{3e}{10}\right)^{2^n}$$

Puisque $0 < e < 3$, $\frac{3e}{10} \in]-1,1[$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{3e}\left(\frac{3e}{10}\right)^{2^n} = 0$ et ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

On peut résoudre les inéquations $\frac{2}{3e}\left(\frac{3e}{10}\right)^{2^n} \leqslant 10^{-2}$ et $\frac{2}{3e}\left(\frac{3e}{10}\right)^{2^n} \leqslant 10^{-5}$ ou bien exécuter le code suivant pour trouver les valeurs de n recherchées (on trouve $n = 4$ puis $n = 6$).

```
n = 0
x = 1/5
while x > 10**(-2):
    n += 1
    x = 2/(3*np.exp(1)) * (3*np.exp(1)/10)**(2**n)
print(n)
while x > 10**(-5):
    n += 1
    x = 2/(3*np.exp(1)) * (3*np.exp(1)/10)**(2**n)
print(n)
```

Retour à la planche 14

Corrigé de l'exercice de la planche 15

1. On propose deux solutions, l'une en modélisant les sommets par des entiers de 0 à 3, l'autre à l'aide d'un dictionnaire.

```
import random as rd

def positionA(n):
    voisins = [[1,2,3], [0,2], [0,1,3], [0,2]]
    pos = 0
    nb_A = 1
    for k in range(n):
        pos = rd.choice(voisins[pos])
        if pos == 0:
            nb_A += 1
    return nb_A/n

def positionA(n):
    voisins = {"A":["B","C","D"], "B":["A","C"], "C":["A","B","D"], "D":["A","C"]}
    pos = "A"
    nb_A = 1
    for k in range(n):
        pos = rd.choice(voisins[pos])
        if pos == "A":
            nb_A += 1
    return nb_A/n
```

En exécutant le programme ci-dessous, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \approx 0,3$ (en supposant que la suite converge).

```
for k in range(1,6):
    n = 10**k
    print(positionA(n))
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque (A_n, B_n, C_n, D_n) forme un système complet d'événements, on trouve via la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(D_n)\mathbb{P}_{D_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}d_n.$$

De la même manière, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n,\ b_{n+1} = d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n.$$

3. a. En remarquant que $d_0 = b_0 = 0$ et $b_{n+1} = d_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites (b_n) et (d_n) sont égales. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{9}(a_n + c_n) = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}b_{n+1}.$$

La suite (b_n) vérifie donc une relation de récurrence d'ordre 2. Après résolution de l'équation caractéristique associée et en utilisant les conditions initiales ($b_0 = 0$ et $b_1 = \frac{1}{3}$), on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{1}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} + c_{n+1} = 3b_{n+2} = \dfrac{3}{5}\left(1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+2}\right)$.

c. On trouve sans difficulté que la suite $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_n - c_n).$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n - c_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n (a_0 - c_0) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

d. En utilisant les deux questions précédentes, on trouve que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ a_n &= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]\\ c_n &= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right].\end{aligned}$$

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les variables aléatoires X_n et Y_n ne prennent pour valeurs que 0 et 1. Elles suivent donc des lois de Bernoulli de paramètres respectifs :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(B_n \cup C_n) = b_n + c_n \text{ et } \mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(C_n \cup D_n) = b_n + c_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(Y_n = 1) &= c_n - (b_n + c_n)^2\\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0\\ \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{9}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair non nul}\\ \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{9}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}\end{aligned}$$

- Si $n = 0$, les événements $[X_n = 1]$ et $[Y_n = 1]$ sont indépendants. Puisque les variables X_n et Y_n ne prennent que deux valeurs, elles sont indépendantes (si A et B sont indépendants, alors les variables des couples $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$ et $(\overline{A}, \overline{B})$ le sont aussi.
- Si n est pair non nul, alors :

$$\mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(Y_n = 1) \geqslant \frac{1}{20} - \frac{1}{36} > 0$$

Les variables aléatoires X_n et Y_n ne sont donc pas indépendantes.
- Si n est impair, on vérifie sans difficulté (en machine par exemple que $\mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(Y_n = 1) \neq 0$ pour $n = 1$ et $n = 3$ et :

$$\forall n \geqslant 5,\ \mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(Y_n = 1) \geqslant \frac{1}{20} - \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^5 > 0$$

Les variables aléatoires X_n et Y_n ne sont donc pas indépendantes.

Conclusion : X_n et Y_n sont indépendantes si, et seulement si $n = 0$.

c. Les variables aléatoires X_n et Y_n sont finies, le couple (X_n, Y_n) admet donc une covariance, donnée par la formule de König-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = \mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

5. a. À l'aide de la question 2, on trouve immédiatement :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Soit λ une valeur propre de M et soit X un vecteur propre associé. On trouve alors que $M^4X - \frac{7}{9}M^2X - \frac{2}{9}MX = 0$. Puisque $M^kX = \lambda^kX$ (pas au programme mais à connaître) pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left(\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda\right) X = 0$$

Puisque $X \neq 0$ (c'est un vecteur propre), $\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0$.

c. Remarquons que 0 et 1 sont solutions évidentes de l'équation précédente. Après factorisation, on trouve que :

$$\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda^2 + \lambda + \frac{2}{9} = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{0; 1; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}.$$

On obtient alors que $\mathrm{Sp}(M) \subset \left\{0; 1; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$.

On vérifie sans difficulté que $0,\ 1,\ -\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{3}$ sont valeurs propres et :

$$E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right),\ E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right),\ E_{-\frac{1}{3}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),\ E_{-\frac{2}{3}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Puisque la matrice M admet 4 valeurs propres distinctes et est de taille 4, elle est diagonalisable et $M = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

d. On peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^nU_0 = PD^nP^{-1}U_0$. Il suffit donc de calculer $PD^nP^{-1}U_0$ pour déterminer $a_n,\ b_n,\ c_n$ et d_n en fonction de n.

Retour à la planche 15

Corrigé de l'exercice de la planche 16

1. On trouve immédiatement que $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$.
2.
```python
import numpy as np

def X(l,m):
    x = 0
    N = np.random.poisson(l)
    for k in range(N):
        x += np.random.poisson(m)
    return x
```

3. Si aucun client n'est passé par la caisse au cours de la première heure, aucun article non plus. Ainsi $\mathbb{P}_{[N=0]}(X=0) = 1$ et $\mathbb{P}_{[N=0]}(X=0) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
4. C'est du cours, mais il faut savoir refaire la démonstration (à l'aide de la formule des probabilités totales).
5. Puisque $([N=k])_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n, N=k) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k=n, N=k) \quad \text{car } \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k=n, N=0)=0 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k=n)\mathbb{P}(N=k) \quad \text{par indépendance de } N \text{ et } X_1,\ldots,X_k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k\mu)^n}{n!}e^{-k\mu} \times \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k!n!}e^{-(\lambda+k\mu)}.
\end{aligned}$$

6. En admettant l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et les hypothèses de permutation des ordres de sommation, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k=n)\mathbb{P}(N=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k)\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k=n) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k)\mathbb{E}(X_1+\cdots+X_k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mu\mathbb{P}(N=k) \\
&= \mu\mathbb{E}(N) = \lambda\mu.
\end{aligned}$$

7. En appliquant la formule des probabilités totales avec le même système complet d'événements, on trouve que :

$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k=0)\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\mu}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{-\mu})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{-\mu}} = e^{\lambda(e^{-\mu}-1)},$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k!n!} e^{-(\lambda+k\mu)} = \frac{\mu^n e^{-\lambda}}{n!} \sum_{k=1}^{+\infty} k^n \frac{(\lambda e^{-\mu})^k}{k!} = \frac{\mu^n e^{-\lambda}}{n!} f_n(\lambda e^{-\mu}).$$

8. On trouve immédiatement que $f_0(x) = e^x - 1$ pour tout réel x et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{x^k}{k!} = e^x \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{x^k}{k!} e^{-x} = e^x \mathbb{E}(Z) = x e^x \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{P}(x).$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n+1} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^n \frac{x^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} (\ell+1)^n \frac{x^{\ell+1}}{\ell!} \\ &= x + \sum_{\ell=1}^{+\infty} (\ell+1)^n \frac{x^{\ell+1}}{\ell!} \\ &= x + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \ell^i \frac{x^{\ell+1}}{\ell!} \\ &= x + \sum_{i=0}^{n} x \binom{n}{i} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell^i \frac{x^\ell}{\ell!} \\ &= x + \sum_{i=0}^{n} x \binom{n}{i} f_i(x). \end{aligned}$$

10. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = x + x f_0(x) + x f_1(x) = x + x(e^x - 1) + x^2 e^x.$$

En déduire une expression de la fonction f_2.

11. On propose une fonction récursive.

```python
import numpy as np
import scipy.special as scis


def f(n,x):
    if n == 0:
        return np.exp(x)-1
    s = 1
    for i in range(n):
        s += scis.binom(n-1,i)*f(i,x)
    return x*s
```

On fera attention à la relation de récurrence : on écrit $f_n(x)$ (et non $f_{n+1}(x)$) en fonction de $f_0(x), \ldots, f_{n-1}(x)$.

12.

```python
def loiX(l,mu,n):
    if n==0:
        return np.exp(l*(np.exp(-mu) -1))
    return mu**n * np.exp(-l)/scis.factorial(n) * f(n,l*np.exp(-mu))
```

Retour à la planche 16

Corrigé de l'exercice de la planche 17

1. a. La fonction f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]\lim_{0^+} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie sans difficulté que $f(0,1) < 1 = n < f(n)$. Par croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$, on cherche donc x_n dans l'intervalle $[0,1;n]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,n):
    return np.log(x)+x - n

def dichotomie(a,b,n,eps):
    while b-a > 2*eps:
        c = (a+b)/2
        if f(a,n)*f(c,n)<0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2

x= [dichotomie(0.01,n,n,10**(-3)) for n in range(1,11)]
print(x)

abs = list(range(1,11))
plt.plot(abs,x)
plt.show()
```

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$. Puisque f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $x_{n+1} > x_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

2. a. La fonction $g : x \mapsto \ln x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

   On en déduit que la fonction g est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. Elle atteint donc son maximum en 1, qui vaut -1. La fonction g est donc strictement négative, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x < x$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} + \ln\left(\frac{n}{2}\right) < n = f(x_n) < n + \ln(n) = f(n)$, on trouve que $\frac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$ par croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

   c. D'après la question précédente et par comparaison de limites, on trouve que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2.b, on a

$$\frac{\ln(n) - \ln(2)}{n} \leqslant \frac{\ln(x_n)}{n} \leqslant \frac{\ln(n)}{n}.$$

   On conclut par croissances comparées : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0$. Puisque $\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln(x_n)}{n}$, on trouve que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$, i.e. $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

   b. D'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$. Ainsi :

$$x_{n+1} - x_n = n + 1 - \ln(x_{n+1}) - n + \ln(x_n) = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

4. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln n}$.

   a. En utilisant la même idée qu'à la question précédente, on trouve que

$$u_n - 1 = \frac{n - x_n - \ln n}{\ln n} = \frac{\ln x_n - \ln n}{\ln n} = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   b. D'après la question précédente, $1 - u_n = -\dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} = -\dfrac{1}{\ln n} \ln\left(1 + \dfrac{x_n - n}{n}\right)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - n}{n} = 0$, on trouve que $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n - x_n}{n \ln n} = \dfrac{1}{n} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

   c. En écrivant $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on trouve que :

$$x_n = n - \ln(n) u_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln n \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Retour à la planche 17

Corrigé de l'exercice de la planche 18

1. On cherche le rang du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p, et donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On a alors $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X_i) = \dfrac{q}{p^2}$.

2. Pour tous i et j, on a :

$$\mathbb{P}(X_i > j) = \sum_{k=j+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_i = k) = \sum_{k=j+1}^{+\infty} pq^{k-1} = p\sum_{k=j}^{+\infty} q^k = q^j$$

3. Soit j un entier naturel. Par indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$, on a alors :

$$\mathbb{P}(Y > j) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i > j]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > j) = q^{jn}.$$

Ainsi, Y a la même fonction de réparation qu'une loi géométrique de paramètre q^n, et donc suit cette loi.

4. On peut utiliser la fonction

```python
def NbMin(L):
    m = L[0]
    nb = 1
    for elem in L[1:]:
        if elem < m:
            m = elem
            nb = 1
        elif elem == m:
            nb = nb+1
    return nb
```

5. On en déduit le code

```python
import random as rd

def geom(p):
    i = 1
    while rd.random()>p:
        i = i+1
    return i

def N(n,p):
    joueurs = [geom(p) for _ in range(n)]
    return NbMin(joueurs)
```

6. Pour réaliser $[N = n]$, il faut et il suffit que tous les joueurs aient le même résultat. Donc

$$\mathbb{P}(N = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = k]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = k) \quad = \sum_{k=1}^{+\infty} p^n q^{n(k-1)} = \frac{p^n}{1-q^n}$$

7. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a alors

$$\mathbb{P}(N = k) = \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{card}(I) = k}} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i \in I}[X_i = \ell]\right) \bigcap \left(\bigcap_{j \in [\![1,n]\!] \setminus I} [X_j > \ell]\right)\right).$$

Fixons alors $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que $\operatorname{card} I = k$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i\in I}[X_i = \ell]\right) \bigcap \left(\bigcap_{j\in[\![1,n]\!]\setminus I} [X_j > \ell]\right)\right) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i = \ell) \prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus I} \mathbb{P}(X_j > \ell)\right)\\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} p^k q^{k(\ell-1)} q^{(n-k)\ell}\\ &= \frac{p^k}{q^k} \frac{q^n}{1-q^n}\\ &= \frac{p^k q^{n-k}}{1-q^n}\end{aligned}$$

Comme il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensemble de $[\![1,]\!]$ à k éléments, on retrouve bien le résultat voulu.

8. La variable aléatoire N est finie ; elle admet donc espérance et variance. En utilisant l'espérance d'une loi binomiale, on trouve :

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{1-q^n} \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{np}{1-q^n}.$$

De la façon, en utilisant le moment d'ordre 2 d'une loi binomiale, on trouve $\mathbb{E}(N^2) = \dfrac{npq + n^2p^2}{1-q^n}$, puis par la formule de König-Huygens,

$$\mathbb{V}(N) = \frac{npq + n^2p^2}{1-q^n} - \left(\frac{np}{1-q^n}\right)^2.$$

9. La fonction suivante permet de comparer l'espérance de N avec des valeurs trouvées par estimation :

```python
def EN(n,p,R=10000):
    eTh = (n*p)/(1-(1-p)**n)
    s = 0
    for _ in range(R):
        s += N(n,p)
    print("Theorique : ",eTh)
    print("Estimation : ", s/R)
```

En testant avec différentes valeurs de n et p, les valeurs semblent toujours proches.

Retour à la planche 18

Corrigé de l'exercice de la planche 19

1. a. La matrice A est diagonalisable car elle est symétrique à coefficients réels.

   b. Le programme donné permet de calculer le rang de $A - \lambda I_3$ pour $\lambda \in \{1, 2, 4\}$.

   c. • Dans le programme de la question précédente, on a obtenu le rang de $A - \lambda I_3$ pour $\lambda \in \{1, 2, 4\}$. Cela donne à chaque fois 2, A étant de taille 3, cela prouve que 1; 2 et 4 sont des valeurs propres de A et même les valeurs propres de A (car A a au maximum 3 valeurs propres). Chacun des sous-espaces propres de A est, d'après le théorème du rang, de dimension $3 - 2$, c'est à dire 1.

   • On complète le programme de la question précédente, par la ligne `la.eig(A)` afin d'accéder à des vecteurs propres. On nous propose $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ comme famille de vecteurs propres.

   • $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de A car $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est non nul et :

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

   Au passage, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. De même, on prouve que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4 et $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

   • La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ est, en tant que concaténation de familles libres de sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, une famille libre. Or c'est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ayant 3, soit la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, éléments. Ces arguments suffisent pour affirmer que c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. C'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

   d. Rappelons que A est symétrique à coefficients réels. On sait alors que ses espaces propres sont orthogonaux entre eux. Comme ils sont tous ici de dimension 1, on peut affirme que la base obtenue dans la question précédente est automatiquement orthogonale.

   e. On déduit, des questions précédentes et du fait que A est la matrice canoniquement associée à f, une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f, c'est :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)\right).$$

2. a. (i) La matrice A est la matrice canoniquement associée à f donc la matrice canoniquement associée à $f(v)$ est AY, celle canoniquement associée à u est X. D'après le cours, on sait que :

$$\begin{aligned}\langle u, f(v)\rangle &= \langle f(v), u\rangle \\ &= (AY)^T X \\ &= Y^T A^T X \\ &= Y^T AX \text{ car } A \text{ est symétrique.}\end{aligned}$$

   On a donc obtenu : $\phi(u, v) = Y^T AX$.

   (ii) De même, on a :

$$\begin{aligned}\phi(v, u) &= \langle v, f(u)\rangle \\ &= Y^T AX\end{aligned}.$$

(iii) De $\phi(u,v) = Y^T AX$et$\phi(v,u) = Y^T AX$, on déduit immédiatement que $\phi(u,v) = \phi(v,u)$.

b. (i) Supposons que u soit un vecteur propre de f. On sait alors que $u \neq 0$ et qu'il existe λ un réel tel que :

$$f(u) = \lambda u.$$

- Soit x un élément de F_u. On a alors :

$$\begin{aligned} \phi(u,x) &= \phi(x,u) \text{ d'après la question 2.a} \\ &= \langle x, f(u)\rangle \\ &= \langle x, \lambda u\rangle \\ &= \lambda\langle x, u\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque x appartient à l'ensemble des vecteurs orthogonaux à u. On a donc $x \in F'_u$ et donc $F_u \subset F'_u$.

- Soit x un élément de F'_u. On vient de voir que :

$$\phi(u,x) = \lambda\langle x, u\rangle.$$

Le vecteur x appartenant à F'_u, cela entraîne que $\phi(u,x) = 0$ et donc $\lambda\langle x,u\rangle = 0$. Comme $\lambda \neq 0$ (puisque les valeurs propres de f sont 2, 4 et 1), on en déduit que $\langle x, u\rangle = 0$ et donc x appartient à F_u. On a donc $x \in F_u$ et donc $F'_u \subset F_u$.

Bilan : on a bien, par double inclusion, prouvé que $F_u = F'_u$.

(ii) Prenons le contre-exemple suivant : $u = (1,0,0)$. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) \in F_u \Longleftrightarrow \langle (x,y,z), u\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in F'_u &\Longleftrightarrow \phi(u,(x,y,z)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \phi((x,y,z),u) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \langle (x,y,z), f(u)\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left\langle (x,y,z), \left(\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\right\rangle = 0 \quad \text{d'après les coefficients de } A \\ &\Longleftrightarrow 5x + 2y + z = 0 \end{aligned}$$

Avec ces équations, on constate que $(0,1,0)$ est un élément de F_u et pas de F'_u. On constate aussi que $(1,0,-5)$ est un élément de F'_u et pas de F_u. On peut donc conclure que F_u n'est pas toujours F'_u.

Retour à la planche 19

Corrigé de l'exercice de la planche 20

1. On reconnait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1. On trouve immédiatement que l'ensemble des solutions de (E) est $\mathrm{Vect}(g)$ où $g : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. Puisque $\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} g$, φ est solution de (E).

2. Pour tout $x > 0$, on a (d'après la question précédente) :
$$f(x) = \mathbb{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3. Soit $x > 0$. Pour tout $t \geqslant x$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x}$ donc $-\dfrac{\varphi'(t)}{t} \leqslant -\dfrac{\varphi'(t)}{x}$ car $-\varphi'(t) > 0$. Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales convergent), on trouve que :
$$f(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t}\,\mathrm{d} \leqslant -\int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{x}\,\mathrm{d} = \frac{\varphi(x)}{x}$$
On trouve alors que, pour tout $x > 0$, $0 \leqslant M(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ et ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} M(x) = 0$.

4. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \Phi(x)$. Puisque φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité de densité continue sur $\mathbb{R}$, f est dérivable et $f' = -\varphi$.

   b. Puisque les fonctions f et φ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction M est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ M'(x) = \frac{f'(x)\varphi(x) - f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = \frac{-\varphi^2(x) + xf(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x)} = \frac{xf(x) - \varphi(x)}{\varphi(x)}.$$
   D'après la question 3, $M' \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc M est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (par continuité en 0).

5. a.
```python
import scipy.stats as st
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def phi(x):
    return (1/np.sqrt(2*np.pi))* np.exp(-(x**2)/2)

def M(x):
    return st.norm.sf(x)/phi(x)

def g1(x):
    return 1/x

def g2(x):
    return 1/x - 1/(x**3)

abs = np.linspace(1,5,100)
ord = M(abs)
ord1 = g1(abs)
ord2 = g2(abs)
plt.plot(abs,ord,label="M")
plt.plot(abs,ord1,label="g1")
plt.plot(abs,ord2,label="g2")
plt.legend(loc = "best")
plt.show()
```

b. Soit $x > 0$. On sait que :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} -\frac{\varphi'(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Les fonctions φ et $t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[x, +\infty[$ et par croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} -\frac{\varphi(t)}{t} = 0$. Par intégration par parties on trouve que l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

converge et :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} -\frac{\varphi'(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\varphi(t)}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\varphi(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

c. Soit $x > 0$. Les fonctions φ et $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[x, +\infty[$ et par croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} -\frac{\varphi(t)}{t^3} = 0$. Par intégration par parties on trouve que l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} -\frac{3\varphi(t)}{t^4}\,\mathrm{d}t$$

converge et :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\varphi(t)}{t^3}\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{3\varphi(t)}{t^4}\,\mathrm{d}t \geqslant -\frac{\varphi(x)}{x^3}.$$

On en déduit le résultat :

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \leqslant M(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

On obtient alors un équivalent de $M(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$: $M(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Retour à la planche 20

Corrigé de l'exercice de la planche 21

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \left[(1-x)e^x\right]^n$ est continue sur le segment $[0,1]$. La suite (I_n) est donc bien définie. De plus, on trouve que $I_0 = 1$ et :

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x \, \mathrm{d}x = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 + \int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = e - 2.$$

2. a. C'est l'application directe du théorème des sommes de Riemann.
   b.

```python
import numpy as np

def I(n):
    N = 1000
    s = 0
    for k in range(N):
        s += ((1-k/N)*np.exp(k/N))**n
    return s/N
```

   c. Le script ci-dessous représente les 1000 premières valeurs de la suite $(\sqrt{n}I_n)$ qui semble converger vers un réel $\alpha \approx 1,25$.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

abs = [n for n in range(1,1001)]
ord = [np.sqrt(n)*I(n) for n in abs]
plt.plot(abs,ord)
plt.show()
```

3. a. La fonction $g : x \mapsto e^{-x} - 1 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 - e^{-x}$. On en déduit que g est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0 = 0, \text{ i.e. } e^{-x} \geqslant 1 - x.$$

   b. D'après la question précédente, on a : $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant (1-x)e^x \leqslant 1$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \left[(1-x)e^x\right]^{n+1} \leqslant \left[(1-x)e^x\right]^n.$$

   Par croissance de l'intégrale, la suite (I_n) est décroissante.

4. a. Puisque $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$, on trouve que : $H(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(1)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = 1$. La fonction H est donc prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[0,1[$, en posant $H(0) = 1$.
   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in [0,1[,\ \exp\left(-n\frac{x^2}{2}H(x)\right) = \left[e^x e^{\ln(1-x)}\right]^n = \left[(1-x)e^x\right]^n.$$

   Puisque l'intégrale I_n converge, l'intégrale

$$\int_0^1 \exp\left(-n\frac{x^2}{2}H(x)\right) \mathrm{d}x$$

   converge et

$$I_n = \int_0^1 \exp\left(-n\frac{x^2}{2}H(x)\right) \mathrm{d}x.$$

   La dernière égalité s'obtient en réalisant le changement de variable $u = \sqrt{n}x$ (la fonction $x \mapsto \sqrt{n}x$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0,1[$).

c. En utilisant une densité de la loi normale centrée réduite, on trouve que :

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in [0, \sqrt{n}]$. Puisque $H\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \geqslant H(0) = 1$, $\exp\left(-\frac{u^2}{2} H\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) \leqslant \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$. Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$I_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

5. a. La suite $u = \left(n^{-\frac{1}{4}}\right)$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in [0, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{4}} = +\infty$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $u_n \in [0, 1]$, on trouve par positivité de l'intégrande :

$$I_n \geqslant \int_0^{u_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(x)\right) \mathrm{d}x$$

De plus, pour tout $x \in [0, u_n]$, $H(x) \leqslant H(u_n)$ donc $\exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(x)\right) \geqslant \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(u_n)\right)$. On conclut par croissance de l'intégrale que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant \int_0^{u_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(u_n)\right) \mathrm{d}x$$

On effectue enfin le changement de variable $u = \sqrt{n v_n} x$ (la fonction $x \mapsto \sqrt{n v_n} x$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, u_n]$)

$$\int_0^{u_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(u_n)\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n v_n}} \int_0^{\sqrt{n v_n} u_n} e^{-u^2/2} \,\mathrm{d}u.$$

c. En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Retour à la planche 21

Corrigé de l'exercice de la planche 22

1.
```python
def matA(L):
    A = []
    for i in range(3):
        A.append([L[i]**j for j in range(3)])
    return A
```

2.
```python
def valeurs(i,L):
    s, p, d = 0, 1, 1
    for j in range(3):
        if j != i:
            s += L[j]
            p *=  L[j]
            d *= L[i]-L[j]
    return s, p, d
```

3. Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3)).$$

   a. La linéarité de φ est triviale, elle découle de la linéarité de l'évaluation en a_1, a_2 et a_3.

   b. Puisque $\varphi(1) = (1, 1, 1)$, $\varphi(X) = (a_1, a_2, a_3)$ et $\varphi(X^2) = (a_1^2, a_2^2, a_3^2)$ la matrice représentative de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est A.

   c. Puisque : $P \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0 \Leftrightarrow P = 0$ (car le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ admettant plus de deux racines distinctes est le polynôme nul). On en déduit que $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ puis que φ est injective. Puisque φ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, φ est une application linéaire bijective (i.e. un isomorphisme).

4. a. Pour tout $(i, k) \in [\![1, 3]\!]^2$, on a :

$$L_i(a_k) = \frac{1}{d_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}(a_k - a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i. \end{cases}.$$

   On en déduit que, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $\varphi(L_i) = e_i$, i.e. $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$.

   b. La matrice A est celle d'un isomorphisme. Elle est donc inversible. De plus, on a :

$$A^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}\left(\varphi^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{d_1} & \frac{p_2}{d_2} & \frac{p_3}{d_3} \\ -\frac{s_1}{d_1} & -\frac{s_2}{d_2} & -\frac{s_3}{d_3} \\ \frac{1}{d_1} & \frac{1}{d_2} & \frac{1}{d_3} \end{pmatrix},$$

   car :

$$\forall i \in [\![1, 3]\!],\ \varphi^{-1}(e_i) = L_i = \frac{1}{d_i}(p_i - s_iX + X^2)$$

   c.
```python
def Amoins1(L):
    mat = [[0 for j in range(3)] for i in range(3)]
    for j in range(3):
        s, p, d = valeurs(j,L)
        mat[0][j],mat[1][j],mat[2][j] = p/d,-s/d,1/d
    return mat

print(Amoins1([2,3,4]))
```

Retour à la planche 22

Corrigé de l'exercice de la planche 23

1. Posons $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$ et $Z = -\ln(U)$. Alors Z est presque sûrement positive, donc sa fonction de répartition est nulle sur $\mathbb{R}_-$.

   Si $x > 0$, on a alors $\mathbb{P}(Z \leqslant x) = \mathbb{P}(U \geqslant e^{-x}) = 1 - e^{-x}$, et on reconnaît bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.

2. On propose le code

```python
from random import random
import numpy as np

def expo():
return -np.log(random())

def simulW():
    X,Y = expo(),expo()
    return 1/(max(X,Y))

def espW(N=1000):
    s = 0
    for _ in range(N):
        s += simulW()
    return s/N
```

   Ainsi, on observe que W semble admettre une espérance, valant environ 1.37.

3. Il est clair que T est presque sûrement positive, et donc sa fonction de répartition est nulle sur $\mathbb{R}_-$.

   Si $x > 0$, alors :
$$\mathbb{P}(T \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant x) = (1 - e^{-x})^2$$
   par indépendance de X et Y. La fonction de répartition de T est donc continue en 0, puis sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en 0. La variable T admet donc une densité, donnée par exemple par
$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2e^{-x}(1 - e^{-x}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Par le théorème de transfert, la variable W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Or la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, et $t \mapsto \dfrac{1}{t} f(t)$ est positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, la convergence absolue est équivalente à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

5. a. Une simple étude de la fonction $x \mapsto e^x - 1 - x$ suffit à répondre à la question.

   b. On note que pour tout $t > 0$,
$$\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = e^{-t}\frac{1 - e^{-t}}{t}.$$
   Par la question précédente, on a $0 \leqslant 1 - e^{-t} \leqslant t$, et on retrouve l'inégalité demandée.

   c. L'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale I converge.

6. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto 2t$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$, et on a donc (en admettant la convergence des intégrales) :
$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\frac{u}{2}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u.$$
   On retrouve ainsi l'égalité demandée.

7. La convergence de la première intégrale étant garantie par linéarité, on trouve que :
$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{2t}}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{par la question 6} \\ &= \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{par relation de Chasles}\end{aligned}$$
En multipliant par 2 et avec la limite quand $x \to 0$, on trouve le résultat.

8. On a alors pour tout $x > 0$, par croissance de l'intégrale :
$$2e^{-2x}\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant 2\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 2e^{-x}\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$
On trouve alors que :
$$2e^{-2x}\ln(2) \leqslant 2\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 2e^{-x}\ln(2).$$
Par théorème d'encadrement des limites quand $x \to 0$, on trouve bien $I = 2\ln(2) = \mathbb{E}(W)$.

Retour à la planche 23

Corrigé de l'exercice de la planche 24

1. On propose le code suivant, les trois dernières fonctions permettant de conjecturer le comportement dans les cas (i), (ii) et (iii).

```
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def NbDiff(L):
    X = []
    for elem in L:
        if elem not in X:
            X.append(elem)
    return len(X)

def Z(N,k):
    X = [rd.randint(1,N) for _ in range(k)]
    return NbDiff(X)

def EZ(N,k,nb_exp=100):
    c = 0
    for _ in range(np_exp):
        c = c+Z(N,k)
    return c/nb_exp

def estimi(nb_exp=100):
    abs = [k for k in range(200)]
    ord = [EZ(10,k,nb_exp) for k in abs]
    plt.plot(abs,ord)
    plt.show()

def estimii(nb_exp=100):
    abs = [N for N in range(1,200)]
    ord = [EZ(N,10,nb_exp) for N in abs]
    plt.plot(abs,ord)
    plt.show()

def estimiii(nb_exp=100):
    abs = [N for N in range(1,200)]
    ord = [EZ(N,N,nb_exp) for N in abs]
    plt.plot(abs,ord)
    plt.show()
```

Dans les deux premiers cas, l'espérance de Z_k semble tendre vers 10, et elle semble tendre (linéairement) vers $+\infty$ dans le dernier cas.

2. Après un tirage, on a nécessairement tiré un seul numéro ; la variable aléatoire Z_1 est donc constante égale à 1.

   L'univers-image de Z_2 est $\{1, 2\}$. La probabilité d'avoir $Z_2 = 1$ est celle de tirer deux fois de suite la même boule, et donc $\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \dfrac{1}{N}$. On en déduit $\mathbb{P}(Z_2 = 2) = \dfrac{N-1}{N}$.

   On a alors
$$\mathbb{E}(Z_1) = 1 \text{ et } \mathbb{E}(Z_2) = \frac{1}{N} + 2\frac{N-1}{N} = \frac{2N-1}{N}.$$

3. a. Les tirages étant indépendants, la probabilité d'avoir $Z_k = 1$ est celle de tirer toujours la même boule. On a donc $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \dfrac{1}{N^{k-1}}$.

La probabilité d'avoir $Z_k = k$ est celle de ne tirer que des boules différentes, et donc

$$\mathbb{P}(Z_k = k) = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-k)!N^k} & \text{si } k \leqslant N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b. Les $[Z_k = i]$ forment un système complet d'événements, et donc par la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = \ell) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = \ell)\mathbb{P}(Z_k = i).$$

Or on ne peut, à chaque tirage, qu'augmenter Z_k de 0 ou 1, et donc

$$\forall i \notin \{\ell, \ell-1\},\ \mathbb{P}_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = \ell) = 0.$$

On a ensuite $\mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{\ell}{N}$, ce cas correspondant au tirage d'une boule déjà vue au $(k+1)$-ième tirage, et $\mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{N-\ell+1}{N}$, ce cas correspondant au tirage d'une nouvelle boule au $(k+1)$-ième tirage. On retrouve alors l'égalité proposée.

c. On peut réécrire l'égalité précédente sous la forme

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{1}{N}\left(\ell\mathbb{P}(Z_k = \ell) - (\ell-1)\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) + N\mathbb{P}(Z_k = \ell-1)\right).$$

On a alors, en notant que

$$N\ell - \ell(\ell-1) = (\ell-1)(N-1) + N - (\ell-1)^2,$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{k+1}) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\mathbb{E}(Z_{k+1}) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^2\mathbb{P}(Z_k = \ell) - \ell(\ell-1)\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) + N\ell\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^2\mathbb{P}(Z_k = \ell) - (\ell-1)^2\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) + ((\ell-1)(N-1) + N)\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) \\
&= \frac{N-1}{N}\sum_{\ell=1}^{\infty}(\ell-1)\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) + \sum_{\ell=1}^{\infty}\mathbb{P}(Z_k = \ell-1) \quad \text{la somme télescopique s'annulant} \\
&= \frac{N-1}{N}\mathbb{E}(Z_k) + 1
\end{aligned}$$

4. Montrons-le par récurrence sur k :

- Le cas $k = 1$ a déjà été vu en question 2.
- Supposons le résultat vrai pour un $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{k+1}) &= \frac{N-1}{N}\mathbb{E}(Z_k) + 1 \quad \text{par la question 3.c} \\
&= \frac{N-1}{N}N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^k\right) + 1 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= N\left(\frac{N-1}{N} - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k+1} + \frac{1}{N}\right) \\
&= N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k+1}\right)
\end{aligned}$$

Par récurrence, on a le résultat voulu.

5. a. Dans ce cas, comme $\left|\dfrac{N-1}{N}\right| < 1$, on a $\mathbb{E}(Z_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} N$.

   b. Dans ce cas, on a $\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^k \underset{N\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{k}{N} + o\left(\dfrac{1}{N}\right)$ et donc

$$\mathbb{E}(Z_k) \underset{k\to+\infty}{=} k + o(1) \underset{N\to+\infty}{\sim} k.$$

   c. Dans ce dernier cas, on a, en notant que $\left(1-\dfrac{1}{k}\right)^k = e^{k\ln(1-\frac{1}{k})} \to e^{-1}$,

$$\mathbb{E}(Z_k) \sim k(1-e^{-1}).$$

Dans les deux premiers cas, on retrouve bien les résultats de la question 1c.

Pour le troisième cas, on retrouve bien le comportement linéaire observé.

Retour à la planche 24

Corrigé de l'exercice de la planche 25

1. L'application f_a est linéaire grâce à la linéarité à gauche du produit scalaire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f_a(\lambda x + y) = \langle \lambda x + y, a \rangle = \lambda \langle x, a\rangle + \langle y, a\rangle = \lambda f_a(x) + f_a(y).$$

2. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f_a(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k x_k$.

   Puisque $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Ker} f_a \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} k x_k = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\sum\limits_{k=2}^{n} k x_k$, il vient que :

$$\operatorname{Ker} f_a = \operatorname{Vect}\left((-2,1,0,\ldots,0), (-3,0,1,0,\ldots,0), \ldots, (-n,0,\ldots,0,1)\right)$$

   On montre sans difficulté que la famille $((-2,1,0,\ldots,0), (-3,0,1,0,\ldots,0), \ldots, (-n,0,\ldots,0,1))$ est une base de $\operatorname{Ker} f_a$ qui est donc de dimension $n-1$.

3. Si $a = b$, il est trivial que $f_a = f_b$. Supposons réciproquement que $f_a = f_b$. Il vient que, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, a - b\rangle = 0$. En particulier pour $x = a - b$, on trouve que $\|a-b\|^2 = 0$, i.e. $a = b$. On en déduit l'équivalence recherchée : $f_a = f_b \Leftrightarrow a = b$.

4. Puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, le rang f_a est égal à 0 ou 1. Si $a \neq 0,\ f_a(a) = \|a\|^2 \neq 0$; ainsi $f_a \neq 0$ et donc $\operatorname{rg}(f_a) = 1$. Le théorème du rang assure alors que $\dim \operatorname{Ker} f_a = \dim \mathbb{R}^n - \operatorname{rg}(f_a) = n - 1$.

5. En notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on trouve que, pour tout $k \in [\![1, n]\!],\ f_a(e_k) = a_k$. Ainsi, la matrice de f_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

   On retrouve sans problème le résultat de la question 3 : $f_a = f_b \Leftrightarrow M_a = M_b a = b$.

   On retrouve aussi le résultat de la question 4 : si $a \neq 0,\ \operatorname{rg}(f_a) = \operatorname{rg}(M_a) = 1$.

6. L'implication directe étant évidente, montrons la réciproque. Supposons que, pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$, $f_a(x) = f_a(y)$, i.e. $\langle x - y, a\rangle = 0$. Pour $a = x - y$, on trouve $\|x-y\|^2 = 0$, i.e. $x = y$.

7. On modélise les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par la liste de leurs coordonnées dans la base canonique.

```python
def in_Ker_f(a,x):
    ps = 0
    for k in range(len(a)):
        ps += a[k]*x[k]
    return ps == 0
```

8. Raisonnons par analyse-synthèse.

   Analyse : supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = f_a$. On en déduit que $g(e_k) = \langle e_k, a\rangle$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $a = \sum\limits_{k=1} \langle a, e_k\rangle e_k = \sum\limits_{k=1} g(e_k) e_k$, ce qui garantit l'unicité de a.

   Synthèse : posons $a = \sum\limits_{k=1} g(e_k) e_k$. On en déduit alors que $g(e_k) = \langle e_k, a\rangle = f_a(e_k)$, pour tout $k \in [\![1,]\!]$. Puisque g et f_a coïncident sur une base de $\mathbb{R}^n$, $g = f_a$ (par caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base).

9. a. Commençons par remarquer que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n,\ \phi(a) = f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Étudions la linéarité de ϕ : soient $a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f_{\lambda a + b}(x) = \langle \lambda a + b, x\rangle = \lambda\langle a, x\rangle + \langle b, x\rangle = \lambda f_a(x) + f_b(x).$$

   On en déduit que $f_{\lambda a+b} = \lambda f_a + f_b$, i.e. $\phi(\lambda a + b) = \lambda \phi(a) + \phi(b)$. L'application ϕ est donc linéaire. La question 8 garantit la bijectivité de Φ qui est donc bien un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

   b. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sont isomorphes donc de même dimension finie, égale à n. En notant $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, la famille $(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$ forme une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Retour à la planche 25

Corrigé de l'exercice de la planche 26

1. a. On trouve immédiatement que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   b.

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array([[1, 1, -1], [0, 2, 0], [-1, 1, 1]])
>>> B = np.array([[0, -2, -5], [-2, 0, 4], [1, 1, 0]])
>>> vap_A, vep_A = np.linalg.eig(A)
>>> vap_B, vep_B = np.linalg.eig(B)
>>> print(vap_B) # les valeurs propres de g
[-1.+5.14735954e-08j -1.-5.14735954e-08j 2.+0.00000000e+00j]
>>> print(vap_A) # les valeurs propres de f
[2. 0. 2.]
>>> print(vep_A) # les vecteurs propres de A
[[ 0.70710678 0.70710678 0.40824829]
 [ 0.          0.          0.81649658]
 [-0.70710678  0.70710678  0.40824829]]
```

   On en déduit que les valeurs propres de g, égales à celles de B sont -1 et 2. On conjecture aussi que les espaces propres de f, associés aux valeurs propres 2 et 0, sont respectivement de dimension 2 et 1. L'endomorphisme f est donc diagonalisable.

2. a. Puisque $\mathrm{rg}(\mathcal{C}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$, $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b. Puisque $g(u) = (2, -2, 0) = 2u,\ g(v) = (-1, 2, -1) = -v$ et $g(e_1) = (0, -2, 1) = v - e_1$, $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   c. On lit le spectre de g sur la diagonale de T : $\mathrm{Sp}(g) = \{2; -1\}$. Puisque $\mathrm{rg}(T - 2I_3) = \mathrm{rg}(T + I_3) = 2$ le théorème du rang assure que $\dim \mathrm{Ker}(T - 2I_3) = \dim \mathrm{Ker}(T + I_3) = 1$. On en déduit donc que T et g ne sont pas diagonalisables.

3. a.

```
def E(M):
    A = np.array([[1, 1, -1], [0, 2, 0], [-1, 1, 1]])
    B = np.array([[0, -2, -5], [-2, 0, 4], [1, 1, 0]])
    return (A@M == M@B).all()
```

   b. L'ensemble E est inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et contient trivialement la matrice nulle. Soient $(M, N) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MB + NB = (\lambda M + N)B$, $\lambda M + N \in E$. On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   c. Soit M une matrice de E. Si M était inversible, les matrices A et B seraient semblables car $A = MBM^{-1}$. Cela est exclu puisque A et B n'ont pas le même spectre. La matrice M n'est donc pas inversible.

   d. Puisque $\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(B - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\left((B - \lambda I_3)^T\right) < 3 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\left(B^T - \lambda I_3\right) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}\left(B^T\right)$, il vient que $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}\left(B^T\right)$.

   e. Puisque $AXY^Y = 2XY^T$ et $XY^TB = X\left(B^TY\right)^T = X(2Y)^T = 2XY^T$, la matrice XY^T appartient bien à E.

   f. Soit (X_1, X_2) une base de $\mathrm{Ker}(A - 2I_3)$ et (Y) une base de $\mathrm{Ker}\left(B^T - 2I_3\right)$ ($\dim \mathrm{Ker}\left(B^T - 2I_3\right) = 1$ d'après le théorème du rang et par invariance du rang par transposition). Montrons que la famille (X_1Y^T, X_2Y^T) est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda X_1Y^T + \mu X_2Y^T = 0_3$. En multipliant à droite par la matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^T$, on trouve que $\lambda X_1\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) + \mu X_2\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) = 0_{3,1}$. Puisque $Y \neq 0_{3,1}$ (Y est un vecteur propre), $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ et ainsi $\lambda X_1 + \mu X_2 = 0_{3,1}$. Par liberté de (X_1, X_2), $\lambda = \mu = 0$. On en déduit que $\mathrm{Vect}(X_1Y, X_2Y)$ est de dimension 2. Puisque $\mathrm{Vect}(X_1Y, X_2Y) \subset E$, $\dim E \geqslant 2$.

Retour à la planche 26

Corrigé de l'exercice de la planche 27

1. a.

```
def ps(u,v):
    s = 0
    for k in range(len(u)):
        s += u[k] * v[k]
    return s
```

b.

```
def f(u,v,w):
    p1, p2 = ps(u,w), ps(v,w)
    r = []
    for k in range(len(u)):
        r.append(p1*v[k] + p2*u[k])
    return r
```

2. a. Puisque u et v sont de normes 1, u et v ne sont pas nuls. Puisque ces vecteurs sont de plus colinéaires, il existe $\lambda \in \{-1; 1\}$ tel que $v = \lambda u$. Ainsi $f(w) = \lambda\langle w, u\rangle u + \lambda\langle w, u\rangle u = 2\lambda\langle w, u\rangle u = \pm 2\langle w, u\rangle u$.
   b. D'après la question précédente, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(u)$. Remarquons que $f(u) = 2\lambda\|u\|^2 u = 2\lambda u \neq 0$. On en déduit que $f \neq 0$ et ainsi que $\dim \mathrm{Im}(f) \geqslant 1$. Puisque $\dim \mathrm{Vect}(u) = 1$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
   c. D'après la question précédente, u est un vecteur propre (car non nul) associé à la valeur propre 2λ.
   d. D'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}\, f$ est de dimension $n-1$. La somme des dimensions des espaces propres de f est donc supérieure ou égale à n. On en déduit donc que f est diagonalisable.

3. a. L'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$ est triviale par définition de f. Puisque u et v ne sont pas colinéaires, il existe un vecteur w_1 orthogonal à u et pas à v. Ainsi $f(w_1) = \langle w_1, v\rangle u \neq 0$. On en déduit que $u = f\left(\dfrac{1}{\langle w_1, v\rangle} w_1\right)$ donc que $u \in \mathrm{Im}\, f$. Par le même argument, on peut montrer que $v \in \mathrm{Im}\, f$. Puisque $\mathrm{Im}\, f$ est un espace vectoriel, $\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Im}\, f$ et donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(u, v)$.
   b. Puisque $\mathrm{rg}\, f = 2$ (u et v ne sont pas colinéaires), le théorème du rang assure immédiatement que $\dim \mathrm{Ker}\, f = n-2$

4. a. La famille $(u, v, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2})$ est normée par définition. Pour montrer que $\mathcal{C}$, il suffit de montrer que u et v sont orthogonaux à tous vecteurs de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2})$. Soit $k \in [\![1, n-2]\!]$. Puisque la famille (u, v) est libre et $0 = f(\varepsilon_k) = \langle \varepsilon_k, u\rangle v + \langle \varepsilon_k, v\rangle u$, $\langle \varepsilon_k, u\rangle = \langle \varepsilon_k, v\rangle = 0$. On en déduit que $\mathcal{C} = (u, v, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2})$ est une base orthonormée de E.
   b. Puisque $f(u) = v$ et $f(v) = u$, la matrice de f dans $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
   c. La matrice précédente est symétrique réelle donc f est diagonalisable.

5. a. Soit $(\lambda, \mu, a_1, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda u + \mu v + \sum\limits_{k=1}^{n-2} a_k w_k = 0$. En appliquant f, on trouve que $\lambda f(u) + \mu f(v) = 0$, i.e. $\lambda\left(v + \langle u, v\rangle\right) u + \mu\left(\langle v, u\rangle v + u\right) = 0$, i.e. $\left(\mu + \lambda\langle v, u\rangle\right) u + \left(\lambda + \mu\langle v, u\rangle\right) v = 0$. Par liberté de (u, v), on trouve que $\mu + \lambda\langle v, u\rangle = \lambda + \mu\langle v, u\rangle = 0$. On en déduit que $\lambda\left(1 - \langle u, v\rangle^2\right) = 0$. Puisque u et v sont non colinéaires, le cas d'égalité[3] de l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que $|\langle u, v\rangle| < \|u\|\|v\| = 1$. On en déduit que $\lambda = 0$ et donc que $\mu = 0$ par le même raisonnement. On a alors $\sum\limits_{k=1}^{n-2} a_k w_k = 0$. Par liberté de la famille $(w_1, \dots, w_{n-2})$, on trouve que $a_1 = \dots = a_{n-2} = 0$. La famille $\mathcal{B} = (u, v, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2})$ est donc bien une base de E.
   b. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est la matrice : $\begin{pmatrix} \langle u, v\rangle & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \langle u, v\rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
   c. La matrice précédente est symétrique réelle donc f est diagonalisable.

Retour à la planche 27

[3] Ce résultat est hors-programme. C'est sûrement pour cette raison que ce sujet a été publié par le SCAV : il n'est pas réutilisable.

Corrigé de l'exercice de la planche 28

1. a.

```python
import random as rd

def lancer():
    if rd.random() < 1/2:
        return "P"
    return "F"

def simulation():
    L = [lancer() for k in range(3)]
    while L[-3]+L[-2]+L[-1] != "PPF":
        L.append(lancer())
    return L
```

b. L'exécution de la fonction ci-dessus (calculant une approximation de $\mathbb{E}(X)$ - si elle existe - via la loi faible des grands nombres) suggère que X admet une espérance environ égale à 8.

```python
def espX():
    N = 1000
    somme = 0
    for k in range(N):
        somme += len(simul())
    return somme/N
```

2. a. Par indépendance des lancers, on a : $\forall n \geqslant 3,\ \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) = \mathbb{P}(P_{n-2})\mathbb{P}(P_{n-1})\mathbb{P}(\cap F_n) = \dfrac{1}{8}$.
Puisque $B_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1}$ et $B_{n+2} = P_n \cap P_{n+1} \cap F_{n+2}$, on remarque que
   - B_n et B_{n+1} sont incompatibles en considérant les événements liés au n-ème lancer ;
   - B_n et B_{n+2} sont incompatibles en considérant les événements liés au n-ème lancer ;
   - B_{n+1} et B_{n+2} sont incompatibles en considérant les événements liés au $(n+1)$-ème lancer ;

   b. On trouve immédiatement que $u_3 = \mathbb{P}(U_3) = \mathbb{P}(B_3) = \dfrac{1}{8}$, $u_4 = \mathbb{P}(U_4) = \mathbb{P}(B_3 \cup B_4) = \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) = \dfrac{1}{4}$ et $u_5 = \mathbb{P}(U_5) = \mathbb{P}(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = \mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(B_4) + \mathbb{P}(B_5) = \dfrac{3}{8}$. Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
u_{n+3} &= \mathbb{P}(U_{n+2} \cup B_{n+3}) \\
&= \mathbb{P}(U_{n+2}) + \mathbb{P}(B_{n+3}) - \mathbb{P}((U_n \cup B_{n+1} \cup B_{n+2}) \cap B_{n+3}) \\
&= \mathbb{P}(U_{n+2}) + \mathbb{P}(B_{n+3}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+3}) \text{ par incompatibilité de } B_{n+1} \text{ et } B_{n+2} \text{ avec } B_{n+3} \\
&= u_{n+2} + \frac{1}{8} - \mathbb{P}(U_n)\mathbb{P}(B_{n+3}) \text{ par indépendance de } U_n \text{ et } B_{n+3} \\
&= u_{n+2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_n.
\end{aligned}$$

   c. Pour tout $n \geqslant 3$, $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ donc $U_n \leqslant U_{n+1}$. Par croissance de $\mathbb{P}$, on trouve que la suite (u_n) est croissante. Puisqu'elle est majorée par 1, elle converge vers un réel $\ell \leqslant 1$. En passant à la limite la relation de récurrence de la question précédente, on trouve que $\ell = \ell + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}\ell$, i.e. $\ell = 1$.

   Remarquons que $[X = -1]$ est le complémentaire de $\bigcup\limits_{k=3}^{+\infty} B_k$. Puisque, pour tout $n \geqslant 3$, $U_n \subset \bigcup\limits_{k=3}^{+\infty} B_k \subset \Omega$, on trouve que $u_n \leqslant \mathbb{P}\left(\overline{X = -1}\right) \leqslant 1$, et donc que $\mathbb{P}(X = -1) = 0$. Il est donc quasi-certain de finir par obtenir la séquence "Pile, Pile, Face".

3. a. Puisque $X \geqslant 3$ presque-sûrement, $v_0 = v_1 = v_2 = 1$. De plus, $v_3 = \mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(X = 3) = \dfrac{7}{8}$.

   b. Soit $n \geqslant 3$. Remarquons que $[X > n] = \overline{U_n}$ et ainsi que $v_n = 1 - u_n$.
   On trouve alors que $1 - v_{n+3} = 1 - v_{n+2} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}(1 - v_n)$, i.e. $v_{n+2} - v_{n+3} = \dfrac{1}{8}v_n$. On vérifie sans difficulté que cette relation est encore vraie pour $n \in \{0; 1; 2\}$.

   c. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{N} v_n = 8\sum_{n=0}^{N} (v_{n+2} - v_{n+3}) = 8(v_2 - v_{N+3}) = 8 - 8(1 - u_{N+3}) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 8.$$

   Puisque X est à valeurs entières (presque-sûrement), X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 8$.

Retour à la planche 28

Corrigé de l'exercice de la planche 29

1. a. La variable $X_e + Y_e$ représente l'instant de "mort" de l'espèce (e).

   b. Puisque les variables aléatoires X_e et Y_e sont indépendantes et à densité, la variable aléatoire X_e+Y_e est à densité, de densité h donnée par $h : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ où $f : t \mapsto \dfrac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(t)$ et $g : t \mapsto e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$. Or :

$$f(t)g(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant \theta \\ x - t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant \theta \\ t \leqslant x \end{cases}.$$

   Ainsi, si $x < 0$, $h(x) = 0$ et :

$$\forall x \in [0,\theta],\ h(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} e^{-(x-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\theta}\left(1 - e^{-x}\right) \quad \forall x > \theta,\ h(x) = \int_0^\theta \frac{1}{\theta} e^{-(x-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{\theta}\left(e^\theta - 1\right).$$

   c. D'après la question précédente, on trouve que :

$$\forall t > 0,\ p = \mathbb{P}(X_e + Y_e > \theta + t) = \int_{\theta+t}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\theta+t}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\theta}\left(e^\theta - 1\right)\mathrm{d}x = \frac{1-e^\theta}{\theta} e^{-t}.$$

2. a. On écrit une première fonction simulant la réalisation de Z_t puis on utilise la loi faible des grands nombres pour estimer son espérance (on importe le module numpy via l'instruction `import numpy as np`).

```python
def simuleZ(theta,mu, t):
    z = 0 # nombre d'espèces
    N = np.random.poisson(mu)
    for e in range(N):
        Xe = theta * np.random.rand()
        Ye = np.random.exponential(1)
        if Xe + Ye > theta + t:
            z += 1
    return z
```

```python
def esp2Zt(theta, mu, t):
    n = 1000
    s = 0
    for k in range(n):
        s += simuleZ(theta, mu, t)
    return s/n
```

   b. Sachant qu'il y a $N = n$ espèces initialement dans le milieu, Z_t est le nombre de succès ("une espèce est encore présente à l'instant $\theta + t$") lors de la répétition de n expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre p (calculé à la question 1.c). On en déduit que Z_t suit la loi binomiale de paramètres n et p.

   c. La formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événements $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$, assure que :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z_t = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}_{[N=n]}(Z_t = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{(\mu p)^k}{k!} e^{-\mu} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\mu(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{(\mu p)^k}{k!} e^{-\mu} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu(1-p))^i}{i!} \\ &= \frac{(\mu p)^k}{k!} e^{-\mu p}. \end{aligned}$$

   On en déduit que Z_t suit la loi de Poisson de paramètre μp. Le script ci-dessous permet de vérifier la cohérence des espérances lorsque les valeurs renvoyées sont proches de 0 :

```python
def test(t, theta, mu):
    p = p = (1-np.exp(-theta))/theta * np.exp(-t)
    return abs(Esp2Zt(theta,mu,t) - mu*p)
```

3. a. Posons $\lambda = \mu(1-p)$. Soit $A \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{A} \left| \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(W_t = k) \right| &= \sum_{k=0}^{A} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}e^{-\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{A} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{A+1} \frac{\lambda^{i}}{i!} \\
&= \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}\left(-1+\sum_{i=0}^{A+1} \frac{\lambda^{i}}{i!}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}
\end{aligned}$$

Le théorème du transfert assure alors que $\dfrac{1}{W_t+1}$ admet une espérance, égale à $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{W_t+1}\right) = \dfrac{1-e^{-\mu(1-p)}}{\mu(1-p)}$.

Par indépendance de Z_t et W_t, la variable $\dfrac{Z_t}{W_t+1}$ admet une espérance égale à :

$$\mathbb{E}\left(\frac{Z_t}{W_t+1}\right) = E\left(Z_t\right)E\left(\frac{1}{W_t+1}\right) = \frac{p}{1-p}\left(1-e^{-\mu(1-p)}\right).$$

b. Soit $a \in]0,1[$. Par stricte positivité de W_t+1, $\left[\dfrac{(1-a)Z_t+a}{W_t+1} \geqslant a\right] = [(1-a)Z_t + a \geqslant aW_t + a] = [Z_t \geqslant aN]$ et ainsi $\mathbb{P}(Z_t \geqslant aN) = \mathbb{P}\left(\dfrac{(1-a)Z_t+a}{W_t+1} \geqslant a\right)$.

Par linéarité, la variable aléatoire $X = \dfrac{(1-a)Z_t+a}{W_t+1}$ admet une espérance égale à :

$$\mathbb{E}\left(\frac{(1-a)Z_t+a}{W_t+1}\right) = (1-a)\mathbb{E}\left(\frac{Z_t}{W_t+1}\right) + a\mathbb{E}\left(\frac{1}{W_t+1}\right) = \frac{1-e^{-\mu(1-p)}}{\mu(1-p)}\left((1-a)\mu p + a\right)$$

Puisque $X = \dfrac{(1-a)Z_t+a}{W_t+1}$ est positive, on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(Z_t \geqslant aN) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a} \leqslant \frac{(1-a)\mu p + a}{a\mu(1-p)}.$$

c. Soit $\alpha \in]0,2[$. En posant $\mu = \theta^2$, $t = \ln\theta$ et $a = \dfrac{1}{\theta^\alpha}$, on a $p = \dfrac{1-e^{-\theta}}{\mu}$ et ainsi :

$$0 \leqslant \frac{(1-a)\mu p + a}{a\mu(1-p)} = \frac{(\theta^\alpha - 1)(1-e^{-\theta}) + 1}{\theta^2 - 1 + e^{-\theta}} \underset{\theta\to+\infty}{\sim} \theta^{\alpha-2} \underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car } \alpha \in]0,2[.$$

En remarquant que pour θ assez grand, $a \in]0,1[$ et en appliquant l'inégalité de la question précédente, on trouve que $\displaystyle\lim_{\theta\to+\infty} \mathbb{P}\left(Z_{\ln\theta} \geqslant \frac{N}{\theta^\alpha}\right) = 0$ par passage à la limite.

Retour à la planche 29

Corrigé de l'exercice de la planche 30

1.
```python
import numpy as np

def simule_G(a):
    x = np.random.poisson(a)
    if x == 0:
        return 0
    elif x%2 == 0:
        return x
    else:
        return -x
```

2. a. On trouve immédiatement que $r = \mathbb{P}(X=0) = e^{-a}$. Puisque $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [X=2k]$ et $B = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [X=2k+1]$ et puisque ces réunions sont disjointes, on trouve par σ-additivité :

$$p = \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k) = e^{-a} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{2k}}{(2k)!} \text{ et } q = \mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k+1) = e^{-a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

b. Puisque $p+q+r=1$, $p+q = 1-e^{-a}$. De plus, on trouve :

$$p - q = \left(e^{-a} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^{2k}}{(2k)!} \right) + \left(e^{-a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-a)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = e^{-a} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-a)^i}{i!} = e^{-a} \left(e^{-a} - 1 \right).$$

c. En sommant et en soustrayant les deux égalités précédentes, on trouve que $p = \dfrac{(1-e^{-a})^2}{2}$ et $q = \dfrac{1-e^{-2a}}{2}$.

3. On applique ici deux fois la loi faible des grands nombres.

```python
def approx_Gain(a):
    g, p_Anna_gagne = 0, 0
    N = 1000
    for k in range(N):
        p = simule_G(a)
        if p > 0:
            p_Anna_gagne += 1/N
            g += p/N
    return g, p_Anna_gagne
```

4. D'après les simulations, le gain moyen d'Anna est négatif et sa probabilité de gagner est faible.

5. a. On trouve immédiatement que $G = (-1)^X X$.

b. Puisque X admet une espérance, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k k \mathbb{P}(X=k)$ converge absolument, garantissant ainsi que G admet une espérance (via le théorème du transfert), égale à :

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k}{(k-1)!} e^{-a} = -ae^{-a} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-a)^i}{i!} = -ae^{-2a}.$$

6. a. Par les mêmes arguments qu'à la question 2.a, on trouve immédiatement que $r=0$ et :

$$p = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha(1-\alpha)^{2k-1} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-\alpha)^2\right)^k = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)^2} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \text{ et } q = 1-p = \frac{1}{2-\alpha}.$$

b. On justifie l'existence de l'espérance de G de la même manière qu'à la question 5.a et on trouve :

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k\alpha(1-\alpha)^{k-1} = -\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} k(\alpha - 1)^{k-1} = \frac{-\alpha}{(2-\alpha)^2}.$$

c. Puisque $\mathbb{E}(G) < 0$, Anna semble perdante à ce jeu.

Retour à la planche 30

Corrigé de l'exercice de la planche 31

1. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k-1) = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$. La variable aléatoire Y suit donc la loi loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

   b. Puisque Y admet admet un moment d'ordre 2, X aussi et :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y-1) = \mathbb{E}(Y) - 1 = 1 \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y-1) = \mathbb{V}(Y) = 2.$$

   c.

```
import random as rd

def simuleX():
    y = 1
    while rd.random() < 1/2:
        y += 1
    return y-1
```

   d. Soient $s \in [0,1]$ et $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{N} \left| s^k \mathbb{P}(X = k) \right| = \sum_{k=0}^{N} s^k \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{s}{2}\right)^k \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2-s}.$$

   Le théorème du transfert assure que s^X admet une espérance, égale à $\frac{1}{2-s}$.

2. a.

```
def generation(n):
    Z = [1]
    for k in range(n):
        z_k = 0 # calcul de l'effectif de la génération k
        for i in range(generation[-1]):
            z_k += simuleX()
        Z.append(z_k)
    return Z
```

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$ donc $u_n \leqslant u_{n+1}$ par croissance de $\mathbb{P}$. La suite (u_n) est donc croissante ; puisqu'elle est majorée (par 1), elle converge.

   c. Puisque $Z_0 = 1$, $u_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = \mathbb{P}(X_{1,1} = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$.

   d. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par indépendance des naissances, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) &= \mathbb{P}_{[Z_1=k]}\left([X_{2,1} = 0] \cap \cdots \cap [X_{2,k} = 0]\right) \\
&= \mathbb{P}_{[Z_1=k]}\left(X_{2,1} = 0\right) \ldots \mathbb{P}_{[Z_1=k]}\left(X_{2,k} = 0\right) \\
&= \mathbb{P}(X = 0)^k \\
&= \frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

   La formule des probabilités totales assure que :

$$u_2 = \mathbb{P}(Z_2 = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k)\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^X\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(u_1).$$

   e. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule des probabilités totales assure que (en reprenant les raisonnements précédents) :

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k)\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n^k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}\left(u_n^X\right) = f(u_n).$$

f. Puisque $\ell \in [0,1]$ et f est continue sur $[0,1]$, on peut passer à la limite la relation de récurrence de la question précédente, i.e. $\ell = f(\ell)$. On en déduit que $\ell = \dfrac{1}{2-\ell}$, i.e. $\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$, i.e. $\ell = 1$.

Retour à la planche 31

Corrigé de l'exercice de la planche 32

1. a. La fonction f est bien dérivable sur $]1,+\infty[$ et, pour tout $t>1$, $f'(t)=\dfrac{\ln(t)-1}{\ln^2(t)}$. Ainsi :

$$\forall t>1,\ -t^2f'(t)+tf(t)=\frac{-t^2\ln(t)+t^2+t^2\ln(t)}{\ln^2(t)}=\left(\frac{t}{\ln(t)}\right)^2=(f(t))^2.$$

La fonction f est donc solution de (E) sur $]1,+\infty[$.

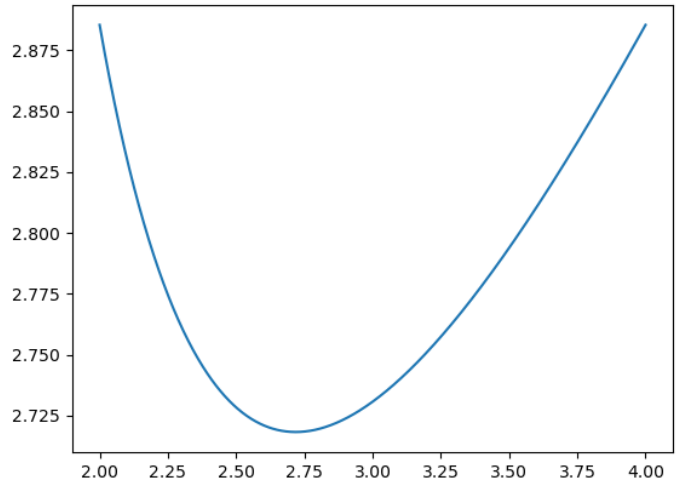
b. Vérifions que $2f$ n'est pas solution de (E) :

$$\forall t>1,\ -t^2(2f)'(t)+t(2f)(t)=2\left(-t^2f'(t)+tf(t)\right)=2\,(f(t))^2\neq(2f(t))^2.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ n'est donc pas un espace vectoriel.

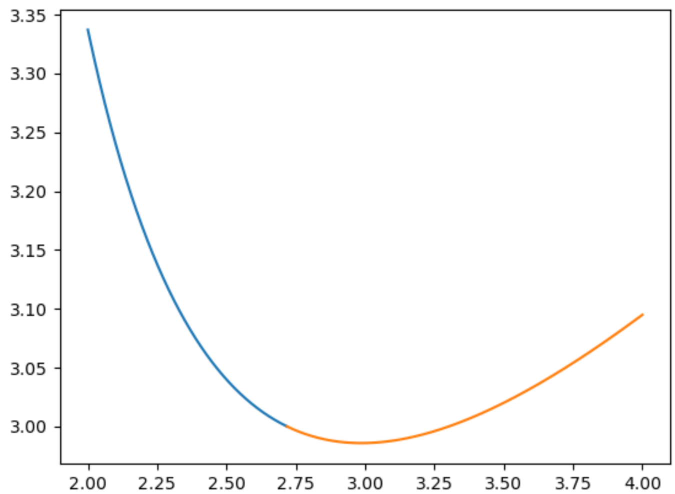
c. En exécutant le script ci-dessous, on obtient le graphique ci-contre.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
   return x/np.log(x)

abs = np.linspace(2,4,10**3)
ord = f(abs) # ou ord = [f(x) for x in abs]
plt.plot(abs, ord)
plt.show()
```



2. Après avoir choisi un pas h, on cherche des valeurs approchées y_k de $y(t_k)$ où $t_k=e+kh$. D'après l'approximation affine rappelée par l'énoncé, on trouve alors que $-t_k^2\dfrac{y_{k+1}-y_k}{h}+t_ky_k=y_k^2$, donc que $y_{k+1}=y_k-h\dfrac{y_k(y_k-t_k)}{t_k^2}$. On trace alors une solution approchée de (E) vérifiant $y(e)=3$ en partant de la gauche et de la droite du point $(e,3)$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def euler(x):
   h = (x-np.e)/(10**3)
   abs = np.linspace(np.e, x, 10**3+1)
   y = [3]
   for k in range(10**3):
      q = (y[k]**2-y[k]*abs[k])/(abs[k])**2)
      y.append(y[k]-h* q)
   return abs, y

abs_gauche, y_gauche = euler(2)
abs_droite, y_droite = euler(4)
plt.plot(abs_gauche, y_gauche)
plt.plot(abs_droite, y_droite)
plt.show()
```



3. Résoudre (E') sur I revient à résoudre l'équation différentielle : $\forall t \in I,\ z'(t) + \frac{1}{t} z(t) = \frac{1}{t^2}$. On trouve sans difficulté que l'ensemble des solutions de (E') est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{C + \ln t}{t} \end{array} ,\ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Notons $z : t \mapsto \frac{1}{y(t)}$. Puisque y est dérivable et ne s'annule pas sur I, z est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, t^2 z'(t) + tz(t) = -t^2 \frac{y'(t)}{y^2(t)} + \frac{t}{y(t)} = 1.$$

On en déduit qu'il existe un réel C tel que : $\forall t \in I,\ \frac{1}{y(t)} = \frac{C + \ln(t)}{t}$, i.e. $y(t) = \frac{t}{C + \ln(t)}$.

5. a. Si y est une solution de (E) ne s'annulant pas sur I, alors y est de la forme trouvée à la question précédente. Réciproquement, soit $y : t \mapsto \frac{t}{C + \ln(t)}$ où $C \in \mathbb{R}$. Si $C < 0$, alors y n'est pas définie sur I donc n'est pas solution de (E). Supposons $C \geqslant 0$. Dans ce cas, on prouve facilement que y est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I,\ -t^2 y'(t) + ty(t) = -t^2 \frac{C + \ln(t) - 1}{(C + \ln(t))^2} + \frac{t^2}{C + \ln(t)} = \frac{-t^2(C + \ln(t) - 1) + t^2(C + \ln(t))}{(C + \ln(t))^2} = (y(t))^2.$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{C + \ln t} \end{array} ,\ C \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

b. Puisque la fonction nulle est solution de (E) mais pas dans $\mathcal{S}_1$, il vient que $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}$.

c. Supposons qu'il existe une solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I. Il existe alors $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $y(t) = \frac{t}{C + \ln(t)}$ pour tout $t \in I$. Puisque $y(e) = 3$, $C = \frac{3}{e} - 1 < 0$, ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I.

Retour à la planche 32

Corrigé de l'exercice de la planche 33

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$x_{n+1} = by_{n+1} = by_n e^{r\left(1-\frac{y_n}{p}\right)} = by_n e^r e^{\frac{r}{p}y_n} = \alpha x_n e^{-x_n}.$$
On peut montrer par récurrence que si $x_0 = 0$, la suite (x_n) est constante égale à 0.

2. Puisque $x_0 > 0$ et $\alpha > 0$, on peut montrer par récurrence que la suite (x_n) ne prend que des valeurs strictement positives.

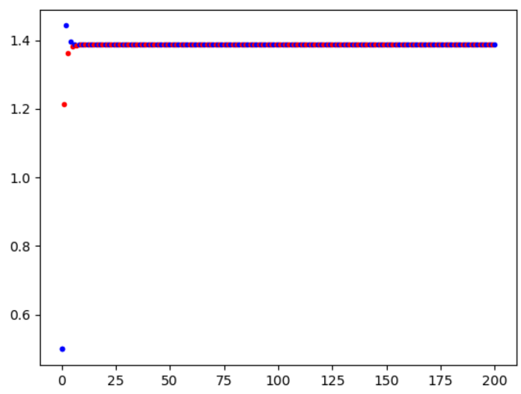
3. La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'_\alpha(x) = \alpha(1-x)e^{-x}$.

x	0		1		$+\infty$
f_α	0	$\nearrow$	αe^{-1}	$\searrow$	0

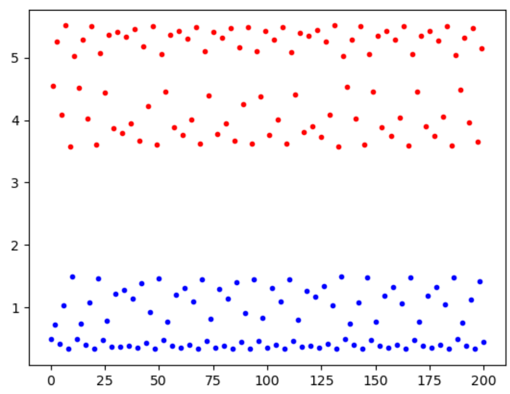
4. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que 0 est solution évidente de $f_\alpha(x) = x$. Si $x > 0$, alors $f_\alpha(x) = x \Leftrightarrow \alpha e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = \ln(\alpha)$. Puisque $\ln(\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \alpha > 1$, l'ensemble des solutions de l'équation $f_\alpha(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$ est
$$\begin{cases} \{0, \ln(\alpha)\} & \text{si } \alpha > 1 \\ \{0\} & \text{si } 0 < \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

5. a.
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def suite_x(x0, alpha):
    xk = x0
    for k in range(201):
        if k%2 == 0:
            plt.plot(k, x, marker=".", color="blue")
        else:
            plt.plot(k, x, marker=".", color="red")
        xk=alpha*xk*np.exp(-xk)
    plt.show()
```

b. En exécutant `suite_x(4, 0.5)`, on obtient le graphe ci-dessous.



En exécutant `suite_x(15, 0.5)`, on obtient le graphe ci-dessous.



6. On suppose que $\alpha \in]e, e^2[$.

a. D'après la question 4, la fonction g_α s'annule deux fois sur $\mathbb{R}_+$ (en 0 et $\ln(\alpha)$) puisque $\alpha > 1$. Par continuité de g_α sur $\mathbb{R}_+$, g_α est de signe constant sur $[0, \ln(\alpha)]$ et $[\ln(\alpha), +\infty[$ (via le théorème des valeurs intermédiaires). Puisque $1 < \ln(\alpha)$ et $g_\alpha(1) = \alpha e^{-1} - 1 > 0$ (car $\alpha > e$), g_α est positif sur $[0, \ln(\alpha)[$. Puisque $\ln(\alpha) < 2$ et $g_\alpha(2) = 2(\alpha e^{-2} - 1) < 0$ (car $\alpha < e^2$), g_α est négatif sur $]\ln(\alpha), +\infty[$.

b. On sait que, pour tout $x \in [1, +\infty[,\ |f'_\alpha(x)| = \alpha(x-1)e^{-x}$. Étudions la fonction $h : x \mapsto (x-1)e^{-x}$ sur $[1, +\infty[$. Cette fonction est bien dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $x \geqslant 1$, on trouve que $h'(x) = (2-x)e^{-x}$. On en déduit que h atteint son maximum en 2, égal à e^{-2}. En posant $M = \alpha e^{-2}$, on a bien : $\forall x \in [1, +\infty[,\ |f'_\alpha(x)| \leqslant M$.

c. On obtient le résultat en appliquant le théorème de la bijection sur les intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$ (cf. tableau de variation de la question 3), en remarquant que $\alpha e^{-1} > 1$.

d. Supposons comme indiqué dans l'énoncé que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $f_\alpha([0, \lambda_\alpha[) = [0, 1[$ et $f_\alpha(]\mu_\alpha, +\infty[) =]0, 1[$, $x_{n+1} = f_\alpha(x_n) \in [0, 1[$. Puisque par hypothèse x_{n+1} appartient à $[0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$, $x_{n+1} \in [0, \lambda_\alpha[$ puisque $\mu_\alpha > 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}*,\ x_{n+1} - x_n = f_\alpha(x_n) - x_n = g_\alpha(x_n) \geqslant 0 \text{ puisque } x_n \in [0, \lambda_\alpha[\subset [0, 1[.$$

La suite (x_n) est donc croissante à partir du rang 1. Puisqu'elle est majorée par λ_α, elle converge vers un réel $\ell \in [0, \lambda_\alpha]$ vérifiant $f_\alpha(\ell) = \ell$ par passage à la limite de la relation de récurrence connue (puisque f_α est continue sur $[0, \lambda_\alpha]$). On en déduit que $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$. Puisque $x_0 > 0$, $x_1 = f_\alpha(x_0) > 0$. La suite (x_n) étant croissante, elle ne peut converger vers 0. Puisque la suite (x_n) est à valeurs dans $[0, \lambda_\alpha]$, elle ne peut converger vers le réel $\ln(\alpha)$ puisque $\ln(\alpha) > 1 > \lambda_\alpha$.

On en déduit donc qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.

e. Soit $x \in [1, \mu_\alpha]$. Puisque f_α est décroissante sur $[1, \mu_\alpha]$, $f_\alpha(x) \in \left[1, \alpha e^{-1}\right]$. Si on avait $\mu_\alpha \leqslant \alpha e^{-1}$, on aurait $f_\alpha\left(\alpha e^{-1}\right) \leqslant 1$, ce qui est exclu d'après le résultat admis. On en déduit que $f_\alpha(x) \in [1, \mu_\alpha]$.

f. Puisque $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$, $x_{n_0+1} = f_\alpha(x_n) \in \left[1, \alpha e^{-1}\right] \subset [1, \mu_\alpha]$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à $n_0 + 1$.

Si $x_n = \ln(\alpha)$, l'inégalité est triviale. Supposons alors que $x_n \neq \ln(\alpha)$. Notons I le segment de bornes x_n et $\ln(\alpha)$. Puisque f_α est dérivable sur ce segment, on peut appliquer le théorème des accroissements finis :

$$\exists c_n \in I,\ \frac{f_\alpha(x_n) - f_\alpha(\ln(\alpha))}{x_n - \ln(\alpha)} = f'(c_n).$$

On en déduit que $\dfrac{|x_{n+1} - \ln(\alpha)|}{|x_n - \alpha|} = |f'_\alpha(c)|$.

Puisque $x_{n_0+1} \in [1, \mu_\alpha]$, on peut montrer par récurrence que $x_n \geqslant 1$. On en déduit que $c_n \geqslant 1$. On déduit de la question 6.b que $|f'_\alpha(c_n)| \leqslant M$, et ainsi que pour tout $n \geqslant n_0 + 1,\ |x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leqslant M\,|x_n - \ln(\alpha)|$.

g. On peut montrer par récurrence que :

$$\forall n \geqslant n_0 + 1,\ |x_n - \ln(\alpha)| \leqslant M^{n-n_0-1}\,|x_{n_0+1} - \ln(\alpha)|$$

Puisque $M \in [0, 1[$, le théorème d'encadrement de limite assure que la suite (x_n) converge vers $\ln(\alpha) = r$.

Retour à la planche 33

Corrigé de l'exercice de la planche 34

1. a. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$, on trouve que

$$\mathbb{P}(Y_1 > x) = \mathbb{P}(X_1 > x, \dots, X_n > x) = \mathbb{P}(X_1 > x) \dots \mathbb{P}(X_n > x) = e^{-\lambda n x}.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(Y_1 \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda n x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque $Y_1(\Omega) = \mathbb{R}_+$, la fonction de répartition de Y_1 est :

$$F_{Y_1} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda n x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

La variable aléatoire Y_1 suit donc la loi exponentielle de paramètre λn, d'espérance $\dfrac{1}{\lambda n}$ et de variance $\dfrac{1}{\lambda^2 n^2}$.

b. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1]$. Posons $X = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(U)$. La variable X est donc presque-sûrement à valeurs positives. Ainsi, pour tout $x < 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(\ln(U) \geqslant -\lambda x) = \mathbb{P}(U \geqslant e^{-\lambda x}) = 1 - \mathbb{P}(U < e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ car } e^{-\lambda x} \in]0, 1[.$$

On en déduit que $X = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

c.

```python
import random as rd
import numpy as np

def simule_expo(l):
    u = rd.random()
    return -(1/l)*np.log(1-u)

def simule_Y(i,n):
    x = [simule_expo(l) for k in range(n)]
    y = sorted(x)
    return y[i-1]
```

2. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$, on trouve que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y_n \leqslant x) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x, \dots, X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \dots \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = (F(x))^n.$$

3. Puisque F est la fonction de répartition d'une variable à densité, F est continue sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit qu'il existe un réel x_0 tel que $F(x_0) = \dfrac{1}{2}$ (n'importe quelle valeur de $]0; 1[$ convenait). Ainsi $\mathbb{P}(Y_1 > x_0) = (1 - F(x_0))^n (F(x_0))^n \neq 0$. Or $\mathbb{P}(Y_1 > x, Y_n \leqslant x) = 0$, donc Y_1 et Y_n ne sont pas indépendantes.

4. a. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Puisque $Z_k(\Omega) = \{0; 1\}$, Z_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \mathbb{P}(X_k \leqslant x) = F(x)$.

b. La variable S représente le nombre de Z_k égaux à 1, donc le nombre de X_k inférieurs à x.
Puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables $Z_1, \dots, Z_n$ le sont aussi. On en déduit que S suit la loi binomiale de paramètre n et $F(x)$.

c. D'après l'interprétation donnée à la question précédente, on trouve immédiatement que $\mathbb{P}(Y_i \leqslant x) = \mathbb{P}(S \geqslant i)$ et ainsi que :

$$\mathbb{P}(Y_i \leqslant x) = \mathbb{P}(S \geqslant i) = \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}(S = k) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k}.$$

Retour à la planche 34

Corrigé de l'exercice de la planche 35

1. On peut montrer sans difficulté que la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f$ converge trivialement et vaut 0. Soit $A > 1$.

$$\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^A \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge et vaut 1, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ aussi. La fonction f est donc une densité de probabilité.

2. D'après la question précédente, la fonction de répartition de X est :

$$F : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

3. Puisque $U(\Omega) =]0,1[$, $V(\Omega) =]1,+\infty[$. Ainsi, pour tout $v \leqslant 1$, $\mathbb{P}(V \leqslant v) = 0$ et :

$$\forall v > 1,\ \mathbb{P}(V \leqslant v) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leqslant v\right) = \mathbb{P}\left(1 - U \geqslant \frac{1}{v^2}\right) = \mathbb{P}\left(U \leqslant 1 - \frac{1}{v^2}\right) = 1 - \frac{1}{v^2} \text{ car } 1 - \frac{1}{v^2} \in]0,1[.$$

La variable aléatoire V admet la même fonction de répartition que X donc suit la même loi que X.

4.

```
import random as rd

def simule_X():
    u = rd.random()
    return (1-u)**(-1/2)
```

5. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge trivialement et vaut 0. Soit $A > 1$.

$$\int_1^A |tf(t)|\,\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^A = 2 - \frac{2}{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et vaut 2, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ aussi. La variable aléatoire X admet donc une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = 2$$

Par le même raisonnement, on peut montrer que X n'admet pas de moment d'ordre 2 donc de variance. Le code ci-dessous utilise la loi faible des grands nombres pour approximer l'espérance de X.

```
def esperance_X():
    N = 1000
    s = 0
    for k in range(N):
        s += simule_X()
    return s/N
```

6. a. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(T_n \leqslant x) &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x\sqrt{n}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x\sqrt{n}, \dots, X_n \leqslant x\sqrt{n}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x\sqrt{n}) \dots \mathbb{P}(X_n \leqslant x\sqrt{n}) \\ &= \left(F(x\sqrt{n})\right)^n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x > \dfrac{1}{\sqrt{n}}. \end{cases}\end{aligned}$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x \leqslant 0$, alors $x \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; donc $\mathbb{P}(T_n \leqslant x) = 0$ et $G(x) = 0$.
Si $x > 0$, pour tout n entier strictement supérieur à $\dfrac{1}{x^2}$, on a $x > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, donc

$$\mathbb{P}(T_n \leqslant x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} \exp\left(-\frac{1}{x^2} + o(1)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

c. On vérifie sans problème que G est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0. La variable aléatoire T est donc à densité, de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

d. Puisque la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ les intégrales

$$\int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{+\infty} 2u^2 e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

sont de même nature. Puisque la seconde intégrale converge (et vaut $\sqrt{\pi}$), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument et vaut $\sqrt{\pi}$. On en déduit que T admet une espérance, égale à $\sqrt{\pi}$.

Retour à la planche 35

Corrigé de l'exercice de la planche 36

1. Le code ci-dessous nous donne une approximation de la probabilité que C soit le denier à quitter les caisses ; celle-ci est environ égale à $0,66$.

```
import random as rd

def est_dernier():
    a = rd.random()
    b = rd.random()
    c = rd.random()
    t = min(a,b) + c
    return t > a and t > b

def approx_proba(N = 10000):
    s = 0
    for k in range(N):
        s += est_dernier() # un booléen est un entier (True = 1/False = 0)
    return s/N
```

2. En notant U le temps d'attente de C avant d'être pris en charge à une caisse, on a $U = \min(X, Y)$. Par indépendance de X et Y, on trouve que :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(U \leqslant u) = 1 - \mathbb{P}(U > u) = 1 - \mathbb{P}(X > u, Y > u) = 1 - \mathbb{P}(X > u)\mathbb{P}(Y > u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 - (1-u)^2 & \text{si } u \in [0,1] \\ 0 & \text{si } u > 1 \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté que la fonction de répartition de U est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1. La variables aléatoire U est donc à densité, de densité donnée par :

$$f_U : u \mapsto \begin{cases} 2(1-u) & \text{si } u \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. La variable U étant presque-sûrement à valeurs dans un segment, elle admet une espérance et une variance (calculée via le théorème du transfert et la formule de König-Huygens).

$$\mathbb{E}(U) = \int_0^1 uf(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 (2u - 2u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3};$$
$$\mathbb{V}(U) = \mathbb{E}\left(U^2\right) - (\mathbb{E}(U))^2 = \int_0^1 u^2 f(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{9} = \int_0^1 (2u^2 - 2u^3)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

4. a. Cette question a déjà été réfléchie et trouve sa réponse à la question 1 : $T = \min(X, Y) + Z = U + Z$.

   b. La variable aléatoire T est la somme de deux variables aléatoires indépendantes (d'après le lemme des coalitions) et à densité. On en déduit que T est à densité, de densité donnée par :

$$f_T : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t-z) f_Z(z)\,\mathrm{d}z$$

   où f_Z désigne une densité de la loi uniforme sur $[0,1]$. Or :

$$f_U(z)f_Z(t-z) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t - z < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 < z < t \\ 0 < z < 1 \end{cases}$$

   Ainsi, pour tout $t \notin]0,2[$, $f_T(t) = 0$ et :

$$\forall t \in [0,1],\ f_T(t) = \int_0^t 2(1-z)\,\mathrm{d}z = t(2-t) \text{ et } \forall t \in [1,2],\ f_T(t) = \int_{t-1}^1 2(1-z)\,\mathrm{d}z = (t-2)^2.$$

c. La variable $T = U + Z$ admet une espérance par linéarité et $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(Z) = \frac{5}{6}$.

5. On cherche à calculer $\mathbb{P}(T > \max(X, Y))$. Or, par indépendance de X, Y et Z et puisque $|X - Y|$ et U ont même loi, on a :

$$\mathbb{P}(T > \max(X,Y)) = \mathbb{P}(Z + \min(X,Y) > \max(X,Y)) = \mathbb{P}(Z > \max(X,Y) - \min(X,Y)) = \mathbb{P}(|X - Y| - Z < 0)$$

Puisque Z suit la loi uniforme sur $[0,1]$, $-Z$ suit la loi uniforme sur $[-1,0]$. Notons f_{-Z} une de ses densités.

D'après le lemme des coalitions, $-Z$ et $|X - Y|$ sont indépendantes ; puisqu'elles sont aussi à densité, leur somme $|X - Y| - Z$ est à densité, de densité donnée par :

$$h : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(z) f_{-Z}(t - z)\,\mathrm{d}z$$

Or :

$$f_U(z) f_{-Z}(t-z) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < z < 1 \\ -1 < t - z < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < z < 1 \\ t < z < t + 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $t \notin]-1,1[$, $h(t) = 0$ et :

$$\forall t \in [-1,0],\ h(t) = \int_0^{t+1} 2(1-z)\,\mathrm{d}z = 1 - t^2 \qquad \left(\text{et } \forall t \in [0,1],\ h(t) = \int_t^1 2(1-z)\,\mathrm{d}z = (1-t)^2\right).$$

On en déduit que la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes est :

$$\mathbb{P}(|X - Y| - Z < 0) = \int_{-\infty}^0 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 (1 - t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

Retour à la planche 36

Corrigé de l'exercice de la planche 37

1. La fonction F est un quotient de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas, donc F est $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{ae^{ax-b}\left(1+e^{ax-b}\right) - ae^{2ax-2b}}{\left(1+e^{ax-b}\right)^2} = \frac{ae^{ax-b}}{\left(1+e^{ax-b}\right)^2} > 0.$$

La fonction F est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Remarquons que, pour tout réel x, $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-ax+b}}$ donc $\lim\limits_{+\infty} F = 1$. D'après le théorème de la bijection F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant x) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{a}\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) + \frac{b}{a} \leqslant x\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \leqslant ax-b\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{U}{1-U} \leqslant e^{ax-b}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(U \leqslant e^{ax-b}(1-U)\right) \text{ car } 1-U \text{ est presque-sûrement strictement positive}\\
&= \mathbb{P}\left(\left(1+e^{ax-b}\right)U \leqslant e^{ax-b}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(U \leqslant F(x)\right)\\
&= F(x) \text{ car } F(x) \in]0,1[.
\end{aligned}$$

La fonction de répartition de X est donc F.

b.

```python
import random as rd
import numpy as np

def simule_X(a,b):
    u = rd.random()
    return (1/a)*np.log(u/(1-u)) + b/a
```

3. a. Les fonctions ln et $t \mapsto \ln(1-t)$ sont respectivement continues sur $]0,1]$ et $]0,1]$. Soit $A \in]0,1[$. Par croissances comparées, on trouve que :

$$\int_A^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_A^1 = 1 - A\ln(A) - A \underset{A\to 0}{\longrightarrow} 1$$
$$\int_0^A \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = [(t-1)\ln(1-t) - t]_0^A = (A-1)\ln(1-A) + A \underset{A\to 1}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 1.

b. D'après le théorème du transfert, étudier l'existence de l'espérance de X revient à étudier la convergence absolue de l'intégrale :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{a}\ln\left(\frac{u}{1-u}\right) + \frac{b}{a}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_0^1 (\ln(u) - \ln(1-u) + b)\,\mathrm{d}u.$$

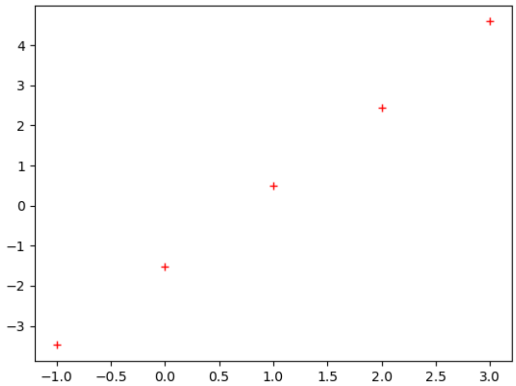
D'après la question précédente, cette intégrale converge par linéarité (absolument car ln est de signe constant sur $]0,1[$) donc X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{a}\int_0^1 (\ln(u) - \ln(1-u) + b)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\left(\int_0^1 \ln(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(1-u)\,\mathrm{d}u\right) + \frac{b}{a}. = \frac{b}{a}.$$

4. a.

Le code ci-dessous permet d'afficher le graphique ci-contre. Les points semblent alignés.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = [k for k in range(-1,4)]
f = np.array([0.03,0.18,0.62,0.92,0.99])
y = np.log(f/(1-f)) # np.log est vectoriel
plt.plot(x,y)
plt.show()
```



b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\dfrac{F(x)}{1-F(x)}\right) = ax - b$. Cette relation affine entre x_i et $F(x_i)$ est vérifiée expérimentalement à la question précédente. Ainsi, en réalisant une régression linéaire (par la méthode des moindres carrés) sur les points (M_i), on obtiendra une droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ où $(\alpha, -\beta)$ approchera le couple (a, b).

c. On sait que $\alpha = \dfrac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\mathbb{V}(x)} = \dfrac{\mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y)}{\mathbb{V}(x)}$ (d'après la formule de König-Huygens) et $\beta = \overline{y} - \alpha\overline{x}$.

d. D'après la question précédente, on peut écrire :

```
def regression(x,y):
    x_bar = np.mean(x)
    y_bar = np.mean(y)
    cov_xy = np.mean(x*y) - x_bar*y_bar
    a = cov_xy/np.var(x)
    b = a*x_bar - y_bar
    return a,b
```

Retour à la planche 37

Corrigé de l'exercice de la planche 38

1. é La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Soit $A \in]-\infty, 0]$ et $B \in [0, +\infty[$.

$$\int_A^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]_A^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{-A}} \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \text{ et } \int_0^B f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]_0^B = \frac{1}{1+e^{-B}} - \frac{1}{2} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1, et ainsi que f est une densité de probabilité.

2. Pour tout réel x, on a :

$$\mathbb{P}\left(\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{U}{1-U} \leqslant e^x\right) = \mathbb{P}\left(U \leqslant \frac{e^x}{1+e^x}\right) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}} \text{ puisque } \frac{e^x}{1+e^x} \in]0,1[.$$

La fonction de répartition de $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; elle est donc à densité, de densité donnée par la fonction

$$g : x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = f(x).$$

Les variables aléatoires $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$ et X suivent donc la même loi.

3.

```
import numpy as np
import random as rd

def simule_X():
    u = rd.random()
    return np.log(u/(1-u))
```

4. Le code ci-dessus utilise la loi faible des grands nombres pour estimer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.

```
def approx_esp(N=100000):
    s = 0
    for k in range(N):
        s += simule_X()
    return s/N

def approx_var(N=100000):
    s = 0
    for k in range(N):
        s += simule_X()**2
    return s/N - approx_esp()**2
```

On trouve que $\mathbb{E}(X) \approx 0$ et $\mathbb{V}(X) \approx 3,3$.

5. D'après le théorème du transfert, étudier l'existence de $\mathbb{E}(X)$ revient à étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \left|\ln\left(\frac{u}{1-u}\right)\right| \mathrm{d}u = \int_0^1 \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) \mathrm{d}u$$

Remarquons que l'intégrande ci-dessus étant continue sur $]0,1[$. Soit $A \in]0,1[$.

$$\int_A^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) \mathrm{d}u = \int_A^{\frac{1}{2}} (\ln(u) - \ln(1-u))\,\mathrm{d}u = \Big[u\ln u + (1-u)\ln(1-u)\Big]_A^{\frac{1}{2}} \underset{A\to0}{\longrightarrow} -\ln 2$$
$$\int_{\frac{1}{2}}^{B} \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) \mathrm{d}u = \int_{\frac{1}{2}}^{B} (\ln(u) - \ln(1-u))\,\mathrm{d}u = \Big[u\ln u + (1-u)\ln(1-u)\Big]_{\frac{1}{2}}^{B} \underset{A\to0}{\longrightarrow} \ln 2.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) \mathrm{d}u$ converge absolument et vaut 0 donc X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 0$.

6. a. Pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \dfrac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} \leqslant xe^{-x}$. On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge (en tant qu'espérance de la loi exponentielle de paramètre 1). Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
D'après le théorème du transfert, étudier l'existence de $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ revient à étudier l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} x^2 \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}\,\mathrm{d}x$$

par parité de l'intégrande. Puisque les fonction $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto -\dfrac{1}{1+e^x}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{2x}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{2xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

sont de même nature. Puisque la seconde intégrale converge, la première aussi et ainsi X admet une variance, égale à :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = 2\int_0^{+\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{1+e^x}\right]_0^{+\infty} + 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^A xe^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^A xe^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(-e^{-x}\right)^k\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^A xe^{-x}\frac{1-(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{car } \forall x \geqslant 0, -e^{-x} \neq 1 \\
&= \int_0^A \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x - (-1)^{n+1}\int_0^A \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pour tous $j \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$, $0 \leqslant xe^{-(j+1)x} \leqslant xe^{-x}$ et $0 \leqslant \dfrac{xe^{-(j+2)x}}{1+e^{-x}} \leqslant xe^{-jx}$ donc toutes les intégrales de la relation à prouver convergent et, par passage à la limite, on trouve lorsque A tend vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x + I_n.$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|I_n| = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} xe^{-(n+2)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2}\int_0^{+\infty} (n+2)xe^{-(n+2)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+2)^2}$$

On en déduit que l'intégrale I_n tend vers 0 par théorème d'encadrement. Par passage à la limite de la relation 6.b, on trouve que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

d. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} &= -\sum_{k=1}^{2N} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= -\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2N} \frac{(-1)^k}{k^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2N} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= -\sum_{p=1}^{N} \frac{(-1)^{2p}}{(2p)^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2N} \frac{1}{k^2} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2N} \frac{1}{k^2} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2N} \frac{1}{k^2} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{V}(X) = 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$.

Retour à la planche 38

Corrigé de l'exercice de la planche 39

1. a.

```python
import random as rd

def simule_X(p) :
    x=1
    a = rd.random()
    if a<p :
        while rd.random() < p :
            x += 1
    if a>p :
        while rd.random() > p :
            x += 1
    return x
```

   b. Le code ci-dessous permet d'approcher la probabilité $\mathbb{P}(X = Y)$ via la loi faible des grands nombres.

```python
def proba(p,N=10000):
    s = 0
    for k in range(N):
        x,y = XY(p)
        if x==y:
            s +=1
    return s/N
```

2. a. Notons B_k (respectivement N_k) l'événement "on tire une boule blanche (respectivement noire) au k-ème tirage". Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X = i, Y = j)\\
&= \mathbb{P}\left((N_1 \cap \cdots \cap N_i \cap B_{i+1} \cap \cdots \cap B_{i+j} \cap N_{i+j+1}) \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_i \cap N_{i+1} \cap \cdots \cap N_{i+j} \cap B_{i+j+1})\right)\\
&= \mathbb{P}\left(N_1 \cap \cdots \cap N_i \cap B_{i+1} \cap \cdots \cap B_{i+j} \cap N_{i+j+1}\right) + \mathbb{P}\left(B_1 \cap \cdots \cap B_i \cap N_{i+1} \cap \cdots \cap N_{i+j} \cap B_{i+j+1}\right)\\
&= p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j \text{ par indépendance des lancers}
\end{aligned}$$

   b. Par le même raisonnement, on trouve que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = i) = p^i q + q^i p$$

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X = n) = p\sum_{n=1}^{N} qp^{n-1} + q\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X = n)pq^{n-1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} p + q = 1.$$

On a donc bien $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

$$\sum_{n=1}^{N} |n\mathbb{P}(X = n)| = p\sum_{n=1}^{N} nqp^{n-1} + q\sum_{n=1}^{N} npq^{n-1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} p\frac{1}{q} + q\frac{1}{p}.$$

On en déduit que X admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p}$.

Remarquons que $\mathbb{E}(X) - 2 = \dfrac{p^2 - 2pq + q^2}{pq} = \dfrac{(p - q)^2}{pq} \geqslant 0$, i.e. $\mathbb{E}(X) \geqslant 2$.

c. Puisque $([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ forme un système quasi-complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned}\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j\\ &= p^2q^{j-1}\sum_{i=1}^{+\infty} p^{i-1}q + p^{j-1}q^2\sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1}p \text{ (toutes les séries convergent)}\\ &= p^2q^{j-1} + p^{j-1}q^2.\end{aligned}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{N} |n\mathbb{P}(Y=n)| = p\sum_{n=1}^{N} npq^{n-1} + q\sum_{n=1}^{N} nqp^{n-1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} p\frac{1}{p} + q\frac{1}{q} = 2.$$

On en déduit que Y admet une espérance égale à 2.

3. a. En appliquant la formule des probabilités totales avec le même système quasi-complet d'événements, on trouve que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, X=Y)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=i)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i+1}q^i + p^iq^{i+1}\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} (pq)^i(p+q)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} (pq)^i\\ &= \frac{1}{1-pq} - 1 = \frac{pq}{1-pq}.\end{aligned}$$

b. Si $p = \dfrac{1}{2}$, on trouve que :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{i+j}} = \mathbb{P}(X=i, Y=j).$$

Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X=1, Y=1) = p^2q + q^2p = pq(p+q) = pq$ et :

$$\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(X=1, Y=1) = 2pq\left(p^2+q^2\right) - pq = pq\left(2p^2 - 1 + 2q^2\right) = pq(2p-1)^2 \neq 0.$$

On en déduit que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $p = \dfrac{1}{2}$.

c. L'étude de la fonction $f : p \mapsto \dfrac{1}{1-pq} - 1 = \dfrac{1}{1-p+p^2} - 1$ sur $[0,1]$ montre qu'elle atteint un maximum en $p = \dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $\mathbb{P}(X=Y)$ est maximal pour $p = \dfrac{1}{2}$.

4. a. $N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$. (On suppose que le tirage de la n-ème boule termine la dernière série).

b. La variable N_1 est constante égale à 1 ; donc $\mathbb{E}(N_1) = 1$.

Puisque $\mathbb{P}(N_2 = 1) = \mathbb{P}\left((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)\right) = \dfrac{1}{2}$, N_2 suit la loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$, donc $\mathbb{E}(N_2) = \dfrac{3}{2}$.

Puisque :

$$\mathbb{P}(N_3 = 1) = \mathbb{P}\left((B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap N_2 \cap N_3)\right) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(N_3 = 3) = \mathbb{P}\left((B_1 \cap N_2 \cap B_3) \cup (N_1 \cap B_2 \cap N_3)\right) = \frac{1}{4},$$

$\mathbb{P}(N_3 = 2) = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $\mathbb{E}(N_3) = 2$.

c. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. En remarquant que :

$$N_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i,$$

on trouve par linéarité que $\mathbb{E}(N_n) = 1 + \dfrac{n-1}{2} = \dfrac{n+1}{2}$.

Retour à la planche 39

Corrigé de l'exercice de la planche 40

1. La matrice H_n est symétrique réelle donc diagonalisable “dans une base orthonormale de vecteurs propres” via le théorème spectral.
2.

```python
import numpy as np

def mat_H(n):
    mat = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            # décalage d'indice !
            mat[i,j] = 1/(i+j+1)
    val_p = np.linalg.eigvals(mat)
    print(val_p)
    prod = 1
    for v in val_p:
        prod *= v
    return mat, 1/prod
```

On trouve alors que l'inverse du produit des valeurs propres de H_3 est 2160.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(H_2) \Leftrightarrow \det(H_2 - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4+\sqrt{13}}{6} \text{ ou } \lambda = \frac{4-\sqrt{13}}{6}.$$

4. Puisque 0 n'est pas valeur propre de la matrice H_2, elle est inversible.

$$\mathrm{rg}(H_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{4}{15} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{14}{15} \end{pmatrix} = 3$$

La matrice H_3 est donc inversible.

5. L'application Φ est trivialement linéaire. Puisque $\Phi(a) = 0 \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0) \Leftrightarrow a = 0$. L'application Φ est donc injective. Puisque $\dim \mathbb{R}^n = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'application Φ est un isomorphisme.

6.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (P(t))^2 \,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n a_k t^{k-1}\right)^2 \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j t^{i+j-2}\right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \int_0^1 t^{i+j-2} \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j-1}.\end{aligned}$$

7. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_n. Pour x et y dans $\mathbb{R}^n$, on note $\langle x \mid y \rangle$ le produit scalaire de x et y.

   a. Par définition de H_n et f, les coordonnées de $u = f(e_i)$ dans la base canonique sont données par la i-ème colonne de H_n. Puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, la j-ème coordonnée du vecteur u est $\langle u \mid e_j \rangle$ et ainsi : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle f(e_i) \mid e_j \rangle = \dfrac{1}{i+j-1}$.

b. Si $x = (a_1, \dots, a_n)$, alors :

$$\langle f(x) \mid x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i f(e_i) \mid \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \langle f(e_i) \mid e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}.$$

c. D'après la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle f(x) \mid x\rangle = \int_0^1 (P(t))^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Soit λ une valeur propre de H_n, associée à un vecteur propre x. On a alors $\langle f(x) \mid x\rangle = \lambda \|x\|^2$; on en déduit que $\lambda \geqslant 0$. Les valeurs propres de H_n sont donc positives.

Retour à la planche 40

Corrigé de l'exercice de la planche 41

1. a. La moyenne empirique $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ du n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ admet pour espérance $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et variance $\dfrac{\mathbb{V}(X_1)}{n} = \dfrac{\mathbb{E}\left(X_1^2\right)}{n} = \dfrac{1}{n}$ (via la formule de König-Huygens).

   b. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

   c.

```python
import random as rd

def simule_X():
    return rd.choice([-1,1])

def simule_S(n, epsilon):
    s = 0
    for k in range(n):
        s += simule_X()
    if abs(s/n) >= epsilon:
        return 1
    else:
        return 0
```

   d. On applique la loi faible des grands nombres en remarquant que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A\right)$:

```python
def approx_proba(n, epsilon, N):
    x = 0
    for k in range(N):
        x += simule_S(n, epsilon)
    return x /N
```

Les tests montrent que $\frac{1}{n\varepsilon^2}$ est un majorant grossier de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right)$: les valeurs approchées des probabilités calculées sont bien inférieures à leurs majorants respectifs.

2. a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Puisque la variable S_n est finie, la variable e^{tS_n} l'est aussi ; celle-ci admet donc une espérance. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$, les variables $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_n}$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. On trouve alors :

$$\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1 + \cdots + tX_n}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1} \dots e^{tX_n}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right) \dots \mathbb{E}\left(e^{tX_n}\right).$$

En appliquant le théorème du transfert, on trouve que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{E}\left(e^{tX_k}\right) = e^{-t}\mathbb{P}(X_k = -1) + e^{-t}\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \geqslant 0,\ \mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n$.

   b. On s'appuie sur deux séries exponentielles ; pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0} \frac{(-t)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

On a de plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!}.$$

On peut montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N},\ 2^k k! \leqslant (2k)!$. On en déduit alors que, pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{t^{2k}}{2^k k!} \leqslant \dfrac{t^{2k}}{(2k)!}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k}}{2^k k!} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Le passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ nous donne l'inégalité recherchée : $\forall t \geqslant 0,\ \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

c. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon > 0$. On commence par remarquer que $-X_1$ a la même loi que X_1, assurant ainsi que $-S_n$ suit la même loi que S_n. On trouve alors que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(-\frac{S_n}{n} > \varepsilon\right) = 2\mathbb{P}\left(S_n > n\varepsilon\right) \leqslant 2\mathbb{P}\left(e^{tS_n} > e^{nt\varepsilon}\right) \leqslant 2\mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geqslant e^{nt\varepsilon}\right).$$

Puisque e^{tS_n} admet une espérance, on peut appliquer l'inégalité de Markov : $P\left(e^{tS_n} \geqslant e^{nt\varepsilon}\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right)}{e^{nt\varepsilon}}$. Ainsi, on déduit des deux dernières questions que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant 2\frac{\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right)}{e^{nt\varepsilon}} = 2\frac{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n}{e^{nt\varepsilon}} \leqslant 2\exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right).$$

La fonction du second degré $f : t \mapsto \dfrac{nt^2}{2} - nt\varepsilon$ atteint un minimum en ε (puisque ses deux racines sont 0 et 2ε). On en déduit que la fonction $g : t \mapsto 2\exp\left(\dfrac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right)$ admet un minimum sur $\mathbb{R}_+$ égal à $2\exp\left(\dfrac{-n\varepsilon^2}{2}\right)$. Puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant g(t),$$

on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \min_{t \in \mathbb{R}_+} g(t) = 2\exp\left(\frac{-n\varepsilon^2}{2}\right).$$

Le nouveau majorant est asymptotiquement bien meilleur que celui obtenu à la question 1.b puisque :

$$\exp\left(\frac{-n\varepsilon^2}{2}\right) \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n\varepsilon^2}\right).$$

Retour à la planche 41

Corrigé de l'exercice de la planche 42

1. On propose une solution itérative et une solution récursive :

```
import random as rd

def permutation_iter(n):
    liste1 = [k for k in range(1,n+1)]
    liste2 = []
    for k in range(n):
        indice = rd.randint(0,n-1-k)
        liste2.append(liste1[indice])
        liste1.pop(indice)
    return liste2

def permutation(n):
    if n == 1:
        return [1]
    else:
        liste = permutation(n-1)
        liste.insert(rd.randint(0,n),n)
        return liste
```

2. On fera attention au décalage d'indice entre les numérotations "mathématique" et "informatique".

```
def derangement(P):
    n = len(P)
    for k in range(n):
        if P[k]==k+1:
            return False
    return True
```

3. Le script ci-dessous (s'appuyant sur la loi faible des grands nombres) assure que 0,3645 une approximation de la probabilité recherchée.

```
N = 10000
somme = 0
for k in range(N):
    l1=[k for k in range(1,51)]
    rd.shuffle(l1)
    if derangement(l1):
        somme += 1
print(somme/N)
```

4. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$.

   a. Choisir une permutation de $[\![1,n]\!]$ revient à choisir :
      - le nombre $k \in [\![0,n]\!]$ de ses points fixes (il y a $\binom{n}{k}$ choix);
      - un dérangement sur l'ensemble des $n-k$ points restants (il y a D_{n-k} choix).

      Puisqu'il y a $n!$ permutations de $[\![1,n]\!]$, on a bien $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$.

   b. D'après la formule admise en début de sujet, la probabilité d_n qu'une permutation de $[\![1,n]\!]$ prise au hasard soit un dérangement est :

$$d_n = \frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{k!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

c. En reconnaissant une série exponentielle, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = e^{-1}$. Ce résultat est en accord avec l'approximation trouvée à la question 3 : $e^{-1} \approx 0.3679$.

5. a. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k la variable de Bernoulli égale à 1 si, et seulement si, $P(k)=k$.

   On peut alors écrire que $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

   Puisque les variables $X_1,\dots,X_n$ suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$, on trouve par linéarité de l'espérance que F_n a pour espérance 1.

   b. Remarquons que $F_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

   Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Puisqu'il y a $\binom{n}{k} D_{n-k}$ permutations à k points fixes, la probabilité que la permutation P ait k points fixes est égale à $\binom{n}{k}\frac{D_{n-k}}{n!}$. La loi de F_n est donc donnée par :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(F_n = k) = \binom{n}{k}\frac{D_{n-k}}{n!} = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$$

Retour à la planche 42

Corrigé de l'exercice de la planche 43

1. Pour tout l'exercice, notons F_k (resp. P_k) l'événement "on obtient "face" (resp. "pile") au k-ème lancer" pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement A_{2n} dans le cas où $n = 2$ est :

$$A_4 = (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4)$$

Puisque la réunion est disjointe et les lancers indépendants, on trouve que $\mathbb{P}(A_4) = \dfrac{3}{16}$

2. a.

```python
import random as rd

def simule_ind_A2(n):
    nbpiles = 0
    nbfaces = 0
    for k in range(2*n):
        if rd.random() < 0.5:
            nbfaces += 1
        else:
            nbpiles += 1
        if nbfaces >= nbpiles:
            return 0
    return 1
```

b. Le code ci-dessous donne une approximation des probabilités recherchées via la loi faible des grands nombres : $\mathbb{P}(A_4) \approx 0.187$ et $\mathbb{P}(A_{10}) \approx 0.1211$.

```python
N = 1000
x2, x5 = 0, 0
for k in range(N):
    x2 += simule_ind_A2(2)
    x5 += simule_ind_A2(5)
print(x2/N, x5/N)
```

3. Il y a au total 2^{2n} chemins puisqu'à chaque lancer, on a deux déplacements possibles (e nombre est aussi égal au nombre de séquences de lancers différents).

4. Pour tout $i \in [\![0, 2n]\!]$, il y a exactement $\binom{2n}{i}$ choix des lancers fournissant "pile", donc $\binom{2n}{i}$ chemins réalisent $[X_{2n} = i]$.

5. La variable aléatoire X_{2n} suit la loi binomiale de paramètre $2n$ et $\dfrac{1}{2}$ (la justification habituelle est de rigueur, mais on peut la donner à l'oral).

6. a. Puisque $([X_{2n} = i])_{0 \leqslant i \leqslant 2n}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{2n}) &= \sum_{i=0}^{2n} \mathbb{P}(X_{2n} = i) P_{[X_{2n}=i]}(A_{2n}) \\
&= \sum_{i=n+1}^{2n} \mathbb{P}(X_{2n} = i) P_{[X_{2n}=i]}(A_{2n}) \quad \left(\forall i \leqslant n \ P_{[X_{2n}=i]}(A_{2n}) = 0\right) \\
&= \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i} \frac{1}{2^{2n}} \frac{i-n}{n} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} i \binom{2n}{i} - \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i} \right).
\end{aligned}$$

b. On utilise les propriétés usuelles des coefficients binomiaux (formule du pion, symétrie, formule du binôme) :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=n+1}^{2n} i\binom{2n}{i} \\
&= 2n \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n-1}{i-1} \\
&= 2n \sum_{i=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} \\
&= n\left(\sum_{i=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} + \sum_{i=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{2n-1-i}\right) \\
&= n\left(\sum_{i=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n-1}{i}\right) \\
&= n \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} 1^i 1^{2n-1-i} \\
&= n 2^{2n-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{2n-i} + \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n}{i} + \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} - \frac{1}{2}\binom{2n}{n} \\
&= 2^{2n-1} - \frac{1}{2}\binom{2n-1}{n}.
\end{aligned}$$

On trouve alors que $\mathbb{P}(A_{2n}) = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n+1}}$.

7. a. Il y a $\binom{2n}{i}$ chemins au total

b. Une fois le point A atteint (par un pas qui monte), il reste $i-1$ montées parmi les $2n-1$ pas restants : il y a donc $\binom{2n-1}{i-1}$ chemins qui passent par $A(1,1)$.

c. Une fois le point B atteint (par un pas qui descend), il reste i montées parmi les $2n-1$ pas restants : il y a donc $\binom{2n-1}{i}$ chemins qui passent par $B(1,1)$.

d. (i) Le symétrique par rapport à l'axe (Ox) d'un chemin passant par A (et coupant l'axe) est nécessairement un chemin passant par B.
Réciproquement, le symétrique d'un chemin passant par B (et arrivant en Z) est un chemin qui passe par A. Puisque l'ordonnée de Z est positive, le chemin passant par B coupe l'axe Ox donc son symétrique aussi.
Il y a donc autant de chemins passant par A et coupant l'axe Ox, que de chemins passant par B .

(ii) Le nombre chemins passant par A et ne coupant pas l'axe Ox est donc égal à $\binom{2n-1}{i-1} - \binom{2n-1}{i}$.

(iii) On en déduit que :

$$\forall i > n,\ \mathbb{P}_{X_{2n}=i}(A_{2n}) = \frac{\binom{2n-1}{i-1} - \binom{2n-1}{i}}{\binom{2n}{i}} = \frac{\frac{(2n-1)!}{(i-1)!(2n-i)!} - \frac{(2n-1)!}{i!(2n-1-i)!}}{\frac{(2n)!}{i!(2n-i)!}} = \frac{i-(2n-i)}{2n} = \frac{i-n}{n}.$$

Retour à la planche 43

Corrigé de l'exercice de la planche 44

1. Remarquons que $[X_{n+1}=k]=([X_{n+1}=k]\cap[X_n=k-1])\cup([X_{n+1}=k]\cap[X_n=k+1])$

   Ainsi (on pouvait retrouver le résultat via la formule des probabilités totales) :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=k)&=\mathbb{P}(X_n=k-1)\mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)+\mathbb{P}(X_n=k+1)\mathbb{P}_{[X_n=k+1]}(X_{n+1}=k)\\&=\frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(X_n=k-1)+\frac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n=k+1).\end{aligned}$$

2. a.
```
import random as rd

def etape(N, k):
    x= rd.randint(1,N)
    if x <= k:
        return k-1
    else:
        return k+1
```
   b.
```
def valeursX(x_0, n):
   listeX = [x_0]
   for k in range(n):
      listeX.append(etape(N, listeX[-1]))
   return liste
```

3. a. Soit $n\in\mathbb{N}$.

   D'après la question 1, $\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}(X_n=0)+\dfrac{2}{3}\mathbb{P}(X_n=2)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1}=2)=\dfrac{2}{3}\mathbb{P}(X_n=2)+\mathbb{P}(X_n=3)$.
   Puisque $[X_{n+1}=0]=[X_n=1]\cap[X_{n+1}=0]$ et $[X_{n+1}=3]=[X_n=2]\cap[X_{n+1}=3]$, on trouve que :
$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n=1)\text{ et }\mathbb{P}(X_{n+1}=3)=\frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n=1).$$
   On retrouve donc que : $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=MU_n$.

   b. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$.
$$MX=X\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+y=0\\3x-3y+2z=0\\2y-3z+3t=0\\z-3t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x\\y=z\\z=3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=3t\\z=3t\end{cases}$$
   On en déduit que 1 est valeur propre de M et que le sous espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}\right)$.

   c. Remarquons que $U_0=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1. Ainsi, on peut montrer par récurrence que $U_n=M^nU_0=U_0$. La loi de X_n est donc la même que celle de X_0 : la loi binomiale de paramètres 3 et $\dfrac{1}{2}$.

   d. Si X_n suit la même loi que X_0, alors on a $U_0=M^nU_0$, i.e. U_0 est un vecteur propre de M^n (puisque $U_0\neq 0$). Le calcul de `np.linalg.eig(np.array([[0,1/3, 0, 0], [1,0,2/3,0],[0,2/3,0,1],[0,0,1/3,0]]))` montre que les valeurs propres de M sont 1, -1, $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$. Ainsi M est diagonalisable et les valeurs propres de M sont 1, $(-1)^n$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. L'instruction montre aussi que l'espace propre de M associé à la valeur propre -1 est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\-1\end{pmatrix}\right)$. Aucun des vecteurs de cet espace ne pouvant représenter une loi de probabilité, la seule loi que pourrait suivre X_0 pour que X_n ait la même loi que X_0 est la loi binomiale de paramètres 3 et $\dfrac{1}{2}$.

4. a.

```python
def simule_D():
    nb_A = 1
    tirages = 1
    while nb_A != 0:
        nb_A = etape(3,nb_A)
        tirages += 1
    return tirages
```

b. (i) Puisque $[D=2]=[X_1=1]\cap[X_2=0]$, on trouve que $\mathbb{P}(D=2)=\dfrac{1}{3}$ via la formule des probabilités composées.
Puisque $[D=4]=[X_1=1]\cap[X_2=2]\cap[X_3=1]\cap[X_4=0]$, on trouve que $\mathbb{P}(D=4)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$ via la formule des probabilités composées.

(ii) Puisque le nombre de boules dans l'urne A ne varie que d'une unité entre chaque tirages, un nombre impair de tirages donnera une variation impaire du nombre de boules dans l'urne A. Ainsi D ne peut prendre de valeurs impaires.

(iii) Puisque $U_{2k+2}=M^2U_{2k}$, on trouve que : $\mathbb{P}(X_{2k+2}=0)=\dfrac{1}{3}\mathbb{P}(X_{2k}=0)+\dfrac{2}{9}\mathbb{P}(X_{2k}=2)$. On sait aussi que $\mathbb{P}(X_{2k}=2)=1-\mathbb{P}(X_{2k}=0)$. On en déduit donc que : $\mathbb{P}(X_{2k+2}=0)=\dfrac{1}{9}\mathbb{P}(X_{2k}=0)+\dfrac{2}{9}$.

(iv) On sait que $D\leqslant 2k$ si $X_{2k}=0$. Ainsi :

$$[X_{2k}=0]=[X_{2k}=0]\cap[D\leqslant 2k]=[X_{2k}=0]\cap\left(\bigcup_{j=1}^{k}[D=2j]\right)=\bigcup_{j=1}^{k}\left((X_{2k}=0)\cap(D=2j)\right).$$

(v) Remarquons que $\mathbb{P}_{[D=2j]}(X_{2k}=0)=\mathbb{P}(X_{2k-2j}=0)$. En effet, si $[D_{2j}=0]$ est réalisé, l'urne est vide à l'issue du $2j$-ème lancer ; il reste alors $2k-2j$ tirages qui, partant d'une urne vide, redonnent une urne vide. D'après la question précédente, on a alors (la réunion étant disjointe) :

$$u_k=\mathbb{P}(X_{2k}=0)=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(D=2j)\mathbb{P}_{[D=2j]}(X_{2k}=0)=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(D=2j)\mathbb{P}(X_{2k-2j}=0)=\sum_{j=1}^{k}d_ju_{k-j}.$$

Puisque $u_0=1$, on trouve que $u_k=d_k+\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}d_ju_{k-j}$, i.e. $d_k=u_k-\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}d_ju_{k-j}$.

c. Dans le code de gauche, on calcule à chaque itération u_k puis d_k pour remplir la liste $[u_0,\dots,u_n]$ et $[0,d_1,\dots,d_n]$ (le 0 est conservé pour simplifier les calculs d'indice ; on le supprime à la dernière ligne).
Le script de droite est basé sur la loi faible des grands nombres pour calculer $d_1,\dots,d_5$.

```python
def loi_D(n):
    u, d = [1], [0]
    for k in range(1,n+1):
        uk = u[-1]/9 + 2/9
        dk = uk
        u.append(uk)
        for j in range(1,k):
            dk -= d[j]*u[k-j]
        d.append(dk)
    return d[1:]
```

```python
n = 5
N = 10000
valeurs_D = [0]*(2*n+1)
for k in range(N):
    D = simule_D()
    if D <= 2*n:
        valeurs_D[D] += 1/N

print(valeurs_D[2::2])
print(loi_D(5))
```

Retour à la planche 44

Corrigé de l'exercice de la planche 45

1. La variable aléatoire X suit trivialement la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
2.

```python
import random as rd

def simule_M(n):
    deA = rd.randint(1,n)
    sommeB = 1
    while rd.randint(1,n) < deA:
        sommeB += 1
    return sommeB
```

3. On trouve immédiatement que :
$$\mathbb{P}(M = j \mid X = 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. On suppose que $k \leqslant n$ (car sinon les probabilités demandées sont nulles). Sachant que l'événement $[X = k]$ est réalisé, la variable aléatoire M suit la loi géométrique de paramètre $p_k = \dfrac{n-k+1}{n}$. Ainsi :
$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(M = j \mid X = k) = \frac{n-k+1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \text{ et } \mathbb{P}(M \geqslant j \mid X = k) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}.$$

5. On applique la formule des probabilités totales avec $([X = k])_{1 \leqslant k \leqslant n}$ comme système complet d'événements :
$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(M \geqslant j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(M \geqslant j \mid X = k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} & \text{si } j \geqslant 2 \end{cases}$$

6.
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(M \geqslant j) \\
&= 1 + \sum_{j=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \\
&= 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \\
&= 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n}\frac{1}{1-\frac{k-1}{n}} \\
&= 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{i} \\
&= 1 - \frac{n-1}{n} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.
\end{aligned}$$

7. On trouve immédiatement que $G = M - 3$. On en déduit que :
$$\mathbb{E}(G) = \mathbb{E}(M) - 3 = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} - \frac{n-1}{n} - 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Corrigé de l'exercice de la planche 46

1.
```python
import numpy as np

def premier_un(epsilon):
    un = 1
    unplus1 = 1.5 - np.log(2)
    n = 1
    while unplus1 - un > epsilon:
        un = unplus1
        unplus1 += 1/(n+2) + np.log(n+1) - np.log(n+2)
        n += 1
    return n
```

2. a. Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, la variable aléatoire T_i suit la loi géométrique de paramètre $p_i = \dfrac{n-i+1}{n}$.

   b. On trouve immédiatement que $T = 1 + \sum\limits_{i=2}^{n} T_i$

   c. Par linéarité de l'espérance, T admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(T) = 1 + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(T_i) = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{n}{n-i+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k} = n\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right).$$

   d. Puisque T est une variable aléatoire positive admettant une espérance, l'inégalité de Markov assure que :

$$\mathbb{P}(T > cn\ln n) \leqslant \frac{\mathbb{E}(T)}{cn\ln n} = \frac{n(\ln n + u_n)}{cn\ln n} = \frac{1}{c} + \frac{u_n}{c\ln(n)}.$$

3. a. L'indépendance des lancers nous donne directement que $P(A_{i,k}) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k$.

   b. L'étude de la fonction $x \mapsto e^t - 1 - t$ montre que $1 + t \leqslant \exp(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   On en déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(A_{i,k}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \leqslant e^{-\frac{k}{n}}.$$

   Ainsi :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{i,k}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_{i,k}\right) \leqslant n\exp\left(-\frac{k}{n}\right)$$

   c. Remarquons que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_{i,k} = [T > k]$. Ainsi :

$$\forall c > 0,\ \mathbb{P}(T > cn\ln n) \leqslant n\exp\left(-c\ln n\right) = \frac{n}{n^c} = \frac{1}{n^{c-1}}.$$

4. Lorsque n est grand, l'inégalité de la question 3.c est plus précise puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{c-1}} = 0$ tandis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{c} + \dfrac{u_n}{c\ln n} = \dfrac{1}{c} > 0$.

Corrigé de l'exercice de la planche 47

1. a. Après factorisation de $\det(A - \lambda I_2)$, on trouve que les valeurs propres de A sont $a_0 - a_1$ et $a_0 + a_1$.

   b. La matrice A est toujours diagonalisable. En effet :
   - si $a_1 \neq 0$, la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ admet deux valeurs propres distinctes ;
   - si $a_1 = 0$, la matrice A est déjà diagonale.

2. On propose ici deux solutions, l'une orientée arithmétique, l'une utilisant une primitive Python (la fonction `diag`)

```python
import numpy as np

def matriceA(L):
    n = len(L)
    A = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i,j] = L[(j-i)%n]
    return A
```

```python
def matriceA(L):
    n = len(L)
    A = np.zeros((n,n))
    for k in range(n):
        ak = L[k]
        B = np.diag([ak]*(n-k),k)
        C = np.diag([ak]*k, k-n)
        A = A + B + C
    return A
```

3. On trouve après calculs que $AX = P(\omega)X$. Puisque $X \neq 0$, le vecteur X est bien un vecteur propre de A, associé à la valeur propre $P(\omega)$.

4. a. On pouvait simplement remarquer que :
$$z^4 = 1 \Leftrightarrow \left(z^2\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0 \Leftrightarrow z \in \{1; -1; i; -i\}.$$
   On pouvait aussi résoudre l'équation en passant par la notation exponentielle, comme présenté ci-après. Remarquons d'abord que 0 n'est pas solution de $z^4 = 1$. On peut donc écrire toute solution z de l'équation sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
$$z^4 = 1 \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow r^4 e^{4i\theta} = 1 \times e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\theta = 0\,[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0\,\left[\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow z \in \left\{e^{i0}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\}.$$

   b. On trouve alors quatre vecteurs propres de A : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$.

   c. (i) On pouvait calculer le produit matriciel à la main ou bien le faire calculer comme ceci par une machine :

```python
i = 1j # notation (physicienne) pour le nombre complexe i
Q = np.array([[1,1,1,1], [1,i,-1,-i],[1,-1,1,-1],[1,-i,-1,i]])
Qbar = np.array([[1,1,1,1], [1,-i,-1,i],[1,-1,1,-1],[1,i,-1,-i]])
print(np.dot(Q,Qbar))
```

   On trouve dans les deux cas que $Q\overline{Q} = 4I_4$.

   (ii) On déduit de la question précédente que la matrice Q est inversible. Puisqu'il s'agit de la matrice dans la base canonique des quatre vecteurs de la question 4.b, ces vecteurs forment une famille libre (son rang est égal à 4).

   (iii) Les quatre vecteurs colonnes de Q forment donc une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On en déduit que la matrice A est diagonalisable : elle admet quatre vecteurs propres qui forment une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   D'après la question 3, les valeurs propres de A sont $P(1)$, $P(i)$, $P(-1)$ et $P(-i)$.

   d. D'après la question précédentes, les valeurs propres de A sont $P(1) = 2$, $P(-1) = -22$ et $P(i) = P(-i) = 4$. Il vient immédiatement que les trois sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres 2, -2 et 4 sont respectivement $\text{Vect}(X_1)$, $\text{Vect}(X_3)$ et $\text{Vect}(X_2, X_4)$.

Corrigé de l'exercice de la planche 48

1. La matrice A a p lignes et n colonnes, tandis que la matrice B a n lignes et p colonnes.

2. Puisque l'espace d'arrivée de g est le même que l'espace de départ de f, i.e. $\mathbb{R}^n$, la composée $g \circ f$ existe bien ; Puisque la composée d'applications linéaires est linéaire, $g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

3. Puisque $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^p$, $g \circ f(\mathbb{R}^n) \subset g(\mathbb{R}^p)$, i.e. $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$. Ainsi $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(g) \leqslant p$. Puisque $\operatorname{rg}(g \circ f) \neq n$, $g \circ f$ n'est pas surjective.

   On pouvait aussi montrer que $g \circ f$ n'est pas surjective par l'absurde. Si $g \circ f$ était surjective, l'application g serait alors surjective : pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, il existerait $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $z = g \circ f(x) = g(y)$, où $y = f(x)$. L'application g ne peut cependant pas être surjective, puisque $\operatorname{rg}(g) \neq n$. On en déduit donc que $g \circ f$ n'est pas surjective.

4. a. En exécutant le script ci-dessous, on trouve que la matrice AB admet deux valeurs propres distinctes : -1 et 1. Puisque $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, AB est diagonalisable. Elle est donc diagonalisable.

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as la

AB = np.array([[0,1],[1,0]])
val_p, vect_p = la.eig(AB)
print(val_p)
print(vect_p)
```

   Le même script fournit aussi un vecteur propre associé à chaque valeur propre. On peut alors écrire $AB = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   b. Raisonnons par l'absurde et supposons que BX est nul. On aurait alors $ABX = 0$. Puisque 0 n'est pas valeur propre de la matrice AB, celle-ci est inversible, assurant alors que $X = 0$, ce qui est exclut par hypothèse. On en déduit que $BX \neq 0$.

   c. Supposons que λ soit valeur propre de AB. Il existe alors un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $ABX = \lambda X$. En multipliant à gauche par B, on obtient $BABX = \lambda BX$, qu'on réécrit $(BA)(BX) = \lambda(BX)$. Puisque BX est non nul d'après la question précédente, λ est valeur propre de BA (associée au vecteur propre BX).

   d. D'après les questions 4.a et 4.c, 1 et -1 sont valeurs propres de BA. D'après la question 3.b, $g \circ f$ n'est pas surjective, donc la matrice BA n'est pas inversible. On en déduit donc que 0 est valeur propre de BA. Puisque $BA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, BA est diagonalisable.

5. a.

```python
def valeurs_propres(A,B):
    AB = np.dot(A,B)
    BA = np.dot(B,A)
    return la.eigvals(AB), la.eigvals(BA)
```

   b. Soit λ une valeur propre non nulle de $C = AB$. Il existe alors un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $ABX = \lambda X$. On a alors $(BA)(BX) = \lambda(BX)$. Puisque $ABX = \lambda X \neq 0$, $BX \neq 0$. Ainsi BX est un vecteur propre de BA, associé à la valeur propre λ.

   c. La matrice $C = AB$ admet trois valeurs propres distinctes non nulles donc BA aussi. De plus, d'après la question 3, BA n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de BA. La matrice BA est d'ordre 4 et admet donc quatre valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

Corrigé de l'exercice de la planche 49

1. a. On ne sait pas simuler la loi de Poisson de paramètre λ, mais on peut l'approcher par la loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$ lorsque n est grand.

```python
import random as rd

def simule_Y(l, p):
    n = 1000
    Y = 0
    for k in range(n):
        if rd.random() < l/n and rd.random() < p:
            Y += 1
    return Y
```

   b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi binomiale de paramètre k et p.

   c. La formule des probabilités totales avec $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$ pour système complet assure que :

$$\begin{aligned}\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = i) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = i)\\ &= \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}\\ &= \frac{\lambda^i}{i!}p^ie^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\lambda^j(1-p)^j\\ &= \frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda}e^{-\lambda(1-p)}\\ &= \frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda p}\end{aligned}$$

   La variable aléatoire Y suit donc la loi de Poisson de paramètre λp. On en déduit que $\mathbb{E}(Y) = \lambda p$.

2. a. On trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+2} = 0,6a_{n+1} + 0,2b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 2a_n.$$

   b. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:

   - $E \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et la suite nulle appartient trivialement à E ;
   - Pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(u, v) \in E^2$, $(\lambda u_{n+3} + v_{n+3}) - 0,6(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) - 0,4(\lambda u_n + v_n) = 0$.

   L'ensemble E est donc bien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+3} - 0,6a_{n+2} - 0,4a_n = +0,2b_{n+1} - 0,4a_n = 0.$$

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien un élément de E.

   c.

```python
def calcul_a(n):
    a = [8000, 7700, 7400]
    for k in range(3,n+1):
        # calcul de a_k
        a.append(0.6*a[k-1]+0.4*a[k-3])
    return a[n]

for k in range(20):
    print(calcul_a(k))
```

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger (vers un nombre proche de 7599).

d. (i) On vérifie immédiatement que 1 est racine évidente de P.
On trouve après calculs que $P = (X-1)\left(X^2+0,4X+0,4\right) = (X-1)(X+0,2+0,6i)(X+0,2-0,6i)$.
On en déduit que 1 ; $-0,2-0,6i$ et $-0,2+0,6i$ sont les trois racines de P.

(ii) Supposons que r est racine de P. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r^{n+3} - 0,6r^{n+2} - 0,4r^n = r^n P(r) = 0$.
On en déduit donc que si r est racine de P, la suite des puissances de r appartient à E.

(iii) L'application est trivialement linéaire. Montrons qu'elle est bijective. Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, il existe une unique suite u vérifiant les conditions initiales $u_0 = a,\ u_1 = b$ et $u_2 = c$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 0,6u_{n+2} + 0,4u_n,$$

c'est-à-dire $\phi(u) = (a,b,c)$. L'application ϕ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{C}^3$.
On en déduit que $\dim E = \dim \mathbb{C}^3 = 3$.

(iv) La famille $((r_1^n),(r_2^n),(r_3^n))$ est libre dans E. Puisqu'elle est de cardinal $3 = \dim E$, c'est une base de E.

(v) D'après la question précédente, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n + \lambda_3 r_3^n = \lambda_1 + \lambda_2(-0,2-0,6i)^n + \lambda_3(-0,2+0,6i)^n.$$

Puisque $|-0,2-0,6i| = |-0,2+0,6i| = \sqrt{0,4} < 1$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers λ_1).

Retour à la planche 49

Corrigé de l'exercice de la planche 50

1.
```python
import random as rd

def simule_X(n):
    nb_boulesA = rd.randint(0,3)
    for k in range(n):
        if rd.randint(1,3) <= nb_boulesA:
            nb_boulesA -= 1
        else:
            nb_boulesA += 1
    return nb_boulesA
```

2. On trouve immédiatement que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $(\mathbb{P}(X_n = i))_{0 \leqslant i \leqslant 3}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :
$$\forall j \in [\![0,3]\!],\ \mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(X_n = i)\mathbb{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j)$$
   Ainsi, on trouve les quatre égalités suivantes : $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 3)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 2)$, i.e. $U_{n+1} = MU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E. Soit φ l'application définie sur E par :
$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = XP(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)P'(X).$$
   a. La linéarité de φ ne pose pas de problème :
$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in E^2,\ \varphi(\lambda P + Q) &= X\left(\lambda P(X) + Q(X)\right) + \frac{1}{3}(1 - X^2)\left(\lambda P'(X) + Q'(X)\right) \\ &= \lambda \left[XP(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)P'(X)\right] + XQ(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)Q'(X) \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$
   Calculons l'image de chaque vecteur de $\mathcal{B}$: on trouve que $\varphi(1) = X$, $\varphi(X) = X^2 + \frac{1}{3}\left(1 - X^2\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}X^2$, $\varphi\left(X^2\right) = X^3 + \frac{2}{3}X\left(1 - X^2\right) = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}X^3$, $\varphi\left(X^3\right) = X^4 + X^2\left(1 - X^2\right) = X^2$. Ainsi :
$$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(E) = \varphi\left(\operatorname{Vect}(\mathcal{B})\right) = \operatorname{Vect}\left(\varphi(\mathcal{B})\right) = \operatorname{Vect}\left(X, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}X^2, \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}X^3, X^2\right) \subset E.$$
   On en déduit que φ est un endomorphisme de E et que sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.

   b. Pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, on a :
$$\begin{aligned}\varphi\left(P_k\right) &= \frac{1}{8}X(X-1)^k(X+1)^{3-k} - \frac{1}{24}(X-1)(X+1)\left[k(X-1)^{k-1}(X+1)^{3-k} + (3-k)(X-1)^k(X+1)^{2-k}\right] \\ &= \frac{1}{8}X(X-1)^k(X+1)^{3-k} - \frac{1}{24}k(X-1)^k(X+1)^{4-k} - \frac{1}{24}(3-k)(X-1)^{k+1}(X+1)^{3-k} \\ &= \frac{1}{8}(X-1)^k(X+1)^{3-k}\left(X - \frac{1}{3}k(X+1) - \frac{1}{3}(3-k)(X-1)\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}k\right)P_k.\end{aligned}$$

c. Puisque les polynômes $P_0, \dots, P_3$ sont non nuls, on trouve que φ admet quatre valeurs propres distinctes : $1,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}$ et -1. Puisque φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 4, φ est diagonalisable.

4. On pose : $Q = \frac{1}{4}(X^3 + X^2 + X + 1)$.

a. Les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}$ sont données par le vecteur U_0.

b. Puisque (P_0, P_1, P_2, P_3) forme une base de E, il existe $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant 3} \in \mathbb{R}^4$ tel que $Q = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k P_k$. On peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(Q) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(1 - \frac{2}{3}k\right)^n P_k$. À la lecture du résultat attendu, on conjecture que $Q = P_0 + P_2$, ce qui se vérifie sans difficulté. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2.$$

5. D'après la question précédente, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Puisque $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, on trouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{8},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{3}{8},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{3}{8},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{8}.$$

Lorsque n est grand, on peut approcher la loi de X_n par la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{2}$. En effet, si Y suit cette loi, alors :

$$P(Y = 0) = \frac{1}{8},\ \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{3}{8},\ \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{3}{8},\ \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{8}.$$

6. Le code ci-dessous s'appuie sur la loi faible des grands nombres pour donner une approximation de la loi de X_n lorsque n est grand.

```
n = 500
valeurs_X = [0]*4
for k in range(n):
    x = simule_X(n)
    valeurs_X[x] += 1/n
print(valeurs_X)
print([1/8,3/8,3/8,1/8])
```

On remarquera que la dernière ligne permet de comparer l'approximation de la loi de X_n (obtenue à l'avant-dernière ligne) à la loi limite.

Retour à la planche 50

Corrigé de l'exercice de la planche 51

1. Puisque $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on trouve que $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\ \left(= \overline{j}\right)$, $j^3 = 1$ et $j^4 = j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. a. On trouve facilement après calculs que rs et $-rs$ sont valeurs propres de M. Puisque $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et puisque $rs \neq -rs$ (car $rs \neq 0$), M est diagonalisable.

   On trouve de plus que $\left(\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ -s \end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathcal{M}_{2,1}(C)$ formée de vecteurs propres de M.

   b. Supposons que $r = 0$ ou $s = 0$. La matrice M est alors triangulaire inférieure ; elle n'admet que 0 pour valeur propre. Si M était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc égale à la matrice nulle, ce qui n'est possible que si $r = s = 0$. Réciproquement, si $r = s = 0$, alors $M = 0$ donc M est diagonalisable.

   Conclusion : lorsque $r = 0$ ou $s = 0$, la matrice M est diagonalisable si, et seulement si $r = s = 0$.

3.

```python
def decalage(L):
    return L[1:] + [L[0]]

def matrice(a_1,a_2,a_3):
    A=[]
    L=[a_1,a_2,a_3]
    for i in range(3):
        A.append(L[:])
        L = decalage(L)
    return A
```

4. Si a_1, a_2 et a_3 sont réels, la matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

5. Puisque $AU = (a_1+a_2+a_3)U$ et puisque $U \neq 0$, U est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre $a_1+a_2+a_3$.

6. a. On trouve que :

$$AX_1 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 j + a_3 j^2 \\ a_2 + a_3 j + a_1 j^2 \\ a_3 + a_1 j + a_2 j^2 \end{pmatrix} = \left(a_1 + a_2 j + a_3 j^2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = \left(a_1 + a_2 j + a_3 j^2\right) X_2$$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 j^2 + a_3 j \\ a_2 + a_3 j^2 + a_1 j \\ a_3 + a_1 j^2 + a_2 j \end{pmatrix} = \left(a_1 + a_2 j^2 + a_3 j\right) \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = \left(a_1 + a_2 j^2 + a_3 j\right) X_1$$

   Notons s (resp. r) une des deux racines carrées $a_1 + a_2 j + a_3 j^2$ (resp. $a_1 + a_2 j^2 + a_3 j$). On peut alors écrire $AX_1 = s^2 X_2$ et $AX_2 = r^2 X_1$.

   b. Puisque (U, X_1, X_2) est libre, c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$. La matrice de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ relativement à cette base est :

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \\ 0 & s^2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) \neq 3 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & r^2 \\ 0 & s^2 & -\lambda \end{pmatrix} \neq 3 \\ &\Leftrightarrow \lambda = a_1 + a_2 + a_3 \text{ ou } \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & r^2 \\ 0 & s^2 & -\lambda \end{pmatrix} \neq 3 \\ &\Leftrightarrow \lambda = a_1 + a_2 + a_3 \text{ ou } \mathrm{rg}(M - \lambda I_2) \neq 2 \\ &\Leftrightarrow \lambda = a_1 + a_2 + a_3 \text{ ou } \lambda \in \mathrm{Sp}(M) \end{aligned}$$

   On en déduit $\mathrm{Sp}(A) = \{a_1 + a_2 + a_3, rs, -rs\}$.

7. a. En reconnaissant une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison j, on trouve que :

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 + j + j^2 = 0,\ r^2 = 3,\quad \text{et } s^2 = 1 + j^2 + j^4 = 0.$$

On en déduit donc que A n'est pas diagonalisable (puisque $s = 0$ et $r \neq 0$.

b. On trouve que :

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 + j,\ r^2 = j + j^2 = -1 = i^2,\quad \text{et } s^2 = 2j = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2.$$

La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ admet trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

Retour à la planche 51

Corrigé de l'exercice de la planche 52

1. La matrice A est diagonalisable car symétrique réelle (théorème spectral). Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 5z = 0 \\ 12y + 24z = 0 \\ 6y + 12z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y + z = 6x \\ -2x + 2y + 2z = 6y \\ x + 2y + 5z = 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y + z = 0 \\ -2x - 4y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y + z.$$

On en déduit que $E_0 = \operatorname{Vect}((-1,-2,1))$ et $E_1 = \operatorname{Vect}((-2,1,0),(1,0,1))$. Puisque la somme des dimensions des espaces propres est égale à 3, 0 et 1 sont bien les seules valeurs propres de f.

2. La matrice A n'est pas inversible puisque 0 est valeur propre de f.

3.

```
def proj(M):
    n = len(M)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            s = 0
            for k in range(n):
                s += M[i][k] * M[k][j]
            if s != M[i][j]:
                return False
    return True
```

Le test sur la matrice A renvoie `False` alors qu'il devrait renvoyer `True` puisqu'il existe une matrice P inversible telle que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. Cette relation de similitude nous donne immédiatement que $A^2 = A$.

Cette différence s'explique par le fait que les erreurs de calcul sur les flottants ne permettent pas d'effectuer correctement le test `if s != M[i][j]`.

4. On sait que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((5,-2,1),(-2,2,2),(1,2,5)) = \operatorname{Vect}((5,-2,1),(1,2,5))$ puisque $2(-2,2,2) = (1,2,5) - (5,-2,1)$. Puisque $\operatorname{Im}(f)$ et E_1 sont deux plans (à justifier à l'oral), il suffit de montrer l'inclusion de l'un dans l'autre. Or $(1,2,5) = 2(-2,1,0) + 5(1,0,1)$ et $(5,-2,1) = -2(-2,1,0) + (1,0,1)$, donc $\operatorname{Im}(f) \subset E_1$ et ainsi $\operatorname{Im}(f) = E_1$.

5.

```
def ps(u,v):
    return u[0]*v[0] + u[1]*v[1] + u[2]*v[2]
```

6. a. Le vecteur $(-1,-2,1)$ est orthogonal à $(-2,1,0)$ et $(1,0,1)$ donc à tout vecteur de $\operatorname{Vect}((-2,1,0),(1,0,1)) = E_1$. On en déduit que tout vecteur de $E_0 = \operatorname{Vect}((-1,-2,1))$ est orthogonal à tout vecteur de E_1. *On pouvait aussi immédiatement invoquer que les espaces propres d'un endomorphisme dont une matrice est symétrique réelle sont orthogonaux.*

   b. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On a alors $f(x) \in \operatorname{Im}(f) = E_1$. Puisque $f^2 = f$, $f(f(x) - x) = 0$ donc $f(x) - x \in E_0$. Le vecteur $f(x) - x$ est donc orthogonal à tout vecteur y de E_1.

7. En posant $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{30}}(1,2,5)$, on trouve après calculs que (e_1,e_2) forme une base orthonormée de E_1. On sait que la distance recherchée est égale à $\|t - f(t)\|$. Or l'expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée nous donne : $f(t) = \langle t, e_1\rangle e_1 + \langle t, e_2\rangle e_2 = \dfrac{1}{3}(1,2,5)$. On trouve que $1,63$ est une approximation à 10^{-2} près de la distance de t à E_1.

Corrigé de l'exercice de la planche 53

1. a. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n'(x) = nx^{n-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{nx^n - 1}{x}$. On en déduit le tableau de variations de f_n (la limite en $+\infty$ s'obtient par croissances comparées : $f_n(x) = x^n\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^n} - \dfrac{2}{x^n}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$).

x	0		$n^{-\frac{1}{n}}$		$+\infty$
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$f_n\left(n^{-\frac{1}{n}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrons que $f_n\left(n^{-\frac{1}{n}}\right) < 0$. D'après $(\star)$, on a :

$$f_n\left(n^{-\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(n^{-\frac{1}{n}}\right) - n = \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} - n \leqslant \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} - n = 1 - n < 0.$$

La fonction f_n réalise une bijection entre $\left[0, n^{-\frac{1}{n}}\right]$ et $\left[f_n\left(n^{-\frac{1}{n}}\right), +\infty\right]$ et entre $\left[n^{-\frac{1}{n}}, +\infty\right]$ et $\left[f_n\left(n^{-\frac{1}{n}}\right), +\infty\right]$. Puisque $0 \in \left[f_n\left(n^{-\frac{1}{n}}\right), +\infty\right]$, il existe un unique réel $u_n \in \left]0; n^{-\frac{1}{n}}\right[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et un unique réel $v_n \in \left]n^{-\frac{1}{n}}; +\infty\right[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.

2. **Étude de la suite** (v_n)

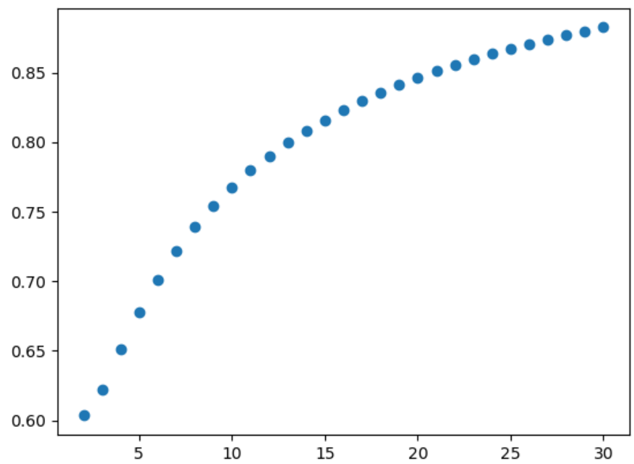
a. Soit $n \geqslant 2$. D'après $(\star)$, on a :

$$f_n\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) = 2n - \frac{1}{n}\ln(2n) - n = n - \frac{1}{n}\ln(2n) \geqslant n - \frac{2n-1}{n} = \frac{(n-1)^2}{n} > 0 = f_n(v_n).$$

Puisque f_n est strictement croissante sur $\left[n^{-\frac{1}{n}}, +\infty\right]$, on trouve que $v_n \leqslant (2n)^{\frac{1}{n}}$.

b. Le code ci-dessous (à gauche) permet d'obtenir le graphique de droite.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,n):
    return x**n - np.log(x)-n

def v(n):
    a, b= n**(-1/n), (2*n)**(-1/n)
    while b-a > 2*(10**(-3)):
        c = (a+b)/2
        if f(a,n)*f(c,n) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2

abs = list(range(2,31))
ord = [v(n) for n in abs]
plt.plot(abs,ord,'o')
plt.show()
```



c. On sait que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $n^{-\frac{1}{n}} \leqslant (2n)^{\frac{1}{n}}$, i.e. $e^{-\frac{1}{n}\ln n} \leqslant v_n \leqslant e^{\frac{1}{n}\ln(2n)}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(2n) = 0$ par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ (théorème d'encadrement).

d. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$, $v_n - \ell = v_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. Puisque $\dfrac{v_n^n}{n} = \dfrac{\ln(v_n)}{n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on trouve que $v_n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\ln(v_n^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. On a alors que $\dfrac{1}{n}\ln v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. On en déduit donc que $v_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

3. **Étude de la suite** (u_n)

a. On peut appliquer l'algorithme de recherche dichotomique pour chercher une approximation de u_n entre 0 et $n^{-\frac{1}{n}}$.
Le code suivant répond à la question :

```
def u(n):
    a, b= 0,n**(-1/n)
    while b-a > 2*(10**(-3)):
        c = (a+b)/2
        if f(b,n)*f(c,n) < 0:
            a = c
        else:
            b = c
    return (a+b)/2

for n in range(2,9):
    print(u(n))
```

On remarquera que le code a été adapté pour ne jamais évaluer la fonction f_n en 0.

b. Soit $n \geqslant 2$. Puisque $\ln(u_{n+1}) = u_{n+1}^{n+1} - (n+1)$, on trouve que :

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n - \ln(u_{n+1}) - n = u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1} + 1 = u_{n+1}^n(1 - u_{n+1}) + 1.$$

Puisque $u_{n+1} \leqslant (n+1)^{-\frac{1}{n+1}} < 1$, $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_{n+1})$. Puisque f_n est strictement décroissante sur $\left[0, n^{-\frac{1}{n}}\right]$ (qui contient u_n et u_{n+1}), on en déduit que $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

c. Pour pour $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_2$ donc $0 \leqslant u_n^n \leqslant u_2^n$. Puisque $|u_2| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_2^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$ d'après le théorème d'encadrement.
Pour tout $n \geqslant 2$, $\ln(u_n) + n = u_n^n$ donc $u_n e^n = e^{u_n^n}$. Le résultat précédent assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n e^n = 1$, i.e. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.

Retour à la planche 53

Corrigé de l'exercice de la planche 54

1. On commence par remarquer que $X_1(\Omega) = \{0;1\}$. Puisque la quantité de phéromone est initialement identique, il y a équiprobabilité des choix de chemin pour la première fourmi. Ainsi X_1 suit la loi uniforme sur $\{0;1\}$ ou encore la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Remarquons que $X_2(\Omega) = \{0;1;2\}$. On trouve que :

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{[\alpha_1=r]\cap[\beta=1]}(A_2) = \frac{r}{2(r+1)}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{[\alpha_1=1]\cap[\beta=r]}(B_2) = \frac{r}{2(r+1)}$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{r+1}.$$

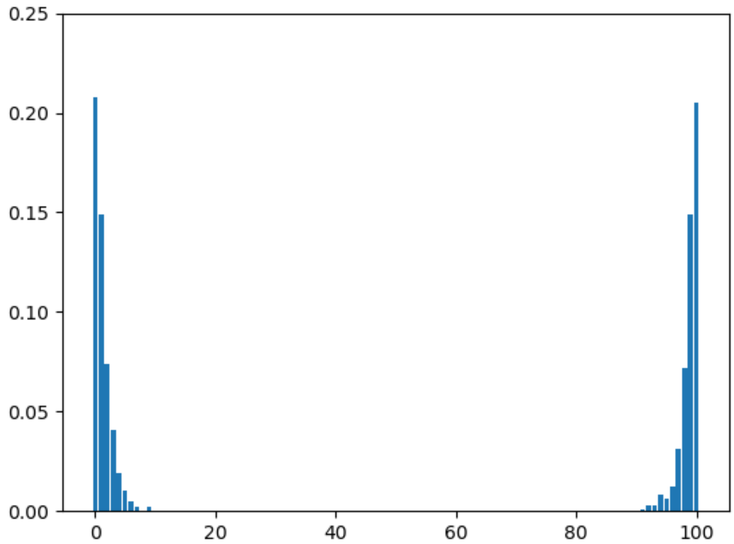
On trouve de la même manière la loi de X_3 (un arbre peut aider !) : $\mathbb{P}(X_3 = 3) = \mathbb{P}(X_3 = 0) = \frac{r^3}{2(r+1)(r^2+1)}$, $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{1}{2(r+1)} + \frac{r}{2(r+1)(r^2+1)}$, $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{2(r+1)} + \frac{1}{2(r+1)(r^2+1)}$.

2.
```python
import random as rd

def simulX(n,r):
    a, b = 1, 1
    x = 0
    for k in range(n):
        if rd.random() < a/(a+b):
            x += 1
            a *= r
        else:
            b *= r
    return x
```

3. a.
```python
def loiX(n,r):
    N = 1000
    liste = [0]*(n+1)
    for k in range(N):
        x = simulX(n,r)
        liste[x] += 1/N
    return liste
```

b. Le code ci-dessous permet d'afficher le graphique ci-contre.

```python
from matplotlib.pyplot import *
n, r = 100, 2
abs = list(range(n+1))
loi = loiX(n,r)
bar(abs,loi)
ylim (0, 0.25)
show()
```



4. En remarquant que $\mathbb{P}(X_{n+1} = n+1) = \dfrac{r^n}{1+r^n}\mathbb{P}(X_n = n)$ pour tout entier n, on trouve à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{r^i}{1+r^i}.$$

5. Remarquons que les suites $(p_n(r))_{n\geqslant 1}$ et $(q_n(r))_{n\geqslant 1}$ sont strictement positives. Puisque :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{p_{n+1}(r)}{p_n(r)} = \frac{r^{n+1}}{1+r^{n+1}} < 1,\ \frac{q_{n+1}(r)}{q_n(r)} = 1 - \frac{1}{1-r^{2n+3}} < 1,$$
les suites $(p_n(r))_{n\geqslant 1}$ et $(q_n(r))_{n\geqslant 1}$ sont décroissantes. Étant minorées par 0, elles convergent (vers des réels positifs).

6. On a bien : $\forall n \geqslant 1,\ p_n(r) = \frac{1}{1+r^{-1}} \cdots \frac{1}{1+r^{-n}}$.
D'après l'inégalité admise, on a :
$$\forall n \geqslant 1,\ \left(1+r^{-1}\right)\ldots\left(1+r^{-n}\right) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} r^{-k}\right) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} r^{-k}\right) = \exp\left(\frac{1}{r}\frac{1}{1-\frac{1}{r}}\right) = \exp\left(\frac{1}{r-1}\right).$$
On en déduit par passage à la limite que $p(r) \geqslant \exp\left(-\dfrac{1}{r-1}\right)$.

7. Soit $r > 1$. En utilisant toujours l'inégalité admise à la question précédente, on peut montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \frac{1}{r^{2k+1}} \leqslant e^{-\frac{1}{r^{2k+1}}}.$$
On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n(r) \leqslant \exp\left(-\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{r^{2k+1}}\right)$. Par passage à la limite, on trouve que :
$$q(r) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{r}\frac{1}{1-\frac{1}{r^2}}\right) = \exp\left(\frac{r}{r^2-1}\right).$$

8. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{2}p_{n-1}(r)$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{2}p(r)$.
D'après les deux questions précédentes, on trouve que :
$$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{r-1}\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = n) \leqslant \exp\left(\frac{r}{r^2-1}\right).$$

Conclusion : ce modèle vous semble-t-il approprié pour rendre compte du comportement des fourmis dans la réalité ?
Retour à la planche 54

Corrigé de l'exercice de la planche 55

1. a. On peut étudier la fonction du second degré $x \mapsto x(1-x)$, ou remarquer que $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$, i.e. $p^2 - p + \frac{1}{4} \geqslant 0$, i.e. $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

   b. D'après le cours, la moyenne empirique $\overline{X_n}$ admet une espérance et une variance, respectivement égales à p et $\frac{p(1-p)}{n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4\varepsilon^2}.$$
   En choisissant ε tel que $\frac{1}{4\varepsilon^2} = 0,05$, i.e. $\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{n}}$, on trouve alors par passage au complémentaire que :
$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} - \sqrt{\frac{5}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{X_n} + \sqrt{\frac{5}{n}}\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\overline{X_n} - \sqrt{\frac{5}{n}} < p < \overline{X_n} + \sqrt{\frac{5}{n}}\right) \geqslant 0,95.$$
   L'intervalle $\left[\overline{X_n} - \sqrt{\frac{5}{n}}; \overline{X_n} + \sqrt{\frac{5}{n}}\right]$ est donc bien un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $0,95$.

2.
```
import random as rd

def test(n,p,a,b):
    somme = 0
    for k in range(n):
        if rd.random() < p:
            somme += 1
     if a <= somme/n <= b:
         return 1
     else:
         return 0
```

3. On fixe un réel strictement positif t quelconque et ϵ un réel strictement positif quelconque.

   a. Remarquons que :
$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(nt\overline{X_n} \geqslant nt(p+\epsilon)\right) = \mathbb{P}\left(e^{nt\overline{X_n}} \geqslant e^{tn(p+\epsilon)}\right).$$

   b. Puisque la variable aléatoire $e^{t\overline{X_n}}$ est positive et admet une espérance (elle est finie), on peut lui appliquer l'inégalité de Markov (puis utiliser l'indépendance de $X_1, \ldots, X_n$ et enfin le théorème du transfert) :
$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(e^{nt\overline{X_n}} \geqslant e^{nt(p+\epsilon)}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left(e^{nt\overline{X_n}}\right)}{e^{t(p+\epsilon)}} = \frac{\mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right)\ldots\mathbb{E}\left(e^{tX_n}\right)}{e^{t(p+\epsilon)}} = \frac{\left(pe^t + q\right)^n}{e^{t(p+\epsilon)}} = e^{n\left(\ln(pe^t+q) - t(p+\epsilon)\right)}.$$

   c. Par croissance de l'exponentielle, on obtient immédiatement l'inégalité : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad \mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{n\left(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon\right)}$.
   L'étude de la fonction du second degré $f : t \mapsto \frac{t^2}{8} - t\varepsilon$ montre que f admet un minimum égal à $f(4\varepsilon) = -2\varepsilon^2$. On en déduit que
$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}$$

4. En notant $Y_k = 1 - X_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on remarque que $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre q. En appliquant le même raisonnement qu'aux questions précédentes, on trouve par symétrie que $\mathbb{P}\left(\overline{Y_n} - q \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}$.

5. Puisque $\overline{Y_n} = 1 - \overline{X_n}$, la question précédente assure que $\mathbb{P}\left(p - X_n\right) \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}$.

   On en déduit que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(p - \overline{X_n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

6. En choisissant ε tel que $2e^{-2n\varepsilon^2} = 0,05$, i.e. $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\ln 40}{2n}}$, on trouve que $\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 0,05$, et ainsi $\left[\overline{X_n} - \varepsilon, \overline{X_n} + \varepsilon\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95.

   L'amplitude du premier intervalle est égale à $2\sqrt{\dfrac{5}{n}}$ tandis que celle du second est égale à $2\sqrt{\dfrac{\ln 40}{2n}}$.

   Puisque $\dfrac{\ln 40}{2} < 2 < 5$, l'amplitude du second intervalle de confiance est plus petite que celle du premier.

Retour à la planche 55

Corrigé de l'exercice de la planche 56

1. a. Notons $X = -\ln(U)$. On trouve immédiatement que $X(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(U \geqslant e^{-t}) = 1 - \mathbb{P}(U < e^{-t}) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnait une fonction de répartition connue : la variable $-\ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b. C'est encore du cours...

```
import random as rd
import numpy as np

def simule_Y(n):
    y = 0
    for k in range(n):
        x = -np.log(1-rd.random())
        if x > y:
            y = x
    return y
```

c. Le code ci-dessous permet de conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{S_n} = 1$.

```
def esperance_Y(n,N):
    somme = 0
    for k in range(N):
        somme += simule_Y(n)
    return somme/N

def S(n):
    somme = 0
    for k in range(1,n+1):
        somme += 1/k
    return somme

for n in range(100,1000,100):
    print(esperance_Y(n,1000)/S(n))
```

2. On a immédiatement que $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Par indépendance de $X_1, \ldots, X_n$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \ldots \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

La fonction F_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, et est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. On en déduit que Y_n est une variable à densité, dont une densité est donnée par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

3. a. L'étude de la fonction $(u \mapsto (1-u)^n - 1 + nu)$ montre qu'elle est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Elle atteint donc son minimum en 0. On Montrer que pour tout réel u de $[0, 1]$, on a :

$$(1 - u)^n \geqslant 1 - nu.$$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+,\ e^{-x} \in [0,1]$. On peut donc appliquer l'inégalité précédente et trouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant 1 - F_n(x) = 1 - \left(1 - e^{-x}\right)^n \leqslant ne^{-x}.$$

Puisque l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))\,\mathrm{d}x$ converge par comparaison de fonctions positives.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant x(1 - F_n(x)) \leqslant nxe^{-x}$. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (par croissances comparées), le théorème d'encadrement assure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(1 - F_n(x)) = 0$.

4. a. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $(x \mapsto x)$ et $\left(x \mapsto (1 - e^{-x})^n - 1\right)$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, on peut appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\int_0^A x f_n(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\left(F_n(x) - 1\right)\Big]_0^A - \int_0^A (F_n(x) - 1)\,\mathrm{d}x = \int_0^A (1 - F_n(x))\,\mathrm{d}x - A(1 - F_n(A)).$$

b. Les deux question précédentes assurent que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} |x f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))\,\mathrm{d}x.$$

Puisque f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge (absolument), i.e. Y_n admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))\,\mathrm{d}x.$$

5. La fonction $\varphi : x \mapsto 1 - e^{-x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. De plus, $\varphi(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} \varphi = 1$. En posant $t = 1 - e^{-x}$, on trouve que $\mathrm{d}t = e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} e^x \left(1 - \left(1 - e^{-x}\right)\right) e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t}\,\mathrm{d}t;$$

(la dernière intégrale converge puisque la première converge).

On en déduit que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_{[0,1[} \frac{1 - t^n}{1 - t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n.$$

Explications de ce passement de jambes un poil technique :

- la seconde intégrale est une intégrale généralisée sur $[0, 1[$;
- or pour tout $t \in [0, 1[$, $\displaystyle\frac{1 - t^n}{1 - t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k\,\mathrm{d}t$;
- puisque les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t$ converge, on obtient la troisième égalité par linéarite.

Retour à la planche 56

Corrigé de l'exercice de la planche 57

1. La fonction f est bien positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Pour $A > 0$, on a :
$$\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-\frac{x^2}{2a}}\right]_0^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1, et ainsi que f est une densité.

2. D'après les calculs réalisés à la question précédente, on a :
$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

3. a. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :
$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant 2ay) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \mathbb{P}\left(X \leqslant \sqrt{2ay}\right) & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_X\left(\sqrt{2ay}\right) & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$
On reconnait la fonction de répartition d'une loi usuelle : Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

b. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a :
$$\mathbb{P}(U \leqslant u) = \mathbb{P}\left(1 - e^{-Y} \leqslant u\right) = \mathbb{P}\left(e^{-Y} \geqslant 1 - u\right) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(Y \leqslant -\ln(1-u)\right) & \text{si } u < 1 \\ 1 & \text{si } u \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } 0 \leqslant u < 1 \\ 1 & \text{si } u \geqslant 1 \end{cases}$$
On reconnait la fonction de répartition d'une loi usuelle : U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

c. C'est encore du cours !

```
import random as rd
import numpy as np

def Y():
    return - np.log(1-rd.random())
```

d. Il suffit de remarquer que $X = \sqrt{2aY}$ (puisque X et Y sont presque-sûrement positives).

```
def X(a):
    y = Y()
    return (2*a*y)**0.5
```

4. a. Encore une question de cours : $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2a\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a}}$.

b. Il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -e^{-\frac{x^2}{2a}}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. De plus, on a $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$ par croissances comparées. On trouve alors par intégration parties (la première intégrale converge puisque la seconde converge) que :
$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x = \left[-xe^{-\frac{x^2}{2a}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2a\pi}}{2}.$$
On en déduit que X admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\sqrt{2a\pi}}{2}$.

c. Puisque Y admet une espérance, X^2 admet une espérance par linéarité et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 2a\mathbb{E}(Y) = 2a$.

d. On en déduit que X admet une variance donnée par la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = 2a - \frac{a\pi}{2} = \frac{(4-\pi)a}{2}.$$

5. On considère désormais que le paramètre $a \in]0;1]$ est inconnu et on souhaite l'estimer.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes ayant toutes la même loi que X. On note :

$$S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

6. Par linéarité, on trouve que S_n admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k^2\right) = a.$$

   On trouve bien que S_n est un estimateur sans biais de a.

7. Puisque Y admet une variance, $X^2 = 2aY$ admet aussi une variance, égale à $\mathbb{V}\left(X^2\right) = 4a^2\mathbb{V}(Y) = 4a^2$.

8. Par propriétés de la variance et puisque $a \in]0;1]$, on trouve que :

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\left(X_k^2\right) = \frac{a^2}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (S_n admet une variance), on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

   En choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, on trouve alors que :

$$\mathbb{P}\left(a \in \left]S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right[\right) \geqslant 1 - \frac{100}{n}.$$

   En choisissant n tel que $\dfrac{100}{n} \leqslant 0,05$, i.e. $n \geqslant 2000$, on a :

$$\mathbb{P}\left(a \in \left]S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right[\right) \geqslant 0,95.$$

   On en déduit que $\left]S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}\right[$ est un intervalle de confiance de a pour un niveau de confiance d'au moins 95% dès que $n \geqslant 2000$.

Retour à la planche 57

Corrigé de l'exercice de la planche 58

1. a. On simule les $n-1$ premières lois uniformes jusqu'à dépasser le seuil. Dans le cas contraire, on simule une réalisation de X_n qu'on renvoie.

```
import random as rd

def simuleZ(n,s):
    for k in range(n-1):
        xk = rd.random()
        if xk  >= s:
            return xk
    return rd.random()
```

   b. On applique la loi des grands nombres.

```
def competence_moyenne(n,s):
    N = 1000
    somme = 0
    for k in range(N):
        somme += simuleZ(n,s)
    return somme/N
```

2. On trouve immédiatement que $Z_{n,0} = X_1$ et $Z_{n,1} = X_n$ presque-sûrement. On en déduit que $\mathbb{E}(Z_{n,0}) = \mathbb{E}(Z_{n,1}) = \dfrac{1}{2}$.

3. Soit $t \in [0,1]$. Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$, on trouve :
$$\mathbb{P}\left(B \cap [Z_{n,s} \leqslant t]\right) = \mathbb{P}\left([X_1 < s] \cap \cdots \cap [X_{n-1} < s] \cap [X_n \leqslant t]\right) = s^{n-1}t.$$

4. Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$, on trouve que :
$$\mathbb{P}\left(A_k \cap [Z_{n,s} \leqslant t]\right) = \mathbb{P}\left([X_1 < s] \cap \cdots \cap [X_{k-1} < s] \cap [s \leqslant X_k \leqslant t]\right) = \begin{cases} (t-s)s^{k-1} & \text{si } t \geqslant s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}.$$

5. Remarquons que $(A_1, \ldots, A_{n-1}, B)$ forme un système complet d'événements. La formule des probabilités totales assure donc que :
$$\begin{aligned} \forall t \in [0,1],\ \mathbb{P}(Z_{n,s} \leqslant t) &= \mathbb{P}\left(B \cap [Z_{n,s} \leqslant t]\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A_k \cap [Z_{n,s} \leqslant t]\right) \\ &= \begin{cases} s^{n-1}t + (t-s)\sum\limits_{k=1}^{n-1} s^{k-1} & \text{si } t \geqslant s \\ s^{n-1}t & \text{si } t < s \end{cases} \\ &= \begin{cases} s^{n-1}t + (t-s)\dfrac{1-s^{n-1}}{1-s} & \text{si } t \geqslant s \\ s^{n-1}t & \text{si } t < s \end{cases} \end{aligned}$$

6. La fonction de répartition de $Z_{n,s}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ (il faut étudier séparément la continuité en s) et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, s et 1. On en déduit que $Z_{n,s}$ est une variable à densité, de densité donnée par la fonction :
$$f_{n,s} : t \mapsto \begin{cases} s^{n-1} & \text{si } 0 < t < s \\ s^{n-1} + \dfrac{1-s^{n-1}}{1-s} & \text{si } s \leqslant t < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

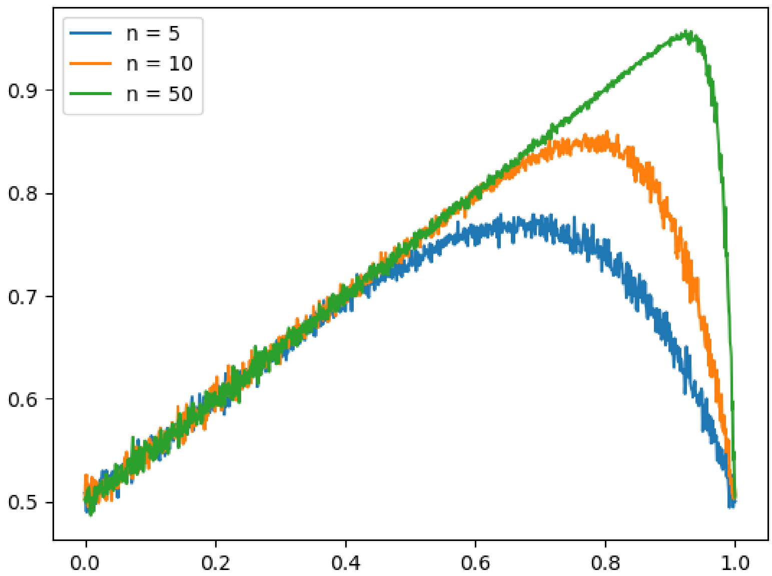
7. Puisque $f_{n,s}$ est à support dans $[0,1]$, $Z_{n,s}$ admet une espérance, égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n,s}) &= \int_0^1 t f_{n,s}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^s s^{n-1} t\,\mathrm{d}t + \int_s^1 \left(s^{n-1} + \frac{1-s^{n-1}}{1-s}\right) t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{s^{n-1}}{2}s^2 + \frac{1}{2}\left(s^{n-1} + \frac{1-s^{n-1}}{1-s}\right)(1-s^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(s^{n-1} + (1-s^{n-1})(1+s)\right) \\
&= \frac{1}{2}(1+s-s^n).
\end{aligned}$$

8. Remarquons que la formule précédente est encore vraie pour $s=0$ ou $s=1$. L'étude de la fonction $g_n : s \mapsto \frac{1}{2}(1+s-s^n)$ sur $[0,1]$ montre que g_n atteint un maximum en $s_n^* = \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}$, maximisant ainsi $\mathbb{E}(Z_{n,s})$.

9. Le code ci-dessous permet d'afficher le graphe ci-après.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

abs = np.linspace(0,1,1000)
ord5 = [competence_moyenne(5,s) for s in abs]
ord10 = [competence_moyenne(10,s) for s in abs]
ord50 = [competence_moyenne(50,s) for s in abs]
plt.plot(abs,ord5, label = "n = 5")
plt.plot(abs, ord10, label = "n = 10")
plt.plot(abs, ord50, label = "n = 50")
plt.legend(loc = "best")
plt.show()
```



On trouve via la machine que $\sqrt[4]{\frac{1}{5}} \approx 0,67$, $\sqrt[9]{\frac{1}{10}} \approx 0,77$ et $\sqrt[49]{\frac{1}{50}} \approx 0,92$, correspondant bien aux abscisses des maxima obtenus expérimentalement.

Retour à la planche 58

Corrigé de l'exercice de la planche 59

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$, la fonction de répartition de M_n, qu'on notera F_n, vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(M_n \leqslant x) = F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x, \dots, X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \dots \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que la fonction F_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1. Il vient aussi que la fonction F est continue en 0 et en 1 donc sur $\mathbb{R}$. La variable aléatoire M_n est donc une variable à densité, dont une densité est la fonction :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. La fonction f_n étant continue et à support dans $[0,1]$, la variable aléatoire M_n admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(M_n) = \int_0^1 x f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 nx^n\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}.$$

3. Puisque $\mathbb{E}(M_n) \in [0,1]$, $\mathbb{P}(M_n > \mathbb{E}(M_n)) = 1 - F_n(\mathbb{E}(M_n)) = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on a $n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{n+1}$. On en déduit ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1}$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(M_n > \mathbb{E}(M_n)) = 1 - e^{-1}$.

4.

```python
import random as rd

def simuleM(n):
    m = rd.random()
    for k in range(n-1):
        m = max(m, rd.random())
    return m
```

5. On utilise la loi faible des grands nombres.

```python
def estimeP(n):
    c = 0
    for k in range(10000):
        if rd.random() > simuleM(n):
            c += 1
    return c/10000
```

6. a. La variable aléatoire X_{n+1} suit la loi uniforme sur $[0,1]$, donc $-X_{n+1}$ suit la loi uniforme sur $[-1,0]$.

b. Les variables M_n et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions donc M_n et $-X_{n+1}$ aussi. Puisqu'elles sont à densité, leur somme $M_n - X_{n+1}$ est aussi à densité, donnée par le produit de convolution de f_n par $f_{-X} = \mathbb{1}_{[-1,0]}$, densité de $-X_{n+1}$.
Soit $t \in R$. Puisque :

$$f_n(x) f_{-X}(t-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant t - x \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ t \leqslant x \leqslant t+1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $t \notin [-1,1], h(x) = 0$ et :

$$\forall t \in [-1,0],\ h(t) = \int_0^{t+1} nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = (t+1)^n \text{ et } \forall t \in [0,1],\ h(t) = \int_t^1 nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = 1 - t^n.$$

La fonction ci-dessous est une densité de $M_n - X_{n+1}$:

$$h : t \mapsto \begin{cases} (t+1)^n & \text{si } t \in [-1,0] \\ 1 - t^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

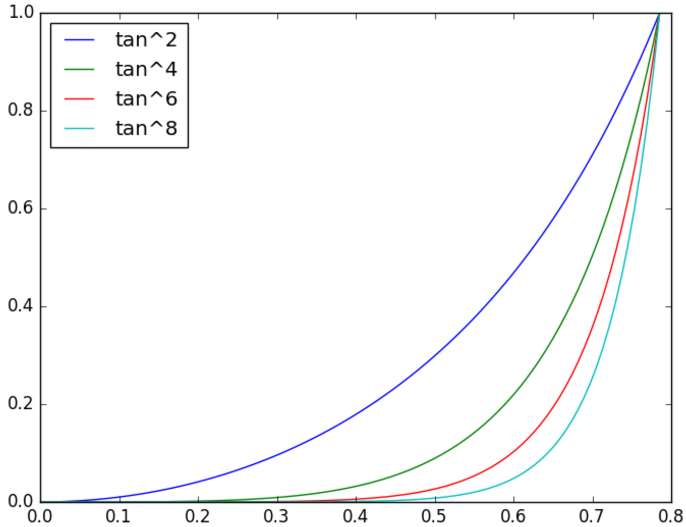
c. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} > M_n) = \mathbb{P}(M_n - X_{n+1} < 0) = \int_{-\infty}^0 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 (t+1)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Corrigé de l'exercice de la planche 60

1.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def affiche():
  abs = np.linspace(0, np.pi/4, 100)
  plt.plot(abs,np.tan(abs)**2,label="tan^2")
  plt.plot(abs,np.tan(abs)**4,label="tan^4")
  plt.plot(abs,np.tan(abs)**6,label="tan^6")
  plt.plot(abs,np.tan(abs)**8,label="tan^8")
  plt.legend(loc = "best")
  plt.show()

affiche()
```



2. On conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la fonction $0 \leqslant \tan \leqslant 1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $\tan^{2n+4} \leqslant \tan^{2n+2}$ et ainsi, par croissance de l'intégrale $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et, étant minorée par 0, elle converge.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t)\left(\tan^2(t) + 1\right) \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2n+3}\tan^{2n+3}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+3} \tag{1}$$

   Par décroissante de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \geqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) = \frac{1}{2(2n+3)}$.

   Notons ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par passage à la limite dans l'égalité (1), on trouve $2\ell = 0$, i.e. $\ell = 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n-1} + u_n = \frac{1}{2n+1}$.

   Par décroissante de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) = \frac{1}{2(2n+1)}$ donc $u_n \leqslant \frac{1}{2(2n+1)}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2(2n+3)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2(2n+1)}$. On en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$.

6. On peut calculer u_n de manière exacte récursivement en calculant au préalable u_0 :

$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + \tan^2(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{4} = \left[\tan t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

```
import numpy as np

def u(n):
    if n == 0:
        return 1 - np.pi/4
    else:
        return 1/(2*n+1) - u(n-1)
```

   On pouvait aussi calculer u_n de manière approchée à l'aide d'une somme de Riemann.

7. a. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $-\tan^2 t \neq 1$. On reconnait une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ (1+\tan^2 t)\sum_{k=0}^{n}(-\tan^2)^k(t) = (1+\tan^2 t)\frac{1-\left(-\tan^2 t\right)^{n+1}}{1+\tan^2 t} = 1+(-1)^n\tan^{2n+2}(t).$$

b. En intégrant l'égalité de fonction précédente entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 t)(-\tan^2)^k(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+(-1)^n\tan^{2n+2}(t)\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}+(-1)^n u_n.$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 t)(-\tan^2)^k(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[-\frac{\tan^{2k+1} t}{2k+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = S_n.$$

On en déduit que $S_n = \frac{\pi}{4}+(-1)^n u_n$.

c. Il suffit de remarquer que : $|\pi - 4S_n| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow 4u_n \leqslant \varepsilon$.
D'après la question 4, $u_n \leqslant \frac{1}{2(2n+1)}$ pour tout $n \geqslant 1$. On en déduit alors que $4S_n$ est une valeur approchée de π à ε si $\frac{2}{2n+1} \leqslant \varepsilon$, i.e si $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}$.

```python
def approx(eps):
    n = int(1/eps - 1/2) + 1
    s = 0
    for k in range(n+1):
        s += (-1)**k/(2*k+1)
    return 4*s
```

En exécutant le code ci-dessous, on vérifie bien que x bien une approximation de π à 10^{-7} près.

```python
import numpy as np

x = approx(10**-7)
print(abs(np.pi - x))
```

Retour à la planche 60

Corrigé de l'exercice de la planche 61

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   La fonction est f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = 3nx^2 + n^2 > 0.$$
   La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

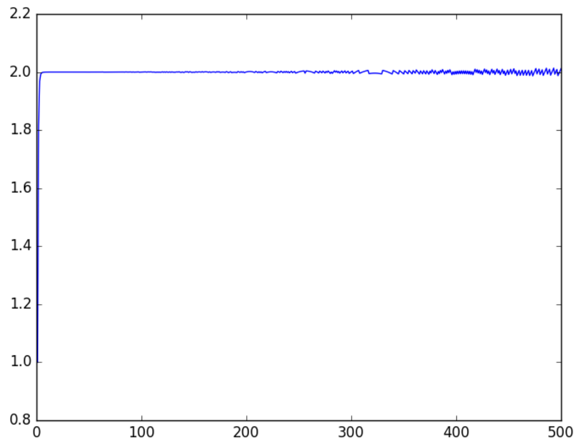
   Puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale), elle réalise une bijection entre $\mathbb{R}$ et $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (après calculs des limites en $-\infty$ et $+\infty$).

   L'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution réelle, qu'on notera x_n.

   Remarquons que $f_n(0) = -2 < 0 = f_n(x_n)$ donc, par stricte monotonie de f_n sur $\mathbb{R}$, $x_n > 0$.

2.
```
def f(x,n):
    return n*x**3 +(n**2)*x-2
def approx_a(n, eps):
        a, b = 0, 1 # f2(1) >0 donc 0<x2<1
        while b - a > 2*eps:
            c = (a+b)/2
            if f(a,n)*f(c,n) <= 0:
                b = c
            else:
                a = c
        return (a+b)/2
```
   En exécutant `approx_a(2, 10**(-3))`, on a $x_2 \approx 0,454$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $f_n(x_n) = 0$ et $x_n > 0$, on a :
$$f_{n+1}(x_n) = (n+1)x_n^3 + (n+1)^2 x_n - 2 = \underbrace{nx_n^3 + n^2x_n - 2}_{=f_n(x_n)=0} + x_n^3 + (2n+1)x_n > 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$
   Par stricte croissance de la fonction f_{n+1} sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $x_n > x_{n+1}$. La suite (x_n) est donc strictement décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.

4. En exécutant le script ci-dessous, on trouve la représentation graphique ci-contre.
```
import matplotlib.pyplot
n= 500
eps = 10**(-7)
abs = list(range(1,n+1))
ord = [(k**2)*approx_a(k, eps) for k in abs]
plt.plot(abs, ord)
plt.show()
```


   On conjecture que la suite (u_n) converge vers 2, ce qui revient à affirmer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nx_n^3 + n^2x_n - 2 = 0$ donc $\dfrac{2}{n^2x_n} = \dfrac{x_n^2}{n} + 1$. Puisque la suite (x_n) converge, on trouve, par passage à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2x_n} = 1$. On en déduit ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$.

5. a. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$$\forall x \in [x_2, 1],\ g'(x) = \frac{6x^2(3x^2+2) - 6x(2x^3+1)}{(3x^2+2)^2} = \frac{6x(x^3+2x-1)}{(3x^2+2)^2} = \frac{3xf_2(x)}{(3x^2+2)^2} \geqslant 0.$$
   La fonction g est donc croissante sur $[x_2, 1]$. Précisions que $g(x_2) = \dfrac{2x_2^3+1}{3x_2^2+2}$ $(= x_2)$ et $g(1) = \dfrac{3}{5}$.

   b. Pour tout $x \in [x_2, 1]$, $g(x) - x = \dfrac{-x^3 - 2x + 1}{3x^2+2} = -\dfrac{f_2(x)}{2(3x^2+2)} \leqslant 0$.

   c. Puisque l'intervalle $[x_2, 1]$ est stable par g, la suite (v_n) est à valeurs dans $[x_2, 1]$ (on peut le prouver par récurrence). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = g(v_n) - v_n \leqslant 0$. La suite (v_n) est donc décroissante. Puisqu'elle est minorée (par x_2), elle converge vers un réel $\ell' \in [x_2, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$ donc, par passage à la limite et continuité de g sur $[x_2, 1]$, $\ell' = g(\ell')$. Les calculs de la question précédente donnent $\ell' = x_2$. On en déduit que la suite (v_n) converge vers x_2.

Corrigé de l'exercice de la planche 62

1. a. La série harmonique diverge (comme série de Riemann).

 b. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Par décroissance de la fonction inverse sur $[k-1,k]$ et $[k,k+1]$, on trouve :
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. En sommant ces encadrements pour k allant de 2 à $n-1$, on trouve:
$$\int_2^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n-1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ puis } 1 + \int_2^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \int_1^{n-1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

 c. Pour tout $n \geqslant 2, \ln(n-1) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

 Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n-1)}{\ln n} = 1$, i.e. $\ln(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

 D'après la question précédente, $\ln n + 1 - \ln 2 \leqslant S_n \leqslant \ln(n-1) + 1 + \frac{1}{n}$. On en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

2. a.
```python
import random as rd

def simuleX():
    nbnoires = 1
    x = 1
    while rd.random() > nbnoires/(nbnoires + 1):
        nbnoires += 1
        x += 1
    return x
```

 b. Remarquons que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N_k l'événement on tire une boule noire dans l'urne au k-ème tirage. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées, on a :
$$P(X=n) = P(\overline{N_1} \cap \cdots \cap \overline{N_{n-1}} \cap N_n) = \frac{1}{2} \times \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n}{(n+1)!}.$$
Étudions l'existence de l'espérance de X. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
$$\sum_{n=1}^{N} |nP(X=n)| = \sum_{n=1}^{N} \frac{n(n+1)-n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(X=n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e-1.$$
On en déduit que X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = e-1$.

 c. Remarquons que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités composées, on a :
$$P(Y=n) = P(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap \overline{N_n}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$
Étudions l'existence de l'espérance de Y. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
$$\sum_{n=1}^{N} |nP(Y=n)| = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
On en déduit que Y n'admet pas d'espérance.

Corrigé de l'exercice de la planche 63

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque (V_n, O_n, R_n) forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :
$$P(V_{n+1}) = P_{V_n}(V_{n+1})P(V_n) + P_{O_n}(V_{n+1})P(O_n) + P_{R_n}(V_{n+1})P(R_n) = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}o_n.$$
On trouve de la même manière :
$$P(O_{n+1}) = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{4}o_n + \frac{2}{3}r_n \text{ et } P(R_{n+1}) = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{4}o_n + \frac{1}{3}r_n.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

3. À la lecture des deux premières colonnes de M, il vient que $\operatorname{rg} M \leqslant 2$. Puisque les deux dernières colonnes de M ne sont pas colinéaires, $\operatorname{rg} M \geqslant 2$ et donc M est de rang 2.

   La matrice M admet donc 0 pour valeur propre (et l'espace propre associé est de dimension 1 par le théorème du rang).

4. On trouve $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que M admet 0 et $\frac{1}{12}$ comme valeur propre.

5. On peut vérifier que $M\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. On en déduit que 1 est valeur propre de M. Puisque $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, les espaces propres sont tous de dimension 1. Les vecteurs propres de M associés à la valeur propre 1 sont donc tous les vecteurs colinéaires au vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. D'après la question précédente, M est diagonalisable et $M = PDP^{-1}$ où
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
On vérifie que P est inversible grâce au script ci-contre.

```
import numpy as np

p = np.array([[1,-6,4],[-1,5,4],[0,1,3]])
print(np.linalg.inv(p))
```

On trouve $P^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 & -22 & 44 \\ -3 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = M^{n-1}X_1 = PD^{n-1}P^{-1}X_1$.

8. Par hypothèse, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{12^{n-1}} = 0$, on trouve :
$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} o_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} r_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}.$$

9.
```
def previsions(v1,o1,r1,n):
    v, o, r = v1, o1, r1
    m = np.array([[1/2, 1/2, 0], [1/4, 1/4, 2/3], [1/4, 1/4, 1/3]])
    for k in range(2, n+1):
        [v, o, r] = np.dot(m, np.array([v, o, r]))
    return (v, o, r)
```

Corrigé de l'exercice de la planche 64

1. a. Puisque $U(\Omega) = [0,1[$, $X(\Omega) = [0,+\infty[$. Pour tout $x < 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \geqslant 0,\ \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \mathbb{P}(-\ln(1-U) \leqslant \lambda x)\\ &= \mathbb{P}(U \leqslant 1 - e^{-\lambda x})\\ &= 1 - e^{-\lambda x} \text{ car } 1 - e^{-\lambda x} \in [0,1[.\end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi connue : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

b.

```python
import random as rd
import numpy as np

def simuleS(n, lbd):
    s = 0
    for k in range(n):
        s -= np.log(1-rd.random())/lbd
    return s
```

2. a. $h_1 : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est une densité de $S_1 = T_1$.
Une densité h_2 de S_2 est donnée par le produit de convolution de h_1 par elle-même puisque T_1 et T_2 sont indépendantes et à densité. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$h_1(x-t)h_1(t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - t \geqslant 0 \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant x.$$

Ainsi $h_2(x) = 0$ si $x < 0$. Si $x \geqslant 0$, alors :

$$h_2(x) = \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}t = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

Ainsi $h_2 : x \mapsto \lambda^2 x e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est une densité de S_2.

D'après le lemme des coalitions, S_2 et T_3 sont indépendantes. Puisqu'elles sont à densité, S_3 admet une densité h_3 donnée par le produit de convolution de h_2 par h_1.

$$h_1(x-t)h_2(t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - t \geqslant 0 \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant x.$$

Ainsi $h_3(x) = 0$ si $x < 0$. Si $x \geqslant 0$, alors :

$$h_3(x) = \int_0^x \lambda^3 t e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}t = \lambda^3 \frac{x^2}{2} e^{-\lambda x}.$$

Ainsi $h_3 : x \mapsto \lambda^3 \dfrac{x^2}{2} e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est une densité de S_2.

b. On peut prouver par récurrence que $h_n : x \mapsto \lambda^n \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est une densité de S_n.

3. a. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = \mathbb{P}\left(S_{n+1} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda}x + \frac{n}{\lambda}\right) = H_{n+1}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}x + \frac{n}{\lambda}\right),$$

où H_{n+1} désigne la fonction de répartition de S_{n+1}. La fonction H_{n+1} étant continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un point (0) , la fonction de répartition de Y_n l'est aussi. On en déduit que Y_n est une variable aléatoire à densité, de densité donnée par la fonction :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{n}\dfrac{(x\sqrt{n}+n)^n}{n!} e^{-\sqrt{n}x - n} & \text{si } x > -\sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b. Pour tout $x > -\sqrt{n}$, $f_n(x) = \sqrt{n}\dfrac{(x\sqrt{n}+n)^n}{n!} e^{-\sqrt{n}x-n} = \dfrac{\sqrt{n}}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}}$.

On en déduit que $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n g_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (le cas $x \leqslant -\sqrt{n}$ est trivial).

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\ln\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{x}{\sqrt{n}} - \dfrac{x^2}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $-x\sqrt{n} + n\ln\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(1)$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}+n\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)} = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $x > -\sqrt{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour tout réel x.

d. On a immédiatement le résultat : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
On en déduit qu'une densité de Y_n tend "point par point" vers une densité de la loi normale centrée réduite lorsque n tend vers $+\infty$. On peut voir ce résultat comme la convergence en loi de la loi de Y_n vers la loi normale centrée réduite assurée par le théorème central limite.

Corrigé de l'exercice de la planche 65

1.
```python
import random as rd

def chemin(n,p):
    liste = [0]
    s = 0
    for k in range(n-1):
        delta = rd.choice([-1,1])
        s = (s+delta)%p
        liste.append(s)
    return liste
```

2.
```python
def tempsMoyen(p):
    temps = 0
    for k in range(1000): #1000 mesures
        s, t = rd.choice([-1,1])%p, 1
        while s != 0:
            delta = rd.choice([-1,1])
            s = (s+delta)%p
            t += 1
        temps += t
    return temps/1000
```

3. Après plusieurs tests, on conjecture que $E(T_p) = p$.

4. a. Remarquons que la fourni ne peut revenir au sommet 0 qu'après 2 itérations. Ainsi on a $T_3(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ et $(T_3 - 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k l'événement "la fourmi se trouve au sommet 0 au temps k". La formule des probabilités composées assure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T_3 - 1 = n) = \mathbb{P}(T_3 = n+1) = \mathbb{P}(A_0 \cap \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n} \cap A_{n+1}) = \frac{1}{2^n}.$$

On en déduit que $T_3 - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

b. $T_3 - 1$ admet une espérance donc T_3 aussi par linéarité et $\mathbb{E}(T_3) = 1 + \mathbb{E}(T_3 - 1) = 3$.

5. a. La fourmi est de manière certaine au sommet A à l'instant 0 donc $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n (resp. B_n, C_n et D_n) l'événement "la fourmi est sur le sommet A (resp. B, C et D) à l'instant n". La formule des probabilités totales via le système complet (A_n, B_n, C_n, D_n) assure que :

$$a_{n+1} = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) + P_{D_n}(A_{n+1})P(D_n) = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n.$$

De la même manière, on trouve que $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$, $c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n$ et $d_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

6. On trouve après calculs que $M^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $M^3 = M$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$. Si n est pair, $X_n = M^2 X_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et si n est impair, $X_n = MX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

8. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a : $\mathbb{P}(T_4 = n) = \mathbb{P}(A_0 \cap \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n)$.

En appliquant la formule des probabilités composées, on trouve :

$$\mathbb{P}(T_4 = n) = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}(\overline{A_1}) \ldots \mathbb{P}_{A_0 \cap \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-2}}}(\overline{A_{n-1}})\mathbb{P}_{A_0 \cap \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}}(A_n)$$

Pour n impair, $\mathbb{P}(T_4 = n) = 0$. Pour n pair, on note $n = 2p$ et on trouve : $\mathbb{P}(T_4 = n) = (1 - a_1) \ldots (1 - a_{2p-1})a_{2p} = \frac{1}{2^p}$.

Soit $N = 2P$ un entier supérieur ou égal à 2.

$$\sum_{n=2}^{N} n\mathbb{P}(T_4 = n) = \sum_{\substack{n=2 \\ n\text{pair}}}^{N} n\mathbb{P}(T_4 = n) \underset{n=2k}{=} \sum_{k=1}^{P} 2k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{P} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

On en déduit que T_4 admet une espérance et $E(T_4) = 4$.

Corrigé de l'exercice de la planche 66

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il est trivial que $\Phi(P) \in \mathbb{R}[X]$. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et λ un réel.

$$\Phi(\lambda P+Q) = 9X(\lambda P+Q)-(X^2-1)(\lambda P'+Q') = \lambda(9XP-(X^2-1)P')+9XQ-(X^2-1)Q' = \lambda\Phi(P)+\Phi(Q).$$

L'application Φ est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. a.

```python
def derive(P):
    liste = []
    for k in range(len(P) - 1):
        liste.append((k+1)*P[k+1])
    return liste
```

b.

```python
def multipleX(P):
    return [0] + P
```

c.

```python
def phi(P):
    Pprime = derive(P)
    Q = [0] + P
    R = [0, 0] + Pprime
    for k in range(len(P)+1):
        Q[k] = 9*Q[k] - R[k]
        if k < len(P) - 1:
            Q[k] += Pprime[k]
    return Q
```

3. On trouve $\Phi(P) = 14X^3+32X^2+22X+4$.

Ce polynôme admet -1 comme racine. Ainsi $\Phi(P) = (X+1)(14X^2+18X+4) = (14X+4)(X+1)^2$.

4. Puisque $\deg(9XP) = n+1$ et $\deg((X^2-1)P') \leqslant n+1$, le polynôme $\Phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n+1$.

Notons a_nX^n le monôme de plus haut degré de P. Le monôme de degré $n+1$ de $9XP$ est donc $9a_nX^{n+1}$ et celui de $(X^2-1)P'$ est na_nX^{n+1}. Le monôme de degré $n+1$ de $\Phi(P)$ est donc $a_n(9-n)X^{n+1}$.

On a donc $\deg\Phi(P) < n+1 \Leftrightarrow n = 9$.

Remarquons qu'on a aussi $\deg\Phi(0) = -\infty$.

5. a. Puisque $\Phi(0) = 0 = 9\times 0$, le polynôme nul est solution.

b. D'après la question 4, les seuls polynômes P non nuls de même degré que $\Phi(P)$ sont les polynômes de degré 9.
Soit P un polynôme non nul vérifiant $\Phi(P) = 9P$. Posons $R = \Phi(P)$.
Montrons que -1 est racine de P : $R(-1) = -9P(-1) - \left((-1)^2-1\right)P'(-1) = -9P(-1)$. Puisque $R = 9P$, on a aussi $R(-1) = 9P(-1)$ et ainsi $P(-1) = 0$.
Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X+1)^kQ(X)$ et $Q(-1) \neq 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= 9X(X+1)^kQ(X)-(X-1)(X+1)\left[k(X+1)^{k-1}Q(X)+(X+1)^kQ'(X)\right]\\ &= (X+1)^k\left[9XQ(X)-k(X-1)Q(X)+(X^2-1)Q'(X)\right]\end{aligned}$$

Puisque $\Phi(P) = 9(X+1)^kQ(X)$, $9Q(X) = 9XQ(X)-k(X-1)Q(X)+(X^2-1)Q'(X)$, i.e. $(9-k)(X-1)Q(X) = -(X-1)(X+1)Q'(X)$. On en déduit que $k = 9$ (car $Q(-1)\neq 0$). Puisque $\deg P = 9$, $\deg Q = 0$.

c. Réciproquement, si $P = (X+1)^9$, $\Phi(P) = 9X(X+1)^9 - (X^2-1)\times 9(X+1)^8 = 9P$.
On en déduit que 9 est valeur propre de Φ et que son sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}((X+1)^9)$.

Corrigé de l'exercice de la planche 67

1. a. On remarque que $T_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $T_1(\Omega) = [0,1]$.
Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(X_1 > t, \ldots, X_n > t) = \mathbb{P}(X_1 > t) \ldots \mathbb{P}(X_n > t) = (1-t)^n$ par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$. La fonction de répartition de T_1 est donc la fonction :
$$F_1 : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-(1-t)^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$
La fonction F_1 est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1. Un calcul de limites à gauche et à droite en 0 et 1 montre que F_1 est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$. La variable aléatoire T_1 est donc une variable à densité, dont une densité est la fonction $f_1 : t \mapsto n(1-t)^{n-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.
b. La variable aléatoire T_1 est bornée donc elle admet une espérance.
$$E(T_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 nt(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 -n(1-t)^n\,\mathrm{d}t + \int_0^1 n(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{n}{n+1}.$$
Remarquez qu'on retrouve l'espérance de la loi uniforme sur $[0,1]$ lorsque $n = 1$.

2. a.
```python
import random as rd

def simule1(k,n):
    liste = [rd.random() for k in range(n)]
    liste = sorted(liste)
    return liste[k-1]
```
b. L'événement $[X_k \leqslant x]$ est réalisé si, et seulement si, les k premiers coureurs sont arrivés avant l'instant x, i.e. si et seulement si au moins k coureurs sont arrivés avant l'instant x. On en déduit que $[X_k \leqslant x] = [N_x \geqslant k]$.
Remarquons que N_x suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$: N_x est le nombre de succès lors de la répétition indépendante de n expériences de Bernoulli dont la probabilité de succès ("arriver avant l'instant x") est égale à x. Ainsi :
$$P(X_k \leqslant x) = P(N_x \geqslant k) = \sum_{i=k}^{n} P(N_x = i) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

3. a. D'après la question précédente,
$$\mathbb{P}(X_3 \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(N_x = 0) - \mathbb{P}(N_x = 1) - \mathbb{P}(N_x = 2) = 1 - \left((1-x)^n + nx(1-x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^2(1-x)^{n-2}\right).$$
b. La fonction G est la fonction de répartition de X_3, elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,1]$.
c. On cherche x tel que $G(x) = 0,95$. On peut appliquer une dichotomie car G est croissante et continue sur $[0,1]$.
```python
def f(x,n):
    a = (1-x)**n
    b = n*(1-x)**(n-1)
    c = n*(n-1)/2 * x**2 *(x-1)**(n-2)
    return 1 - (a + b + c) - 0.95 # = G(x) - 0,95

def approx(n):
    a, b = 0, 1
    while b - a > 2*10**(-3):
        c = (a+b)/2
        if f(a,n)*f(c,n) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

On trouve $x \approx 0,519$ pour $n = 10$ grâce au code ci-dessus.

4. a. La variable aléatoire $X - Y$ est à densité puisque X et Y sont à densité et indépendante (une densité de $X - Y$ est donnée par le produit de convolution des densités de X et $-Y$).
   On en déduit que $P(X = Y) = P(X - Y = 0) = 0$.

   b. Le complémentaire de l'événement "il n'y a aucun ex-aequo" est l'événement :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=i+1}^{n} [X_i = X_j].$$

   Puisque tous les événements $[X_i = X_j]$ sont quasi-impossibles, l'événement A l'est aussi (par réunion finie d'événements de probabilité nulle). On en déduit que l'événement "il n'y a aucun ex-aequo" est quasi-certain.

Retour à la planche 67

Corrigé de l'exercice de la planche 68

1. a.

```python
import random as rd

def simuleT(n,p):
    t = 1
    for k in range(n+1):
        if rd.random() > p:
            t = -t
    return t
```

b.

```python
def moyenneT(n,p):
    N = 10000
    s = 0
    for k in range(N):
        s += simuleT(n,p)
    return s/N
```

c. Pour $n = 20$ et $p = 0,5$, on trouve des valeurs approchées de l'espérance de T_n proches de 0.

2. a. La variable X étant finie, elle admet une espérance et une variance. $\mathbb{E}(X) = 1\mathbb{P}(X = 1) - 1\mathbb{P}(X = -1) = p - q$. La variable X^2 étant constante égale à 1, on a $\mathbb{E}(X^2) = 1$.
D'après la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2 = 1 - (p-q)^2 = 4pq$.

b. Les variables aléatoires $X_0, \ldots, X_n$ étant indépendantes et admettant une espérance, T_n admet aussi une espérance et $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(X_0)\ldots\mathbb{E}(X_n) = (p-q)^{n+1}$.
Puisque $T_n(\Omega) = \{-1; 1\}$, $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{P}(T_n = 1) - \mathbb{P}(T_n = -1) = 2\mathbb{P}(T_n = 1) - 1$. On en déduit que la loi de T_n est donnée par $\mathbb{P}(T_n = 1) = \dfrac{1 + (p-q)^{n+1}}{2}$ et $\mathbb{P}(T_n = -1) = \dfrac{1 - (p-q)^{n+1}}{2}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $([X_{n+1} = -1], [X_{n+1} = 1])$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathbb{P}(T_{n+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, T_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1, T_{n+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, T_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1, T_n = -1) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(T_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1)\mathbb{P}(T_n = -1) \quad \text{par indépendance de } X_{n+1} \text{ et } T_n \\ &= pu_n + q(1 - u_n) = (2p-1)u_n + 1 - p \end{aligned}$$

b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique dont $\dfrac{1}{2}$ est le point fixe.
On trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(2p-1)^{n+1}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1 + (p-q)^{n+1}}{2}$. On retrouve bien la loi de T_n.

4. Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = 1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = 1, N = n) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\prod_{k=0}^{n} X_k = 1, N = n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = 1)\mathbb{P}(N = n) \quad \text{par indépendance de } N \text{ et de la famille } (X_k)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\frac{1 + (2p-1)^{n+1}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} + e^{-\lambda}(2p-1)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(2p-1))^n}{n!}\right) \quad \text{(les deux séries exponentielles convergent)} \\ &= \frac{1 + (2p-1)e^{\lambda(2p-1)}e^{-\lambda}}{2} = \frac{1 + (2p-1)e^{-2\lambda q}}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $T(\Omega) = \{-1, 1\}$, la loi de T est donnée par $\mathbb{P}(T = 1) = \dfrac{1 + (2p-1)e^{-2\lambda q}}{2}$ et $\mathbb{P}(T = -1) = \dfrac{1 - (2p-1)e^{-2\lambda q}}{2}$.

5. On considère une variable aléatoire H suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, définie sur le même univers que X. On note D la variable aléatoire $D = HX$.

   a. Remarquons que $D(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{D}$. Utilisons la formule des probabilités totales avec $([X = -1], [X = 1])$ comme système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D \leqslant x) &= \mathbb{P}(HX \leqslant x, X = 1) + \mathbb{P}(HX \leqslant x, X = -1) \\
&= \mathbb{P}(H \leqslant x, X = 1) + \mathbb{P}(H \geqslant -x, X = -1) \\
&= \mathbb{P}(H \leqslant x)\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(H \geqslant -x)\mathbb{P}(X = -1) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } H \\
&= \begin{cases} qe^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ p(1 - e^{-\lambda x}) + q & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} qe^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - pe^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   b. La fonction de répartition de D est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Elle est de plus continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$. La variable D est donc à densité, dont une densité est donnée par la fonction :

$$f_D : x \mapsto \begin{cases} \lambda qe^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ \lambda pe^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Retour à la planche 68

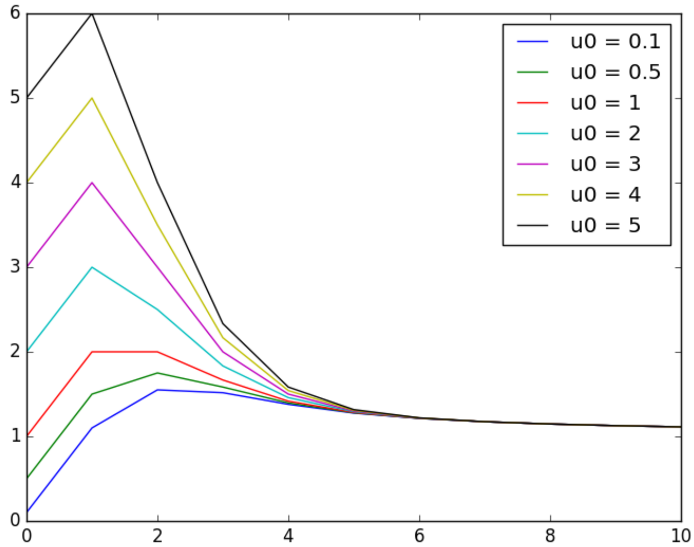
Corrigé de l'exercice de la planche 69

1.
```python
def U(u0,n):
    liste = [u0]
    for k in range(n):
        liste.append(1+liste[k]/(k+1))
    return liste
```

2. Notons ℓ la limite éventuelle de la suite. Par passage à la limite de la relation de récurrence, on obtient $\ell = 1$. Ainsi, si la suite converge, elle converge nécessairement vers 0.

3. En testant le script ci-dessous, on obtient la représentation graphique ci-contre.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
plt.ion()
plt.clf()

for a in [0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5]:
    l = U(a,10)
    print(l)
    plt.plot(l, label= "u0 = " + str(a))
    plt.legend(loc = "best")
plt.show()
```



La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble décroissante à partir d'un certain rang, et convergente vers 1.

4. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 2, u_n \geqslant \dfrac{n+1}{n}$.

L'initialisation est vérifiée : $u_2 = 1 + \dfrac{1}{2}u_1 \geqslant \dfrac{3}{2}$ car $u_1 \geqslant 1$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons que $u_n \geqslant \dfrac{n+1}{n}$. Alors : $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1}u_n \geqslant 1 + \dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{n+1}{n}$.
Puisque $(n+1)^2 - n(n+2) \geqslant 0$, $\dfrac{n+1}{n} \geqslant \dfrac{n+2}{n+1}$ et ainsi $u_{n+1} \geqslant \dfrac{n+2}{n+1}$, ce qui conclut la récurrence.

On en déduit que, pour tout $n \geqslant 2$, $u_{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{n}{n+1}u_n \leqslant 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante à partir du rang 2. Puisqu'elle est positive, elle converge.

D'après la question 2, elle converge vers 1.

5. a. Supposons par l'absurde que $u_n \geqslant u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_0 > 1$, cela est en contradiction avec la convergence de la suite vers 1.

b.
```python
def premierN(u0):
    u, n = u0, 0
    while u >= u0:
        u = 1 + u/(n+1)
        n += 1
    return n
```

6. a. En supposant que a et b existent :

$$n(u_n - 1) \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \text{ et } n^2\left(u_n - 1 - \frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} b + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = (n+1)(u_{n+1} - 1) = u_n$ La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 1. On en déduit que $n(u_n - 1) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1)$, i.e. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

c. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $w_n = n^2\left(u_n - 1 - \frac{a}{n}\right) = nv_n - n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} = (n+1)v_{n+1} - (n+1) = (n+1)(u_n - 1).$$

Puisque $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, on a $(n+1)(u_n - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(u_n - 1 - \frac{a}{n}\right) = 1$, i.e. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

7. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$z_{n+1} - z_n = (n+1)!\,u_{n+1} - n!\,u_n = (n+1)! + n!\,u_n - n!\,u_, = (n+1)!.$$

On en déduit ainsi que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} - z_k = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)! = u_0 + \sum_{k=1}^{n} k!$$

b. Pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k! = n! + (n-1)! + \sum_{k=1}^{n-2} k!$$

Or :

$$0 \leqslant \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k! \leqslant \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2}(n-2)! \leqslant \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} = \frac{n-2}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!.$$

c. On en déduit que $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$, i.e. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

Retour à la planche 69

Corrigé de l'exercice de la planche 70

1. a. Si aucun individu n'est malade, on n'effectue qu'un seul test, négatif. Sinon, on réalise n tests supplémentaires. Ainsi $X(\Omega) = \{1, n+1\}$ et :

$$\mathbb{P}(X=1) = (1-p)^n \text{ et } \mathbb{P}(X=n+1) = 1-(1-p)^n.$$

La variable X étant finie, elle admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(X) = (1-p)^n + (n+1)\left[1-(1-p)^n\right] = n+1-n(1-p)^n$$

b. Cette méthode de tests est rentable "en moyenne" si et seulement si on fait strictement moins de tests que si on avait testé tout le monde, i.e. $E(X) < n$. Or :

$$\mathbb{E}(X) < n \Leftrightarrow n+1-n(1-p)^n < n \Leftrightarrow (1-p)^n > \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1-p > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow p < 1-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1-\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\left[\exp\left(-\frac{\ln n}{n}\right)-1\right]$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{\ln n}{n} = 0$ et $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on trouve que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

2. a. La variable Z suit la loi binomiale de paramètres $\frac{n}{m}$ (nombre de groupes) et $1-(1-p)^m$ (probabilité qu'au moins un individu d'un groupe soit malade). *La justification usuelle est de rigueur.*

b. On trouve que $X = \frac{n}{m} + mZ$:

- $\frac{n}{m}$ est le nombre de tests initiaux (égal au nombre de groupes) ;
- mZ est le nombre de tests individuels réalisés (m fois le nombre de groupes dont le test est positif).

On en déduit par linéarité de l'espérance que $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{m} + m\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{m} + n\left(1-(1-p)^m\right)$.

c. En exécutant le code ci-dessous, on lit graphiquement $m = 5$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def espX(n,m,p):
    return n/m + n*(1- (1-p)**m)

n, p = 25, 0.01
abs = [1,5,25]
ord = [espX(n,m,p) for m in abs]
plt.plot(abs, ord)
plt.show()
```

d. Montrons par récurrence que pour tout $m \geqslant 1$, $\frac{1}{2^{m-1}} \leqslant \frac{1}{m}$. Le résultat est trivial pour $m = 1$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\frac{1}{2^{m-1}} \leqslant \frac{1}{m}$. Ainsi $\frac{1}{2^m} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{m-1}} \leqslant \frac{1}{2m} \leqslant \frac{1}{m+1}$, ce qui conclut la récurrence.

Supposons que $p > \frac{3}{4}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On trouve : $u_{m+1} - u_n = -\frac{1}{m(m+1)} + p(1-p)^m$. Puisque $p \leqslant 1$ et $(1-p)^m < \frac{1}{4^m} = \left(\frac{1}{2^m}\right)^2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^2}$, $u_{m+1} - u_n \leqslant -\frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)^2} \leqslant 0$.

La suite (u_m) est donc décroissante si $p > \frac{3}{4}$.

Corrigé de l'exercice de la planche 71

1. a.

```
import random as rd

def simuleT(n):
   t, s = 0, 0
   while s < n:
      s += rd.randint(1,n)
      t += 1
   return t
```

b.

```
def esperanceT(n):
   N = 1000
   t = 0
   for k in range(N):
      t += simuleT(n)
   return t/N
```

c. On conjecture que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = e.$$

2. a. La variable aléatoire X_k suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Son espérance est égale à $\dfrac{n+1}{2}$.

b. $S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]$.

c. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$.

d. Soit k un entier naturel tel que $k \leqslant n$. À l'aide de la formule des probabilités totales avec $([S_k = j])_{k\leqslant j\leqslant kn}$ comme système complet d'événements, on trouve :

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}(S_k = j) P_{S_k=j}(S_{k+1} = i) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}(S_k = j) P_{S_k=j}(X_{k+1} = i-j) \quad \text{car } X_{k+1} = S_{k+1} - S_k \\ &= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}(S_k = j)\mathbb{P}(X_{k+1} = i-j) \quad \text{par indépendance de } X_{k+1} \text{ et } S_k \text{ (lemme des coalitions)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j) \quad (\text{car } \mathbb{P}(X_{k+1} = i-j) = 0 \text{ si } j \geqslant i). \end{aligned}$$

e. Pour $k = 1$, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(S_k = i) = \mathbb{P}(X_1 = i) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{i-1}{k-1}$.

Soit k un entier naturel non nul. Supposons que pour tout entier $i \in [\![k,n]\!]$, $\mathbb{P}(S_k = i) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{i-1}{k-1}$.

D'après la question 2.e, on a, pour tout $i \in [\![k+1,n]\!]$:

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\mathbb{P}(S_k = j) = \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} = \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k},$$

ce qui conclut la récurrence.

3. a. $T_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'événement $[T_n > k]$ est réalisé si, et seulement si, la vache a fourni strictement moins de n litres de lait en k jours. Ainsi $[T_n > k] = [S_k < n]$ et :

$$\mathbb{P}(T_n > k) = \mathbb{P}(S_k < n) = \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i}{k} - \binom{i-1}{k} = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}.$$

c. Pour tout $k \notin [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(T_n = k) = 0$.

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{P}(T_n > k-1) - \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n-1}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}.$$

d.

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e.$$

Corrigé de l'exercice de la planche 72

1. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que Y suit loi uniforme sur $[0;1[$ et $X = -\dfrac{\ln(1-Y)}{\lambda}$.

   a. Puisque $Y(\Omega) = [0,1[$, $X(\Omega) = [0,+\infty[$. Pour tout $x < 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$ et :

   $$\begin{aligned}\forall x \geqslant 0,\ \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \mathbb{P}\left(-\ln(1-Y) \leqslant \lambda x\right) \\ &= \mathbb{P}(Y \leqslant 1 - e^{-\lambda x}) \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \text{ car } 1 - e^{-\lambda x} \in [0,1[.\end{aligned}$$

   La fonction de répartition de X est :

   $$F_X : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

   b. On reconnait la fonction de répartition d'une loi connue : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

   c.
```python
import random as rd
import numpy as np

def simuleX(lbd):
    return  -np.log(1-rd.random())/lbd
```

2. Puisque $\mathbb{P}(T > 0) = 1$, $\mathbb{P}(T \leqslant 0) = 0$ et $F = 0$ sur $]-\infty;0]$.
   Par hypothèse, $\mathbb{P}(0 < T \leqslant h \mid T > 0) \underset{h\to 0^+}{\sim} \lambda h$. Or :

   $$\forall h > 0,\ \mathbb{P}(0 < T \leqslant h \mid T > 0) = \frac{\mathbb{P}(0 < T \leqslant h)}{\mathbb{P}(T > 0)} = F(h) - F(0) = F(h).$$

   Ainsi $F(h) \underset{h\to 0^+}{\sim} \lambda h$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} F(h) = 0 = F(0)$. On en déduit que F est continue à droite en 0.

3. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $h > 0$, on a :

   $$\mathbb{P}(t < T \leqslant t + h \mid T > t) = \frac{\mathbb{P}(t < T \leqslant t + h)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)}$$

   Ainsi $\dfrac{F(t+h) - F(t)}{1 - F(t)} \underset{h\to 0^+}{\sim} \lambda h$, i.e. $\dfrac{F(t+h) - F(t)}{h} \underset{h\to 0^+}{\sim} \lambda - \lambda F(t)$.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lambda - \lambda F(t)$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

   $$\forall t \in [0,+\infty[,\ F'(t) = \lambda - \lambda F(t).$$

   La fonction F est donc solution de l'équation différentielle $y' + \lambda y = \lambda$ sur $\mathbb{R}^+$.

5. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $t \mapsto 1 + Ce^{-\lambda t}$, où $C \in \mathbb{R}$. Puisque $F(0) = 0$, $C = -1$. On en déduit que la fonction de répartition de T est :

   $$F : t \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

6. La variable T suit donc la loi exponentielle de paramètre λ. Son espérance est $\dfrac{1}{\lambda}$ et sa variance $\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Corrigé de l'exercice de la planche 73

1. a. La variable X^0 est constante égale à 1 donc $\mathbb{E}(X^0) = 1$. On sait que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$. D'après la formule de König-Huygens, on a $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 1$.

   b. Le code ci-dessous affiche une valeur approchée (via la loi faible des grands nombres) de $\mathbb{E}(X^k)$ pour $k \in [\![0, 9]\!]$.

```
from numpy.random import normal

def espX(k):
    N, s = 100000, 0
    for i in range(N):
        s += (normal())**k
    return s/N

print([espX(k) for k in range(10)])
```

   c. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Supposons que X^{k-2} admet une espérance. Montrons que X^k admet une espérance, i.e. étudions la convergence absolue de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x.$$

Par parité, cela revient à étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x,$$

et donc la convergence (simple) de l'intégrale de départ par le même argument de parité.

Les fonctions $u : x \mapsto \frac{x^{k-1}}{\sqrt{2\pi}}$ et $v : x \mapsto -e^{-\frac{x^2}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, $u' : x \mapsto (k-1)\frac{x^{k-2}}{\sqrt{2\pi}}$ et $v' : x \mapsto xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Puisque le produit uv admet une limite nulle en $-\infty$ et $+\infty$, on trouve par intégration par parties que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (k-1)\frac{x^{k-2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$$

sont de même nature. Par hypothèse la seconde intégrale est convergente, donc la première l'est aussi. Ainsi X^k admet une espérance et $\mathbb{E}(X^k) = (k-1)\mathbb{E}(X^{k-2})$ par intégration par parties.

Puisque X^0 et X^1 admettent une espérance, on peut montrer par récurrence que X^k admet une espérance pour tout $k \geqslant 2$ et $\mathbb{E}(X^k) = (k-1)\mathbb{E}(X^{k-2})$.

   d. On peut écrire une fonction récursive:

```
def espExacteX(k):
    if k == 0:
        return 1
    elif k == 1:
        return 0
    else:
        return (k-1)*espExacteX(k-2)
```

ou une fonction itérative :

```
def espExacteX(k):
    if k%2 == 1:
        return 0
    e = 1
    for i in range(2, k+2, 2):
        e *= (i-1)
    return e
```

   e. On peut montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X^{2n}) = (2n-1)(2n-3)\dots 3 \times 1 = \frac{(2n)!}{2n(2n-2)\dots 2 \times 1} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

   f. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

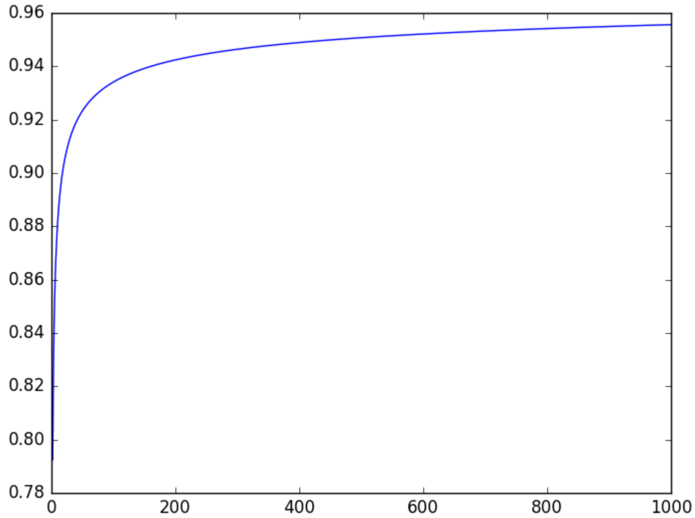
$$u_n - u_{n-1} = \ln\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right) - \ln\left(\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}\right) = \ln\left(\frac{2n(2n-1)}{2n}\right) = \ln(2n-1).$$

Supposons par l'absurde que la suite (u_n) converge.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_{n-1} = 0$, ce qui est absurde puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2n-1) = +\infty$.
On en déduit que la suite (u_n) ne converge pas.

b. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \ln(2k-1) = \sum_{k=2}^{n} \ln(2k-1).$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def val(n):
    u = 0
    for k in range(2, n+1):
        u += np.log(2*k-1)
    return u/(n*np.log(n))

abs = list(range(1,1000))
ord = [val(n) for n in abs]
plt.plot(abs, ord)
plt.show()
```



On conjecture que la suite $\left(\frac{u_n}{n\ln n}\right)$ converge (vers 1).

c. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
La fonction $(t \mapsto \ln(2t-1))$ est croissante sur $[1, +\infty[$ donc sur $[k-1, k]$ et $[k, k+1]$.
Pour tout $t \in [k-1, k]$, $\ln(2t-1) \leqslant \ln(2k-1)$, donc par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_{k-1}^{k} \ln(2t-1)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(2k-1).$$

Pour tout $t \in [k, k+1]$, $\ln(2k-1) \leqslant \ln(2t-1)$, donc par croissance de l'intégrale, on a :

$$\ln(2k-1) \leqslant \int_{k-1}^{k} \ln(2t-1)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit l'encadrement voulu :

$$\forall k \geqslant 2,\ \int_{k-1}^{k} \ln(2t-1)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(2k-1) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(2t-1)\,\mathrm{d}t.$$

d. Soit $n \geqslant 2$. En sommant l'encadrement précédent pour k entre 2 et n, on trouve :

$$\int_{1}^{n} \ln(2t-1)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_{2}^{n+1} \ln(2t-1)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $\left(t \mapsto \frac{1}{2}(2t-1)\ln(2t-1) - t\right)$ est une primitive de $(t \mapsto \ln(2t-1))$, on trouve :

$$\frac{2n+1}{2}\ln(2n-1) \leqslant u_n \leqslant \frac{2n+3}{2}\ln(2n+1) - \frac{3}{2}\ln(3).$$

Par le théorème d'encadrement, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n\ln n} = 1$.
On en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$.

Retour à la planche 73

Corrigé de l'exercice de la planche 74

1.

```
import random as rd

def simuleTournoi ():
    nonjoueur = 2
    joueurs = [0,1]
    nbmanches = 0
    ancien_gagnant = 2
    while True:
        nbmanches += 1
        igagnant = rd.randint(0,1)
        gagnant = joueurs[igagnant]
        perdant = joueurs[1-igagnant]
        if ancien_gagnant == gagnant:
            return gagnant , nbmanches
        joueurs = [gagnant, nonjoueur]
        nonjoueur = perdant
        ancien_gagnant = gagnant
```

2. Puisque $[X = 2] = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cup B_2)$ (par réunion disjointe puis la formule des probabilités composées), on trouve $\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{1}{2}$.

   Puisque $[X = 3] = (A_1 \cap C_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap C_2 \cap C_3)$, on trouve $\mathbb{P}(X = 3) = \dfrac{1}{4}$.

3. a. On a $[X > 3] = [X > 2] \cap E_3$.

   Ainsi $\mathbb{P}(X > 3) = \mathbb{P}(X > 2)P_{[X>2]}(E_3) = \dfrac{1}{4}$.

   b. Soit $k \geqslant 3$. On a $[X > k] = [X > 2] \cap E_3 \cap \cdots \cap E_k$.

   On applique la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(X > k) = \dfrac{1}{2^{k-1}}$. Ainsi :

$$\forall k \geqslant 3,\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

   La propriété est encore vraie pour $k = 2$.

   c. Il s'agit de montrer que $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$ converge.

   Soit $N \geqslant 2$.

$$\sum_{k=2}^{N} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{2^{k-2}} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{2^i} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

   d. Pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X - 1 = k) = \mathbb{P}(X = k+1) = \dfrac{1}{2^k}$. La variable $X - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On en déduit que X admet une espérance (par linéarité) et une variance (par invariance par translation) et :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X-1) + 1 = 3 \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X-1) = \frac{1}{4}.$$

4. À l'aide d'un arbre (ou non), on trouve que :

   - $\mathbb{P}(G_{A_1}) = \mathbb{P}(G_{B_1}) = \mathbb{P}(G_{C_1}) = 0$,
   - $\mathbb{P}(G_{A_2}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{2^2}$, $\mathbb{P}(G_{B_2}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{2^2}$, $\mathbb{P}(G_{C_2}) = 0$,

- $\mathbb{P}(G_{A_3}) = \mathbb{P}(G_{B_3}) = 0$, $\mathbb{P}(G_{C_3}) = \mathbb{P}(A_1 \cap C_2 \cap C_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap C_2 \cap C_3) = \dfrac{1}{2^2}$,
- $\mathbb{P}(G_{A_4}) = \mathbb{P}(B_1 \cap C_2 \cap A_3 \cap A_4) = \dfrac{1}{2^4}$, $\mathbb{P}(G_{B_4}) = \mathbb{P}(A_1 \cap C_2 \cap B_3 \cap B_4) = \dfrac{1}{2^4}$, $\mathbb{P}(G_{C_4}) = 0$,
- $\mathbb{P}(G_{A_5}) = \mathbb{P}(A_1 \cap C_2 \cap B_3 \cap A_4 \cap A_5) = \dfrac{1}{2^5}$, $\mathbb{P}(G_{B_5}) = \mathbb{P}(B_1 \cap C_2 \cap A_3 \cap B_4 \cap B_5) = \dfrac{1}{2^5}$, $\mathbb{P}(G_{A_5}) = 0$,
- $\mathbb{P}(G_{A_6}) = \mathbb{P}(G_{B_6}) = 0$, $\mathbb{P}(G_{C_6}) = \mathbb{P}(A_1 \cap C_2 \cap B_3 \cap A_4 \cap C_5 \cap C_6) + \mathbb{P}(B_1 \cap C_2 \cap A_3 \cap B_4 \cap C_5 \cap C_6) = \dfrac{1}{2^5}$.

5. Montrons le résultat par double inclusion.

   Si l'événement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\bigcap_{i=0}^{n} B_{3i+1}C_{3i+2}A_{3i+3}\right)\cap A_{3n+4}\right)$ est réalisé, alors le joueur B gagne la première manche et le joueur A gagne la partie, i.e. $G_A \cap B_1$ est réalisé.

   Supposons que l'événement $G_A \cap B_1$ soit réalisé, i.e. le joueur B gagne la première manche et le joueur A gagne la partie. Notons N le rang de la dernière manche gagnée par le joueur A. La $(N-1)$-ème manche est aussi gagnée par le joueur A.

   Puisque la première manche est gagnée par B, les $N-1$ premières manches sont une succession circulaire de victoire de B puis C puis A. On en déduit que $N-1$ est un multiple de 3. On note $N-1 = 3n+3$.

   L'événement $\displaystyle\left(\bigcap_{i=0}^{n} B_{3i+1}C_{3i+2}A_{3i+3}\right)\cap A_{3n+4}$ est donc réalisé donc $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\bigcap_{i=0}^{n} B_{3i+1}C_{3i+2}A_{3i+3}\right)\cap A_{3n+4}\right)$ aussi, ce qui montre l'égalité recherchée.

   Par σ-additivité puis formule des probabilités composées, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_A \cap B_1) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=0}^{n} B_{3i+1}C_{3i+2}A_{3i+3}\right)\cap A_{3n+4}\right) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{3n+4}}\\
&= \frac{1}{2^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^3}\right)^n\\
&= \frac{1}{16\left(1-\frac{1}{8}\right)}\\
&= \frac{1}{14}.
\end{aligned}$$

6. On obtient l'égalité recherchée par un raisonnement similaire.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_A \cap A_1) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_{3i+1}C_{3i+2}B_{3i+3}\right)\cap A_{3n+4}A_{3n+5}\right)\\
&= \frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{3n+5}}\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{2}{7}.
\end{aligned}$$

7. Puisque (A_1, B_1) forme un système complet d'événements, on applique la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(G_A) = \mathbb{P}(G_A \cap A_1) + \mathbb{P}(G_A \cap B_1) = \frac{5}{14}.$$

   Par symétrie des rôles de A et B, on trouve que $\mathbb{P}(G_B) = \mathbb{P}(G_A) = \dfrac{5}{14}$. On en déduit que $\mathbb{P}(G_C) = \dfrac{2}{7}$.

Retour à la planche 74

Corrigé de l'exercice de la planche 75

1. En exécutant le code ci-dessous, on trouve que la plus petite valeur propre est environ égale à -1,41.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as la

vpmin = +np.inf
for a in range(2):
    for b in range(2):
        for c in range(2):
            for d in range(2):
                for e in range(2):
                    A = np.array([[a,b,c],[b,d,e],[c,e,a]])
                    vp = min(la.eig(A)[0])
                    if vp < vpmin:
                        vpmin = vp
print(vpmin)
```

2. a. On a bien $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice nulle admet bien le vecteur U comme vecteur propre. Soit A et B deux matrices de E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe deux réels a et b tels que $AU = aU$ et $BU = bU$. On a :

$$(\lambda A + B)U = \lambda AU + BU = \lambda aU + bU = (\lambda a + b)U.$$

Le vecteur U est bien vecteur propre de $\lambda A + B$ car $U \neq 0$, i.e. $\lambda A + B \in E$. On a donc montré que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On a immédiatement que $F = \mathrm{Vect}(V, W, X, Y, Z)$ où :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

montrant ainsi que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

b. Soit $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$. Le vecteur U est un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix}$ si et seulement si :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a + b + c = \gamma \\ a = d + b - c \\ b = e. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} d+b-c & b & c \\ b & d & b \\ c & b & d+b-c \end{pmatrix},\ (b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}(A, B, I_3),\ \text{ où } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il est aisé de montrer que la famille (A, B, I_3) est libre ; c'est ainsi une base de $E \cap F$.

3. a. $A \in \mathrm{Vect}(A, B, I_3) = E \cap F$.

b. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.
On trouve : $\mathrm{Sp}(A) = \{1; -1; 2\}$ puis $A = PD\,{}^tP$ où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On note que $P^{-1} = {}^tP$ car la matrice P est orthogonale.

4. Soit $M \in E \cap F$. Il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = xA + yB + zI_3$. Ainsi :

$$^tPMP = x\,^tPAP + y\,^tPBP + z\,^tPI_3P = xD + y\,^tPBP + zI_3.$$

On pourrait remarquer que les vecteurs colonnes de P sont des valeurs propres de B pour éviter de calculer à la main le produit matriciel ^tPBP mais ce calcul se fait assez vite. On trouve :

$$^tPBP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $PM\,^tP$ est diagonale pour toute matrice $M \in E \cap F$.

5. On remarque que $M = yA + zI_3 + x(I_3 + B) = yA + xB + (x + z)I_3 \in E \cap F$. Les vecteurs propres de A étant aussi vecteurs propres de B et I_3, il suffit de calculer :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (y + z - x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-y + z + x) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2y + z + x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(M) = \{y + z - x, -y + z + x, 2y + z + x\}$.

Retour à la planche 75

Corrigé de l'exercice de la planche 76

1.

```
def verif_vp(n,k):
    jn = np.ones((n,n))
    id = np.eye(n)
    m2 = jn + (k-1)*id
    val_p, P = np.linalg.eig(m2)
    inv_P = np.linalg.inv(P)
    D = np.diag(val_p)
    print(P @ D @ inv_P)
    return val_p , P
```

2. a. La matrice J_n est de rang 1 : toutes ses colonnes sont identiques et non nulles.
   b. Puisque $\mathrm{rg}(J_n) = 1$, $\dim \mathrm{Ker}\, J_n = n-1$ d'après le théorème du rang. On en déduit que 0 est valeur propre de J_n et l'espace propre associé à la valeur propre 0 de J_n est de dimension $n-1$.
   On remarque aussi que le vecteur colonne $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à 1 est vecteur propre de J_n : $J_nU = nU$. On en déduit que n est valeur propre de J. Puisque $\dim \mathrm{Ker}(J_n - nI_n) \geqslant 1$, on en déduit que $\dim \mathrm{Ker}(J_n - nI_n) + \dim \mathrm{Ker}(J_n) \geqslant n$. Or on sait qu'on a toujours $\dim \mathrm{Ker}(J_n - nI_n) + \dim \mathrm{Ker}(J_n) \geqslant n$. On en déduit donc que J_n n'admet pas d'autre valeur propre que 0 et n et que $\dim \mathrm{Ker}(J_n - nI_n) = 1$, i.e. la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre n de J_n est égale à 1, ou encore $\mathrm{Ker}(J_n - nI_n) = \mathrm{Vect}(U)$.
   c. Le résultat de la question précédente montre que J_n est diagonalisable (la somme des dimensions des espaces propres de J_n est égale à n.

3. a. Puisque J_n est diagonalisable, il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $J_n = PDP^{-1}$.
   On trouve alors que $M^2 = PDP^{-1} + (k-1)I_n = P(D+(k-1)I_n)P^{-1}$. La matrice $D+(k-1)I_n$ étant diagonale, M^2 est donc diagonalisable.
   b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Remarquons que $M^2 - \lambda I_n = J_n - (\lambda + 1 - k)I_n$.
   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(M^2) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(M^2 - \lambda I_n) < n \Leftrightarrow \mathrm{rg}(J_n - (\lambda+1-k)I_n) < n \Leftrightarrow \lambda + 1 - k \in \mathrm{Sp}(J_n).$$
   On en déduit que $\mathrm{Sp}(M^2) = \{k-1; n+k-1\}$. Avec un raisonnement analogue, on trouve que les espaces propres associés aux valeurs propres $k-1$ et $n+k-1$ de M^2 sont respectivement égaux à $n-1$ et 1.

4. On sait que si λ est valeur propre de M, alors λ^2 est valeur propre de M^2.
   On en déduit que $-\sqrt{k-1}$, $\sqrt{k-1}$, $-\sqrt{n+k-1}$ et $\sqrt{n+k-1}$ sont les seules valeurs propres candidates pour M.

5. Un réseau où les trois personnes sont amies vérifie les hypothèses. Il correspond à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $A_{i,j} = 0$, alors i et j ne sont pas amis et $A_{j,i} = 0$. Sinon, $A_{i,j} = 1$, i.e. i est ami avec j, donc j avec i et $A_{j,i} = 1$. Dans tous les cas, $A_{i,j} = A_{j,i}$. La matrice A est donc symétrique.

7. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} k & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & k \end{pmatrix} = J_n + (k-1)I_n$. En effet :
   - chaque personne est amie avec k autres personnes (justification des coefficients coefficients diagonaux) ;
   - tous les couples de personne ont un ami commun (justification des coefficients non diagonaux).

8. a. Il y a $\binom{n}{2}$ couples de personnes distinctes.
   b. Chaque personne a k amis. Pour chaque personne, il y a donc $\binom{k}{2}$ couples de deux personnes distinctes dont elle est un ami en commun.

c. Il y a donc $\binom{k}{2}$ couples de personnes qui ont la personne 1 comme ami commun, $\binom{k}{2}$ couples de personnes qui ont la personne 2 comme ami commun, ..., $\binom{k}{2}$ couples de personnes qui ont la personne n comme ami commun. Comme il y a au total $\binom{n}{2}$ couples et que chaque couple de deux personnes distinctes ont exactement un ami en commun on a donc : $\binom{n}{2} = n\binom{k}{2}$, i.e. $n(n-1) = nk(k-1)$, ce qui équivaut à $k^2 - k + 1 = n$.

9. a. Remarquons que $n + k - 1 = k^2$ d'après la relation précédente.
D'après la question 4, les valeurs propres éventuelles de A sont $-\sqrt{k-1}$, $\sqrt{k-1}$, $-k$ et k.

b. Remarquons que n est impair puisque $k(k-1)$ est nécessairement pair et $n = k(k-1)+1$.
Notons $n_1 = \dim E_k(A) = \dim \mathrm{Ker}(A - kI_n), n_2 = \dim E_{-k}(A) = \dim \mathrm{Ker}(A + kI_n)$
$n_3 = \dim E_{\sqrt{k-1}}(A) = \dim \mathrm{Ker}(A - \sqrt{k-1}I_n)$ et $n_4 = \dim E_{-\sqrt{k-1}}(A) = \dim \mathrm{Ker}(A + \sqrt{k-1}I_n)$.
On rappelle que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $AX = kX \Rightarrow A^2X = k^2X$.
On en déduit que $E_k(A) \subset E_{k^2}(A^2)$ et par conséquent $\dim E_k(A) \leqslant \dim E_k(A^2)$. Or $\dim E_{k^2}(A^2) = E_{k-1+n}(A^2) = 1$ d'après la question 3.b donc $\dim E_k(A) \leqslant 1$.
On a $A_{i,j} = 1$ si les personnes i et j sont amies et $A_{i,j} = 0$ sinon. Donc la somme des coefficients de la i-ième ligne de A correspond au nombre d'amis de la personne i à savoir k. On en déduit que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = k$ ce qui se traduit matriciellement par :

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\ \vdots\\ k\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

Cela prouve que k est valeur propre de A et par conséquent $\dim E_k(A) \geqslant 1$. On peut ainsi affirmer que $\dim E_k(A) = 1$ i.e. $n_1 = 1$.
De même, $AX = -kX \Rightarrow A^2X = k^2X$ donc $E_{-k}(A) \subset E_{k^2}(A^2)$ et par conséquent $n_2 \leqslant 1$.
D'après l'énoncé, on sait que : $kn_1 - kn_2 + \sqrt{k-1}n_3 - \sqrt{k-1}n_4 = 0$ soit :

$$k(n_1 - n_2) + \sqrt{k-1}(n_3 - n_4) = 0.$$

On a vu que $n_1 = 1$. Supposons que l'on ait aussi $n_2 = 1$ alors $k(n_1 - n_2) = 0$.
Donc on aurait $\sqrt{k-1}(n_3 - n_4) = 0$.
Or $k \geqslant 2$ car chaque couple de personnes distinctes a un ami en commun, cette personne a donc au minimum deux amis.
On a donc $\sqrt{k-1} \neq 0$ et par conséquent $n_3 - n_4 = 0$ i.e. $n_3 = n_4$.
Par ailleurs, A étant symétrique, A est diagonalisable donc $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$. On aurait alors $2n_1 + 2n_3 = n$ ce qui est impossible car n est impair.
On en déduit que $n_2 = 0$ (autrement dit $-k$ n'est pas valeur propre de A).
Comme $n_1 = 1$ et $n_2 = 0$, la relation $k(n_1 - n_2) + \sqrt{k-1}(n_3 - n_4) = 0$ devient $k + \sqrt{k-1}(n_3 - n_4) = 0$ soit $n_4 - n_3 = \dfrac{k}{\sqrt{k-1}}$.
D'où $(n_4 - n_3)^2 = \dfrac{k^2}{k-1} = \dfrac{k^2 - 1 + 1}{k-1} = k + 1 + \dfrac{1}{k-1}$.
On a donc $\dfrac{1}{k-1} = (n_4 - n_3)^2 - (k+1)$.
Comme n_4, n_3 et $k+1$ sont des entiers, on en déduit que $\dfrac{1}{k-1}$ est un entier (positif).
Or ceci n'est possible que si $k - 1 = 1$ i.e. $k = 2$.
De fait, $n = k^2 - k + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$. On a donc montré que $n = 3$.

Retour à la planche 76

Corrigé de l'exercice de la planche 77

1. a. On rappelle que deux vecteur u et v sont colinéaires si et seulement si $\mathrm{rg}(u,v) < 2$.

```
def colineaires(u, v):
    a = np.array([u, v])
    return np.linalg.matrix_rank(a) < 2
```

b. Le vecteur u est vecteur propre de A si et seulement si u est non nul et Au est colinéaire à u.
Il suffit alors de tester la condition $u \neq 0$ et la colinéarité entre le produit Au et u :

```
def vecteurs_propres(u):
    return u != [0,0,0] and colineaires(np.dot(A,u), u)
```

Deuxième version sans utiliser la fonction `np.dot`:

```
def produit(A, u):
    x, y, z = u[0], u[1], u[2]
    return [3 * x + y + z, x + z, -3 * x - z]

def vecteurs_propres(u):
    return u != [0,0,0] and colineaires(produit(A, u), u)
```

2. a. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a : $AX = -X \iff (A+I)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+y+z & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \\ -3x & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & -y \end{array} \right.$
Le système admet d'autres solutions que $(0,0,0)$ donc -1 est valeur propre de A et

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

$$AX = X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 0 \\ x-y+z & = & 0 \\ -3x-2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y+2x+z & = & 0 \\ 3x+2z & = & 0 \\ -3x-2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -1/2x \\ z & = & -3/2x \end{array} \right.$$

De même, on en déduit que 1 est valeur propre de A et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

$$AX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x-2y+z & = & 0 \\ -3x-3z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y+x+z & = & 0 \\ 3x+3z & = & 0 \\ -3x-3z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & -x \end{array} \right.$$

Ainsi 2 est bien valeur propre de A et $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Puisque A ne peut avoir plus de trois valeurs propres, on en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$.

b. La matrice A appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et possède 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

3. a. La variable aléatoire X_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ donc $\mathbb{E}(X_k) = p$ et $\mathbb{V}(X_k) = p(1-p)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
Comme les les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi, on peut appliquer le théorème central limite : on peut approcher la loi de $M_n^\star$ par la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Ainsi, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$, $\mathbb{P}(-\alpha < M_n^\star < \alpha) \approx \Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha) = 2\Phi(\alpha) - 1$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

b. On a :

$$\mathbb{P}\left(p \in \left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; M_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \right) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant M_n - p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant M_n^\star \leqslant \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \right).$$

L'étude de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ montre que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$. On en déduit que :

$$\mathbb{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant M_n^\star \leqslant \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geqslant \mathbb{P}\left(-2 \leqslant M_n^\star \leqslant 2\right).$$

Or $\mathbb{P}\left(-2 \leqslant M_n^\star \leqslant 2\right) = 2\Phi(2) - 1 \geqslant 2\Phi(1,96) - 1 = 0,95$ car la fonction Φ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $\mathbb{P}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant M_n^\star \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geqslant 0,95$. Ainsi, $\mathbb{P}\left(p \in \left[M_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; M_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 95\%$,

i.e. $\left[M_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, M_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au seuil de 95%.

4. On note N_V (respectivement p) le nombre (respectivement la proportion) de vecteurs propres de A qui appartiennent à $[\![-5,5]\!]^3$. Puisque $\text{card}([\![-5,5]\!]^3) = 11^3$, alors $p = \dfrac{N_V}{11^3}$ soit $N_V = p \times 11^3$.

   a. On considère l'épreuve de Bernoulli qui consiste à choisir au hasard un vecteur de $[\![-5,5]\!]^3$: cette expérience est modélisée par la fonction `simul`.
   On réalise $n = 10000$ fois dans des conditions indépendantes cette expérience.
   On note $X_k = 1$ si le k-ième vecteur tiré est vecteur propre de A, $X_k = 0$ sinon.
   Les variables aléatoires X_k sont indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$.
   On sait alors que la variable aléatoire $M_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ est un estimateur sans biais de p.
   Le nombre `nb/n` en sortie de boucle correspond à une réalisation de la variable M_n et donne une estimation de p.
   En multipliant par 11^3 et arrondissant à l'entier le plus proche (car $N_V \in \mathbb{N}$), on obtient une estimation de N_V.

   b. On a vu à la question 3.b que $\mathbb{P}\left(M_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant M_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$.
   Cela équivaut à : $\mathbb{P}\left(11^3 M_n - \dfrac{11^3}{\sqrt{n}} \leqslant N_V \leqslant 11^3 M_n + \dfrac{11^3}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$.
   Si on choisit n tel que $\dfrac{11^3}{\sqrt{n}} \leqslant 0,5$, on aura donc : $\mathbb{P}\left(11^3 M_n - 0,5 \leqslant N_V \leqslant 11^3 M_n + 0,5\right) \geqslant 0,95$.
   Par ailleurs, l'entier N_n le plus proche de $11^3 M_n$ vérifie :
   $$11^3 M_n - 0,5 \leqslant N_n \leqslant 11^3 M_n + 0,5.$$
   On en déduit que l'écart entre N_n et N_V est inférieur ou égal à 1 (avec une probabilité d'au moins 95%).
   Or $\dfrac{11^3}{\sqrt{n}} \leqslant 0,5 \iff \sqrt{n} \geqslant 2 * 11^3 \iff n \geqslant 4 \times 11^6$. En choisissant $n \geqslant 4 \times 11^6$ (soit $n \geqslant 7086244$), la valeur affichée `round(nb/n*11**3)` donne une estimation de N_V à 95%.

   c. On reprend le programme de la question 4.a en remplaçant n par 7086244. On obtient 22 après exécution.
   Calculons la valeur exacte de N_V afin de la comparer à 22 :
   D'après l'étude réalisée à la question 2.a, les vecteurs propres de A à coefficients entiers sont de la forme $(0,k,-k)$ ou $(-2k,k,3k)$ ou $(k,0,-k)$ avec $k \in \mathbb{Z}^\star$.
   Comme y a 10 entiers non nuls compris entre -5 et 5, on dénombre :
   - 10 vecteurs propres $(0,k,-k)$ éléments de $[\![-5,5]\!]^3$
   - 10 vecteurs propres $(k,0,-k)$ éléments de $[\![-5,5]\!]^3$

   Reste à dénombrer ceux qui sont de la forme $(-2k,k,3k)$ avec $k \neq 0$.
   Il faut que l'on ait : $\begin{cases} 0 < |2k| \leqslant 5 \\ 0 < |k| \leqslant 5 \\ 0 < |3k| \leqslant 5 \end{cases}$
   Les seuls entiers k qui conviennent sont -1 et 1. Il y a donc 2 vecteurs propres de la forme $(-2k,k,3k)$ qui appartiennent à $[\![-5,5]\!]^3$. On en déduit que $N_V = 10 + 10 + 2 = 22$ ce qui correspond à la valeur obtenue par estimation dans la question précédente.

Retour à la planche 77

Corrigé de l'exercice de la planche 78

1. a. La fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et : $\forall x \geqslant 1,\ f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}(2-\ln x)$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f suivant :

x	1		e^2		$+\infty$
f			$\frac{4}{e^2}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

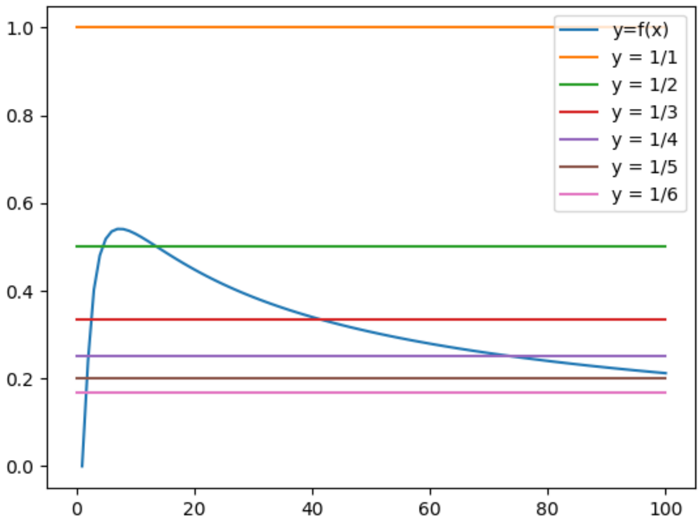
La limite en $+\infty$ est obtenue par croissances comparées.

b. Pour tout $x \geqslant 1,\ f(x) \leqslant \dfrac{4}{e^2} < 1$. L'équation (E_1) n'admet donc pas de solution.

c. La fonction f est strictement monotone et continue sur $[1, e^2]$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection entre $[1, e^2]$ et $\left[0, \dfrac{4}{e^2}\right]$. Pour tout $n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{n} \in \left[0, \dfrac{4}{e^2}\right]$, donc l'équation (E_n) admet une unique solution α_n sur $[1, e^2]$. Un raisonnement analogue montre que l'équation (E_n) admet une unique solution β_n sur $[e^2, +\infty[$. On en déduit que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation (E_n) admet deux solutions α_n et β_n telles que $1 \leqslant \alpha_n \leqslant e^2 \leqslant \beta_n$.

2.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
  return np.log(x)**2/x

abs = np.linspace(1,100,100)
ord = f(abs)
plt.plot(abs, ord, label = "y = f(x)")
for i in range(1,7):
  abs, ord = [0,100], [1/i,1/i]
  plt.plot(abs, ord, label = "y = 1/"+str(i))
plt.legend(loc = "upper right")
plt.show()
```



3. On conjecture que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et converge vers 1, tandis que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et diverge vers $+\infty$.

4. a. Pour tout $n \geqslant 2$, $f(\beta_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} = f(\beta_n)$. Puisque la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est à valeurs dans $[e^2, +\infty[$ et puisque f est strictement décroissante sur cet intervalle, on en déduit que $\beta_{n+1} > \beta_n$. La suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est donc strictement croissante.

b. D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ admet une limite. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle converge vers un réel $\ell \in [e, +\infty[$. Puisque $f(\beta_n) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 2$, on trouve $f(\ell) = 0$ par passage à la limite et continuité de f sur $I = [e^2, +\infty[$, ce qui est absurde étant donné les variations de f sur I. On en déduit, toujours d'après le théorème de la limite monotone que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ diverge vers $+\infty$.

c. Soit $n \geqslant 2$. On a : $\ln^2(\beta_n) = \dfrac{\beta_n}{n}$, i.e. $\ln^2(nu_n) = u_n$. Puisque $\ln n \neq 0$, $\dfrac{u_n}{\ln^2(n)} = \left(\dfrac{\ln(nu_n)}{\ln n}\right)^2 = \left(\dfrac{1+\ln(u_n)}{\ln n}\right)^2$.

Puisque $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$, il vient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln^2(n)} = 1$, i.e. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$.

d. On trouve immédiatement que $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$.

5. a. Avec un raisonnement analogue à celui de la question 4.a, on peut montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante. Étant minorée par 1, elle converge (vers un réel $\ell \geqslant 1$).

   b. Par un raisonnement analogue à celui de la question 4.b, on trouve que $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1. Ainsi :

$$\alpha_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1 + (\alpha_n - 1)) = \ln(\alpha_n).$$

Puisque $n\ln^2(\alpha_n) = \alpha_n$, on trouve que $n(\alpha_n - 1)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, i.e. $\alpha_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

On pourrait vérifier numériquement ce résultat en calculant une valeur approchée de α_n par dichotomie puis en représentant (par exemple) $\sqrt{n}(\alpha_n - 1)$ en fonction de n.

Retour à la planche 78

Corrigé de l'exercice de la planche 79

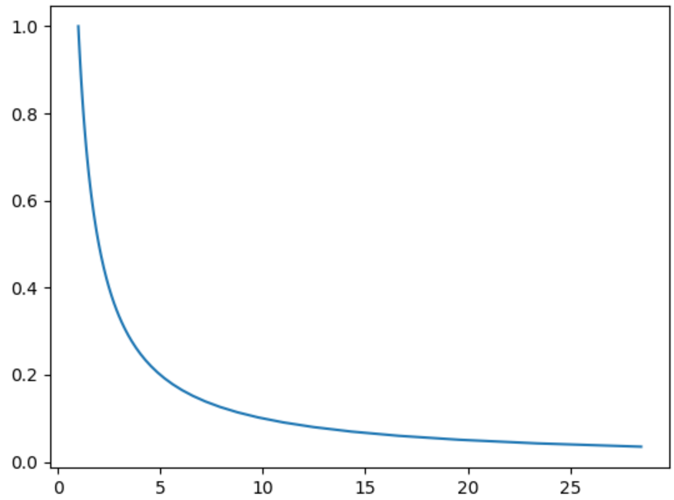
Soit x un réel de l'intervalle $[0,1[$ fixé. On définit les suites $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$, $(g_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(h_n(x))_{n\geqslant 1}$ par :

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+x^k\right),\ g_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-x^{2k-1}\right) \text{ et } h_n(x) = f_n(x)g_n(x).$$

On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$ et $h(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x)$.

1.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def f(n,x):
    p = 1
    for k in range(1,n+1):
        p *= 1+x**k
    return p

def g(n,x):
    p = 1
    for k in range(1,n+1):
        p *= 1-x**(2*k-1)
    return p

abs = [f(100,k/100) for k in range(81)]
ord = [g(100,k/100) for k in range(81)]
plt.plot(abs, ord)
plt.show()
```



On conjecture que pour tout $x \in [0,1[,\ f(x)g(x) = 1$.

2. Soient $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. On trouve que $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}f_n(x) \geqslant 0$ et $gn+1(x) - g_n(x) = -x^{2n+1}g_n(x) \leqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(g_n(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

3. a. Il suffit d'étudier la fonction $t \mapsto e^t - t - 1$, qui est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0. On retrouve bien le résultat : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1+t \leqslant e^t$. Soient $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$1 \leqslant f_n(x) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{x^k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) = \exp\left(x\frac{1-x^n}{1-x}\right) \leqslant \exp\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\exp\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ elle converge donc, i.e. $f(x)$ existe, et par passage à la limite, on trouve $1 \leqslant f(x) \leqslant \exp\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

b. Puisque $f_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient que $f(0) = 0$. De plus, l'encadrement précédent montre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, prouvant ainsi que la fonction f est continue en 0.

4. a. Pour tout $x \in [0,1[$, la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc converge, i.e. $g(x)$ existe.

b. Soient $(x,t) \in [0,1[^2$.
La fonction $h : u \mapsto (1-u)^t$ est continue sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$ et $h' : u \mapsto -t(1-u)^{t-1}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0,x[$ tel que $\dfrac{h(x)-h(0)}{x} = h'(c)$, i.e. $(1-x)^t - 1 = -xt(1-c)^{t-1}$.
Puisque $t-1 < 0$, on a $(1-c)^{t-1} \geqslant 1$, et ainsi $(1-x)^t - 1 \leqslant -xt$, i.e. $x \in [0,1[,\ 1-(1-x)^t \geqslant xt$.

c. Soient $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \mathbb{R},\ 1-t \leqslant e^{-t}$. Ainsi :

$$g_n(x) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{-x^{2k-1}} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x^{2k-1}\right) = \exp\left(-x\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}\right)$$

Par passage à la limite, on trouve $g(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{x}{1-x^2}\right)$.

D'après la question précédente, on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - xt \geqslant (1-x)^t$.

$$g_n(x) \geqslant \prod_{k=1}^{n} (1-x)^{x^{2k-2}} = (1-x)^{\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}} \geqslant (1-x)^{\frac{1}{1-x^2}}.$$

Par passage à la limite, on trouve l'encadrement voulu :

$$\forall x \in [0,1[,\ \exp\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}\right) \leqslant g(x) \leqslant \exp\left(-\frac{x}{1-x^2}\right).$$

La continuité de g en 0 s'obtient par le même raisonnement qu'à la question 3.b.

d. Soit $x \in [0,1[$.

$$\begin{aligned} f_n(x^2)g_n(x^2) &= \prod_{k=1}^{n} (1+x^{2k})(1-x^{4k-2}) \\ &= \prod_{k=1}^{n} (1+x^{2k})(1+x^{2k-1})(1-x^{2k-1}) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{2n} (1+x^k)\right)\left(\prod_{k=1}^{n} (1-x^{2k-1}\right) \\ &= f_{2n}(x)g_n(x). \end{aligned}$$

Cela n'est pas demandé, mais la convergence de la suite $(h_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ découle de celle des suites $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Par passage à la limite, on trouve $h(x^2) = h(x)$.

e. On peut montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $h\left(x^{2^n}\right) = h(x)$.

Remarquons que h est continue en 0 par produit de fonctions continues en 0.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2^n} = 0$ pour tout $x \in [0,1[$, on trouve que $h(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} h\left(x^{2^n}\right)) = h(0) = f(0)g(0) = 1$

f. Oui !

Retour à la planche 79

Corrigé de l'exercice de la planche 80

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x>0,\ f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2}=\frac{x(x+1)-x^2-(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{-1}{x^2(x+1)}<0$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Étant continue sur cet intervalle, elle réalise une bijection entre $\mathbb{R}_+^*$ et $f\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

Pour tout $x>0,\ f(x)=\dfrac{x\ln x+1}{x}-\ln(x+1)$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

Pour tout $x>0,\ f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+\dfrac{1}{x}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

On en déduit que f réalise une bijection entre $\mathbb{R}_+^*$ et lui-même. L'équation $f(x)=1$ admet donc une unique solution.

2. Puisque $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-2\ln 2+3>1$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln 3+2<1$, on en déduit que $\dfrac{1}{3}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$ (théorème de la bijection).

3.
```python
import numpy as np

def f(x):
    return np.log(x) - np.log(x+1) + 1/x

def approx_alpha(a,b,n):
    while b - a > 2*10**(-n):
        c = (a+b)/2
        if (f(a)-1)*(f(c)-1) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

4. La fonction Φ est bien continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Elle est positive sur $\mathbb{R}$. Soit $A\in]\alpha,+\infty[$.

$$\int_\alpha^A\Phi(x)\,\mathrm{d}x=-\int_\alpha^A f'(x)\,\mathrm{d}x=-\left[f(x)\right]_\alpha^A=f(\alpha)-f(A)\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}f(\alpha)=1.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}\Phi(x)\,\mathrm{d}x$ converge, i.e. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)\,\mathrm{d}x$ converge, puisque Φ est nulle sur $]-\infty,\alpha]$.

La fonction Φ est donc une densité de probabilité.

5. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha}t\Phi(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument et est nulle. Soit $A\in]\alpha,+\infty[$.

$$\int_\alpha^A|t\Phi(t)|\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^A\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t=\ln A-\ln(A+1)-\ln\alpha+\ln(\alpha+1)\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}-f(\alpha)+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}-1.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}t\Phi(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

6. Pour tout $t>\alpha,\ f'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{1}{t(t+1)}-\dfrac{1}{t^2}=t\Phi(t)-\dfrac{1}{t^2}$.

7. La question 5 montrer que X admet une espérance égale à $\dfrac{1}{\alpha}-1$.

On peut redémontrer le résultat de la question 5 via la question 6 : $\forall t>\alpha,\ t\Phi(t)=f'(t)+\dfrac{1}{t^2}$.

Corrigé de l'exercice de la planche 81

1. Remarquons que $U^2(\Omega) = [0,1]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(U^2 \leqslant x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leqslant U \leqslant \sqrt{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

   La fonction de répartition de U^2 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1. L'étude des limites de cette fonction en 0 et 1 montre qu'elle est bien continue en 0 et 1 donc sur $\mathbb{R}$.

   Les variables U^2 et V^2 (de même loi) sont donc à densité, de densité $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

2. La variable aléatoire Z est la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité, elle admet donc une densité.

3.
```python
import random as rd

def simule_Z():
    u = rd.random()
    v = rd.random()
    return u**2 + v**2
```

   On utilise la loi faible des grands nombres, appliquées à la variable $\mathbb{1}_{Z\leqslant 1}$ (d'espérance égale à $\mathbb{P}(Z \leqslant 1)$).

```python
N, s = 33710, 0
for k in range(N):
    x = simule_Z()
    if x <= 1:
        s += 1
print(s/N)
```

4. Remarquons que $f(x-t)f(t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x-t < 1 \\ 0 < t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < t < x \\ 0 < t < 1. \end{cases}$.

   a. D'après la remarque précédente, on a :

$$\forall x \in]0,1],\ h(x) = \int_0^x f(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

   b. Soit $x \in]0,1]$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{x}$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$, on peut appliquer le changement de variable $y = \dfrac{t}{x}$. On trouve :

$$h(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{t=yx}{=} \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-xt}}\frac{1}{\sqrt{xy}}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y.$$

   c. Soit $x \in]0,1]$. La fonction $u \mapsto \sin^2(u)$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on peut appliquer le changement de variable $y = \sin^2(u)$. On trouve $\mathrm{d}y = 2\cos(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u$ et (puisque cos et sin sont positives sur I) :

$$h(x) \underset{y=\sin^2(u)}{=} \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}}\frac{1}{\sqrt{\sin^2(u)}}2\cos(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$

   d. L'aire sous la courbe représentative de la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{y(1-y)}}$ entre les points d'abscisses 0 et 1 est égale à π.

5. a. La variable aléatoire S_n admet une espérance (par linéarité) et $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{\pi}{4}$. Puisque $Y_1 + \cdots + Y_n$ est la somme de variables indépendantes admettant une variance, cette variable admet une variance, tout comme S_n et $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{\pi}{4n}\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{n\varepsilon^2}.$$

b. Il suffit de choisir un entier naturel n tel que $\dfrac{\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{n\varepsilon^2} \leqslant 0,05$ avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

On trouve alors que si $n \geqslant 33710$, $[S_n - 10^{-2}, S_n + 10^{-2}]$ est un intervalle de confiance de $\dfrac{\pi}{4}$ au niveau 0,95 d'amplitude 2×10^{-2}.

c. D'après la question 4.c, $P(Z \leqslant 1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

La simulation précédente donne $S_{33710}(\omega) \approx 0,7856$, l'intervalle $[0,7755; 0,7956]$ est un intervalle de confiance de $\dfrac{\pi}{4}$ au niveau 0,95 d'amplitude 2×10^{-2}.

6. On pourrait appliquer l'algorithme de dichotomie à l'équation $\tan(x) = 1$ sachant que la fonction tan est strictement croissante et continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Retour à la planche 81

Corrigé de l'exercice de la planche 82

1. Si $c = 0$, X est le rang du premier succès lors de la répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre de succès $\frac{1}{2}$. La variable X suit donc la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

   En notant N_i l'événement "on obtient une boule noire au i-ème tirage" pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a $[X = 3] = N_1 \cap N_2 \cap \overline{N_3}$. D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2)\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{2}{4} \times \frac{2+c}{4+c} \times \frac{2}{4+4c} = \frac{1}{2(4+c)}.$$

2. a.

```python
import random as rd

def simule_X(c,s):
    rang, nb_boules = 1, 4
    for k in range(s):
        if rd.random() < 2/nb_boules:
            return rang
        else:
            nb_boules += c
            rang += 1
    return 0
```

   b. On applique la loi faible des grands nombres à un n-échantillon de la variable aléatoire $\mathbb{1}_{X=0}$:

```python
for c in [1,2,5]:
    N = 1000
    n, s = 0, 10000
    for k in range(N):
        if simule_X(c,s) == 0:
            n += 1
    print("P(X=0) = ", n/N)
```

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $E_n = \bigcap_{k=1}^{n} N_k$, on a, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}}(N_k).$$

   Or, si $N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}$ est réalisé, on a tiré $k-1$ boules noires, et ainsi ajouté $(k-1)c$ boules noires. Avant le k-ème tirage, il a donc $4 + (k-1)c$ boules dans l'urne, dont $2 + (k-1)c$ noires. On en déduit donc que :

$$\mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2+(k-1)c}{4+(k-1)c} \underset{j=k-1}{=} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{2+jc}{4+jc}.$$

4. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{2+j}{4+j} = (n+1)!\frac{3!}{(n+3)!} = \frac{6}{(n+2)(n+3)}$.

   On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X = 0] \subset E_n$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathbb{P}(X = 0) \leqslant \mathbb{P}(E_n)$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0$, on en déduit que $P(X = 0) = 0$ d'après le théorème d'encadrement.

   b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(E_{n-1} \cap \overline{N_n}) = \mathbb{P}(E_{n-1})\mathbb{P}_{E_{n-1}}(\overline{N_n}) = \frac{6}{(n+1)(n+2)} \times \frac{2}{n+3} = \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

   c. Soit $A \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=0}^{A} |(n+3)\mathbb{P}(X = n)| = \sum_{n=1}^{A} \frac{12}{(n+1)(n+2)} = 12\sum_{n=1}^{A} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{12}{2} - \frac{12}{A+2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 6.$$

   D'après le théorème du transfert, la variable $X + 3$ admet une espérance, égale à 6. On en déduit que X admet une espérance par linéarité, égale à 3.

   d. On applique la loi faible des grands nombres à un n-échantillon de la variable aléatoire X

```python
N = 1000
n, s = 0, 100000
for k in range(N):
    n += simule_X(1,s)
print(n/N) # une simulation donne 2.91
```

5. On suppose dans cette question que $c = 2$.

   a. Après calculs (on reconnait un produit télescopique), on trouve que $\mathbb{P}(E_n) = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par le même argument que celui proposé à la question 4.a, on trouve que $\mathbb{P}(X = 0)$.

   b. La loi de X est donnée par $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(E_{n-1} \cap \overline{N_n}) = \mathbb{P}(E_{n-1})\mathbb{P}_{E_{n-1}}(\overline{N_n}) = \frac{1}{n} \times \frac{2}{4 + 2(n-1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$
   Soit $A \in \mathbb{N}^*$.
$$\sum_{n=0}^{A} |n\mathbb{P}(X = n)| = \sum_{n=1}^{A} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{A} \frac{1}{n+1} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
   La variable aléatoire X n'admet donc pas d'espérance.

6. Dans cette question, c est un entier naturel quelconque.

   a. D'après la question 3, on a :
$$-\ln(\mathbb{P}(E_n)) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2 + kc}{4 + kc}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{(2 + kc) + 2}{2 + kc}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{2}{2 + kc}\right).$$

   b. Puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{2}{2 + kc} = 0$, $\ln\left(1 + \dfrac{2}{2 + kc}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{2 + kc} \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{kc}$.
   Puisque la série $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^*} \dfrac{2}{kc}$ (série harmonique) diverge et puisque les suites $\left(\dfrac{2}{kc}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\ln\left(1 + \dfrac{2}{2 + kc}\right)\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont positives et équivalentes, on en déduit que la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{2}{2 + kc}\right)$ diverge. Par positivité de son terme général, elle diverge vers $+\infty$, i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} -\ln(\mathbb{P}(E_n)) = +\infty$, i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0$.
   On reprend l'argument de la question 3 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathbb{P}(X = 0) \leqslant \mathbb{P}(E_n)$. En appliquant le théorème d'encadrement, on trouve que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$.

Retour à la planche 82

Corrigé de l'exercice de la planche 83

1. Il vient immédiatement que $X_1(\Omega) = \{0; 2\}$. Puisque $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \dfrac{2}{3}$, $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{4}{3}$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Chaque bactérie de la génération $n-1$ génère un nombre pair de bactéries (0 ou 2) à la génération n. La variable X_n ne prend donc que des valeurs paires (comme somme de nombres pairs).
   On peut montrer par récurrence (inutile de la rédiger pendant la préparation) que $X_n(\Omega) = \{0; 2; 4; \dots; 2^n\}$.

   b.
```python
def simulegeneration(n):
    liste = [1]
    for k in range(1, n+1):
        nb_bacteries = liste[-1]
        xk = 0
        for i in range(nb_bacteries):
            if rd.random() < 2/3:
                xk += 2
        liste.append(xk)
    return liste
```

   c. Sachant que l'événement $[X_n = 2i]$ est réalisé, la variable $\dfrac{X_{n+1}}{2}$ correspond au nombre de succès (division d'une bactérie en deux) lors de la répétition de $2i$ expériences de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès $\dfrac{2}{3}$.
   On en déduit que la loi conditionnelle de $\dfrac{X_{n+1}}{2}$ sachant $[X_n = 2i]$ est la loi binomiale de paramètre $\left(2i, \dfrac{2}{3}\right)$ et :

$$\forall j \in [\![0, 2i]\!],\ \mathbb{P}_{[X_n=2i]}(X_{n+1} = 2j) = \mathbb{P}_{[X_n=2i]}\left(\frac{X_{n+1}}{2} = j\right) = \binom{2i}{j}\frac{2^j}{3^{2i}}.$$

3. a. Il vient immédiatement que $G_n(1) = 1$. On remarque que G_n est dérivable car polynômiale et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n'(x) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} kx^{k-1}P(X_n = k)$$

   On en déduit que $G_n'(1) = \mathbb{E}(X_n)$ (l'espérance de X_n car X_n est une variable aléatoire finie).

   b. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = G_{n+1}'(1) = G_1'(1)G_n'(G_1(1)) = \mathbb{E}(X_1)G_n'(1) = \frac{4}{3}\mathbb{E}(X_n).$$

   c. Il vient immédiatement que $\mathbb{E}(X_n) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \mathbb{E}(X_0) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.

4. a. Remarquons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ G_1(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}x^2$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ G_{n+1}(x) = G_1(G_n(x)) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(G_n(x)\right)^2.$$

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0) = G_n(0)$. En évaluant la relation de la question précédente en $x = 0$, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_n^2.$$

   c. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   La propriété est vraie pour $n = 1$ car $\mathbb{P}(X_0 = 0) = \dfrac{1}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $0 \leqslant u_n^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$ et ainsi $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.
La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 0] \subset [X_{n+1} = 0]$, montrant ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Puisqu'elle est majorée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Par passage à la limite de la relation de récurrence, on trouve $\ell = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\ell^2$. Cette équation admet pour solutions $\ell = 1$ et $\ell = \dfrac{1}{2}$. L'encadrement de ℓ permet de conclure : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note D_n l'événement "la population disparait exactement à l'issue de l'étape n".

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = [X_n = 0] \cap [X_{n-1} \neq 0] = [X_n = 0] \setminus [X_{n-1} = 0]$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(D_n) = \mathbb{P}(X_n = 0) - \mathbb{P}(X_{n-1} = 0) = u_n - u_{n-1}$ car $[X_{n-1} = 0] \subset [X_n = 0]$.

   b. L'événement R est réalisé si, et seulement s'il existe une étape $n \in \mathbb{N}^*$ à l'issue de laquelle la population s'éteint (i.e. D_n est réalisé).

   On en déduit que $R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$. Puisque les événements de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux-à-deux disjoints, on a, par σ-additivité :
   $$\mathbb{P}(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(D_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = \ell - u_0 = \frac{1}{2}.$$
   (la série convergeant par σ-additivité).

   La probabilité que la population s'éteigne est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice de la planche 84

1. Le polynôme P_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Il est donc strictement croissant sur $\mathbb{R}$. Puisque $P_t(0) = -1$ et $P_t(1) = t \geqslant 0$, la fonction continue P_t admet une unique racine réelle positive $u(t)$ d'après le théorème de la bijection.

2. a. D'après la question précédente, pour tout $t \geqslant 0$, $u(t) \in]0,1]$: $P_t(0) < 0$ et $P_t(1) = t \geqslant 0$.

   b. Soit $(s,t) \in \mathbb{R}_+$ tel que $s < t$. Puisque $u(s)^3 + su(s) - 1 = 0$, on a :

$$P_t(u(s)) = u(s)^3 + tu(s) - 1 = -su(s) + 1 + tu(s) - 1 = (t-s)u(s) > 0 = P_t(u(t)).$$

   Par stricte monotonie de P_t sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $u(s) > u(t)$ et ainsi que la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

   c. La fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et minorée par 0, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0,1]$.
   Supposons par l'absurde que $\ell > 0$. Puisque, pour tout $t \geqslant 0$, $u(t)^3 + tu(t) - 1 = 0$, on a, par passage à la limite lorsque t tend vers $+infty$, $+\infty = 0$, ce qui est absurde.
   On en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0$.

   d. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $z \in]0,1]$.

$$u(t) = z \Leftrightarrow z^3 + tz - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1-t^3}{t}.$$

   L'application u est donc bijective, de réciproque :

$$v : \begin{array}{ccc}]0,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \dfrac{1-y^3}{y}. \end{array}$$

   e. Le tracé de la courbe u se déduit de celle de v par symétrie par rapport à la première bissectrice.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def v(y):
    return (1-y**3)/y

abs = np.linspace(0.1, 1, 50)
ord = [v(y) for y in abs]
plt.ion()
plt.plot(abs, ord, label = "v")
plt.plot(ord, abs, label = "u")
plt.legend(loc = "best")
plt.show()
```

   f. La fonction v est continue sur $]0,1]$ donc sa réciproque, la fonction u, est continue sur $v\left(]0,1]\right) = \mathbb{R}_+$.

   g. La fonction v est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$ et sa dérivée, la fonction $\left(y \mapsto \dfrac{-2y^3-1}{y^2}\right)$, ne s'annule pas sur cet intervalle, donc sa réciproque, la fonction u, est $\mathcal{C}^1$ donc dérivable sur $v\left(]0,1]\right) = \mathbb{R}_+$.

$$\forall t \geqslant 0,\ u'(t) = \frac{1}{v'(u(t))} = -\frac{u(t)^2}{2u(t)^3+1}.$$

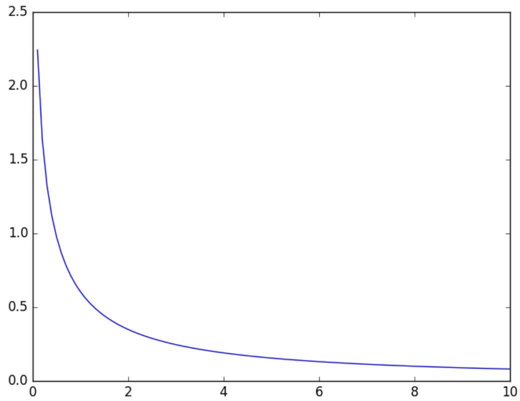
Corrigé de l'exercice de la planche 85

1. a. On utilise les sommes de Riemann :

```
import numpy as np

def f(x):
    def integrande(t):
        return np.cos(t)/(x+t)
    s = 0
    n = 100 #nb points : 100
    for k in range(n):
        s += integrande(k/n)
    return s/n
```

b. Le code ci-dessous fournit le graphe ci-contre.

```
import matplotlib.pyplot as plt

abs = np.linspace(0.1,10,100)
ord = f(abs) # ou abs = [f(x) for x in abs]
plt.plot(abs, ord)
plt.show()
```



On peut alors conjecturer que la fonction f est décroissante et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$f(x) - f(x') = \int_0^1 \frac{\cos t}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\cos t}{x'+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos t \frac{(x'+t)-(x+t)}{(x+t)(x'+t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos t \frac{x'-x}{(x+t)(x'+t)}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque, pour tout $t \in [0,1]$, $\cos t \dfrac{x'-x}{(x+t)(x'+t)} > 0$, on en déduit, par positivité de l'intégrale, que $f(x) - f(x') \geqslant 0$. On en déduit que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. La fonction f est décroissante et minorée par 0 (trivial), elle admet donc une limite finie en $+\infty$.

4. a. Soit $x \in \left[\dfrac{x_0}{2}, +\infty\right[$. Pour tout $t \in [0,1]$, $(x+t)(x_0+t) \geqslant \dfrac{x_0^2}{2}$ et $|\cos t| \leqslant 1$. Ainsi, d'après la question 2, on a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \int_0^1 \left|\cos t \frac{x_0 - x}{(x+t)(x_0+t)}\right| \mathrm{d}t. \leqslant |x - x_0| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(x+t)(x_0+t)} \leqslant \frac{2|x-x_0|}{x_0^2}.$$

b. Par encadrement, on trouve que $\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, i.e. f est continue en x_0.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{\cos t}{x+1} \leqslant \dfrac{\cos t}{x+t} \leqslant \dfrac{\cos t}{x}$. Par croissance de l'intégrale, on trouve : $\dfrac{A}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{A}{x}$ où $A = \displaystyle\int_0^1 \cos t\,\mathrm{d}t = \sin(1)$. Ce résultat est cohérent avec le graphe de f qui ressemble à celui de la fonction inverse au voisinage de $+\infty$. On peut même ajouter que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sin(1)}{x}$.

6. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|g(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\cos(t)-1}{x+t}\right| \mathrm{d} \leqslant \int_0^1 \frac{t^2}{2(x+t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^2}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$.

b. Puisque pour tout $x > 0$, $f(x) = g(x) + \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t = g(x) + \ln(x+1) - \ln(x)$, on en déduit que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$ puisque les fonctions g et $(x \mapsto \ln(1+x))$ sont bornées au voisinage de 0.

Corrigé de l'exercice de la planche 86

1.

```
def test(liste):
    somme = 0
    for a in liste:
        somme += 1/a**2
    for a in liste:
        if somme * a**2 < 2:
            return False
    return True
```

2. Puisque le vecteur $\vec{u}$ appartient P, il est son propre projeté orthogonal et sa norme est égale à 1.
Soit $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})$ une base orthonormée du plan $\mathbb{P}$.
Le projeté orthogonal $p(\vec{v})$ de $\vec{u}$ sur $\mathbb{P}$ vérifie alors : $p(\vec{v}) = (\vec{\varepsilon_1} \mid \vec{v})\,\vec{\varepsilon_1} + (\vec{\varepsilon_2} \mid \vec{v})\,\vec{\varepsilon_2}$. Le vecteur $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ est un vecteur orthonormé, normal à $\mathbb{P}$. Ainsi, la famille $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{n})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que :
$$\vec{v} = (\vec{\varepsilon_1} \mid \vec{v})\,\vec{\varepsilon_1} + (\vec{\varepsilon_2} \mid \vec{v})\,\vec{\varepsilon_2} + (\vec{n} \mid \vec{v})\,\vec{n}.$$
On trouve alors que $p(\vec{v}) = \vec{v} - (\vec{n} \mid \vec{v})\,\vec{n} = \sqrt{2}(0,1,0) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, qui est de norme 1.
De la même manière, $p(\vec{w}) = \vec{w} - (\vec{n} \mid \vec{w})\,\vec{n} = \sqrt{2}(0,0,1) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
On vérifie facilement que $p(\vec{w})$ est de norme 1.

3. a. On sait que :
$$\forall i \in \{1,2,3\},\ p(\vec{e_i}) = (\vec{\varepsilon_1} \mid \vec{e_i})\,\vec{\varepsilon_1} + (\vec{\varepsilon_2} \mid \vec{e_i})\,\vec{\varepsilon_2}.$$
b. Soit $i \in \{1,2,3\}$. Puisque $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})$ est une base orthonormée de $\mathbb{P}$, on a $\|p(\vec{e_i})\|^2 = (\vec{\varepsilon_1} \mid \vec{e_i})^2 + (\vec{\varepsilon_2} \mid \vec{e_i})^2$.
Or, par hypothèse, $\|p(\vec{e_i})\|^2 = \left\| \dfrac{1}{a_i} p(\overrightarrow{a_i e_i}) \right\|^2 = \dfrac{1}{a_i^2} \|p(\overrightarrow{a_i e_i})\|^2 = \dfrac{d^2}{a_i^2}$. On en déduit que :
$$\forall i \in \{1,2,3\},\ (\vec{\varepsilon_1} \mid \vec{e_i})^2 + (\vec{\varepsilon_2} \mid \vec{e_i})^2 = \frac{d^2}{a_i^2}.$$
c. En sommant les trois égalités précédentes, on trouve :
$$\sum_{i=1}^{3} (\vec{\varepsilon_1} \mid \vec{e_i})^2 + (\vec{\varepsilon_2} \mid \vec{e_i})^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2}{a_i^2}.$$
Or $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Ainsi :
$$\forall k \in \{1;2\},\ \sum_{i=1}^{3} (\vec{\varepsilon_k} \mid \vec{e_i})^2 = \|\varepsilon_k\|^2 = 1.$$
On en déduit que :
$$2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{d^2}{a_i^2} \text{ i.e. } \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2} = \frac{2}{d^2}.$$
d. Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $\|p(\vec{e_i})\| \leqslant \|\vec{e_i}\|$ (conséquence du théorème du Pythagore), i.e. $\dfrac{d}{|a_i|} \leqslant 1$.
On en déduit que $|a_i| \geqslant d$ puis que :
$$a_i^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{a_k^2} \geqslant d^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{a_k^2} = 2.$$

Corrigé de l'exercice de la planche 87

1.

```python
import random as rd

def X(N):
    x = 0
    for k in range(N):
        if rd.randint(1,6) == 6:
            x += 1
    return x
```

2.

```python
def S(N,n):
    des_restants = N
    s = 0
    for k in range(n):
        x = X(des_restants)
        des_restants -= x
        s += x
    return s
```

3. a. $\binom{N}{M}\binom{N-M}{k-M} = \frac{N!}{M!(N-M)!}\frac{(N-M)!}{(k-M)!(N-k)!} = \frac{N!}{k!(N-k)!}\frac{k!}{M!(k-M)!} = \binom{N}{k}\binom{k}{M}$.

b. $S_1 = X_1$ est le nombre de succès - "obtenir un 6" - lors de la répétition de N expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre de succès $p_1 = \frac{1}{6}$. Cette variable suit donc la loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{6}$.

c. (i) Si $[S_n = M]$ est réalisé, il reste $N - M$ dés avant le $(n+1)$-ème tirage. La loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[S_n = M]$ étant la loi binomiale de paramètres $N - M$ et $\frac{1}{6}$ (par les mêmes arguments qu'à la question 3.b), on en déduit que : $P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M) = \binom{N-M}{k-M}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-M}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$.

(ii) $([S_n = M])_{0\leqslant M\leqslant N}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![0,N]\!],\ P(S_{n+1} = k) &= \sum_{M=0}^{N} P([S_n = M]\cap[S_{n+1} = k]) \\
&= \sum_{M=0}^{k} P(S_n = M)P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M) \\
&= \sum_{M=0}^{k} \binom{N}{M} p_n^M (1-p_n)^{N-M}\binom{N-M}{k-M}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-M}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \\
&= \binom{N}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}(1-p_n)^{N-k}\sum_{M=0}^{k}\binom{k}{M}p_n^M(1-p_n)^{k-M}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-M} \\
&= \binom{N}{k}\left(\frac{5-5p_n}{6}\right)^{N-k}\left(\frac{1+5p_n}{6}\right)^{k}.
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{5-5p_n}{6} + \frac{1+5p_n}{6} = 1$, S_{n+1} suit la loi binomiale de paramètres N et p_{n+1} où $p_{n+1} = \frac{1+5p_n}{6}$.

d. La suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique. Puisque $\ell = \frac{1+5\ell}{6} \Leftrightarrow \ell = 1$, posons $u_n = p_n - 1$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = p_{n+1} - 1 = \frac{5p_n - 5}{6} = \frac{5}{6}u_n$. Puis : $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}u_1 = -\left(\frac{5}{6}\right)^n$ et enfin $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

4. Soit $n \in T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Puisque $[T \leqslant n] = [S_n = N]$, on en déduit que $P(T \leqslant n) = p_n^N = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N$.

5. $P(T > n) = 1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \left(1 - N\left(\frac{5}{6}\right)^n + o\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} N\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\frac{P(T>n)}{N\left(\frac{5}{6}\right)^n} = 1$.

Il existe donc $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $P(T > n) \leqslant \frac{3}{2}N\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Puisque $N\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est le terme général d'une série (géométrique) convergente, la série de terme général $P(T > n)$ converge, i.e. T admet une espérance et donnée par $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N$.

Corrigé de l'exercice de la planche 88

1.
```python
def f_a(x, y, z, a):
    return (a(x+z), x+z, -a(x+z))
```

2. a.
$$\operatorname{Im} f_a = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}(ae_1 + e_2 - ae_3).$$
Le vecteur non nul $ae_1 + e_2 - ae_3$ forme donc une base de $\operatorname{Im} f_a$.

b. Puisque $f_a(e_2) = 0$ et $f_a(e_1 - e_3) = f_a(e_1) - f_a(e_3) = 0$, $\{e_2, e_1 - e_3\} \subset \operatorname{Ker} f_a$.
Remarquons que la famille $(e_2, e_1 - e_3)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker} f_a$.
D'après le théorème du rang, la dimension du noyau de f_a est égale à 2, ce qui assure que $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\operatorname{Ker} f_a$.

3. Il vient immédiatement :
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On en déduit que $f_a \circ f_a$ est l'endomorphisme nul.

4. a. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ tel que $xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0$.
En composant par f_a, on trouve $zf_a(e_3) = 0$, ce qui implique que $z = 0$ (le vecteur $f_a(e_3)$ étant non nul).
En considérant la seconde coordonnée de e'_1 (non nulle) et e'_2 (nulle) dans la base $\mathcal{B}$, il vient que ces vecteurs ne sont pas colinéaires, et ainsi $x = y = 0$.
La famille (e'_1, e'_2, e'_3) formant une famille libre de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est donc bien une base de E.

b. Puisque $f_a(e'_1) = 0$, $f_a(e'_2) = 0$ et $f_a(e'_3) = f_a(e_3) = f_a(e_1) = e'_1$, on trouve :
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. La matrice A' relativement à la base $\mathcal{B}'$ de l'endomorphisme f_a est triangulaire supérieure. Puisque ses éléments diagonaux sont tous nuls, 0 est la seule valeur propre de l'endomorphisme f_a, et ainsi 0 est la seule valeur propre de A.
La matrice A n'est pas inversible car 0 est valeur propre (ou encore le noyau de f_a n'est pas réduit à $\{0\}$).
La matrice A n'est pas diagonalisable car, si elle l'était, elle serait semblable à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas.

5. a. La matrice $A - xI_3$ est inversible si, et seulement si, x n'appartient pas au noyau de la matrice A, i.e. si et seulement si $x \neq 0$.
La matrice $B(x)$ est donc inversible pour tout x non nul.

b. Après calculs, on trouve $(A - xI_3)(A + xI_3) = A^2 - x^2 I_3 = -x^2 I_3$ et ainsi $B(x)\left(-\dfrac{1}{x^2}(A + xI_3)\right) = I_3$.
On en déduit alors que $(B(x))^{-1} = -\dfrac{1}{x^2}(A + xI_3)$.

c. Remarquons que, pour tout $k \geq 0$, $A^k = 0$.
Puisque les matrices A et I_3 commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (B(x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (-x)^{n-k} I_3 = (-x)^n I_3 + n(-x)^{n-1} A = (-x)^{n-1} (nA - xI_3).$$

Corrigé de l'exercice de la planche 89

1. Soient X et Y deux variables à densité, de densités respectives f et g, et de fonction de répartition F et G.

   a. En intégrant sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$ l'encadrement, on trouve que $e^{-\varepsilon}P(X \in I) \leqslant P(Y \in I) \leqslant e^{\varepsilon}P(X \in I)$, i.e. le couple (X, Y) est ε-différentiel.

   b. La définition de (X, Y) est un couple ε-différentiel devient, pour $I = [t, t+h]$:
$$e^{-\varepsilon}P(t \leqslant X \leqslant t+h) \leqslant P(t \leqslant Y \leqslant t+h) \leqslant e^{\varepsilon}P(t \leqslant X \leqslant t+h),$$
   c'est-à-dire :
$$e^{-\varepsilon}(F(t+h) - F(t)) \leqslant G(t+h) - G(t) \leqslant e^{\varepsilon}(F(t+h) - F(t)).$$
   Ainsi :
$$e^{-\varepsilon}\frac{F(t+h) - F(t)}{h} \leqslant \frac{G(t+h) - G(t)}{h} \leqslant e^{\varepsilon}\frac{F(t+h) - F(t)}{h}.$$
   Puisque f et g sont continues en t, F et G sont $\mathcal{C}^1$ en t (donc dérivables). Par passage à la limite (lorsque h tend vers 0), on trouve $e^{-\varepsilon}f(t) \leqslant g(t) \leqslant e^{\varepsilon}f(t)$.

2. a. La fonction $f_{a,b}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Soit $B \in \mathbb{R}$ tel que $a < B$.
$$\int_a^B f_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^B \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right)\right]_a^B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{B-a}{b}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $\dfrac{1}{2}$. On peut montrer de la même manière que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $\dfrac{1}{2}$. On en déduit ainsi que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur 1, puis que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.

   b. Soit $B > a$.
$$\int_a^B |tf_{a,b}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^B \frac{t}{2b}\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right)\mathrm{d}t$$
   Les fonctions $(t \mapsto t)$ et $\left(t \mapsto -\dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{t-a}{b}\right)\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, B]$. Ainsi, par intégration par parties, on obtient :
$$\int_a^B |tf_{a,b}(t)|\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{2}\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right)\right]_a^B + \int_a^B \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right)\mathrm{d}t \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a+b}{2}$$
   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |tf_{a,b}(t)|\,\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur $\dfrac{a+b}{2}$. On peut montrer de la même manière que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} |tf_{a,b}(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

   On en déduit ainsi que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tf_{a,b}(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, i.e. X admet une espérance. En retirant la valeur absolue dans les calculs de la seconde intégrale généralisée, on trouve que $E(X) = a$.

   c. D'après l'inégalité triangulaire, on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ |t-a| \leqslant |t-a'| + |a'-a|$ et $|t-a'| \leqslant |t-a| + |a'-a|$, i.e. $-|t-a| - |a'-a| \leqslant -|t-a| + |a'-a|$. Ainsi, en divisant par b puis, par croissance de la fonction exponentielle, on a :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp\left(\frac{-|t-a|}{b} - \frac{|a'-a|}{b}\right) \leqslant \exp\left(\frac{-|t-a'|}{b}\right) \leqslant \exp\left(\frac{-|t-a|}{b} + \frac{|a'-a|}{b}\right)$$
   Il vient donc (d'après la question 1.b) que le couple (X, Y) est $\dfrac{|a-a'|}{b}$-différentiel.

3. a. Soit $t \in \mathbb{R}$. Puisque $([U = -1], [U = 1])$ est un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(a + bUV \leqslant t) &= P(U = 1, a + bV \leqslant t) + P(U = -1, a - bV \leqslant t) \\ &= \frac{1}{2} P\left(V \leqslant \frac{t-a}{b}\right) + \frac{1}{2} P\left(V \geqslant -\frac{t-a}{b}\right) \quad \text{par indépendance de U et V} \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) & \text{si } t \geqslant a \\ \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right) & \text{si } t \leqslant a \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction de répartition de la variable $a + bUV$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. La variable aléatoire $a + bUV$ est donc à densité. Après calculs, on retrouve bien qu'une densité de $a + bUV$ est $f_{a,b}$, i.e. $a + bUV$ suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(a, b)$.

b.

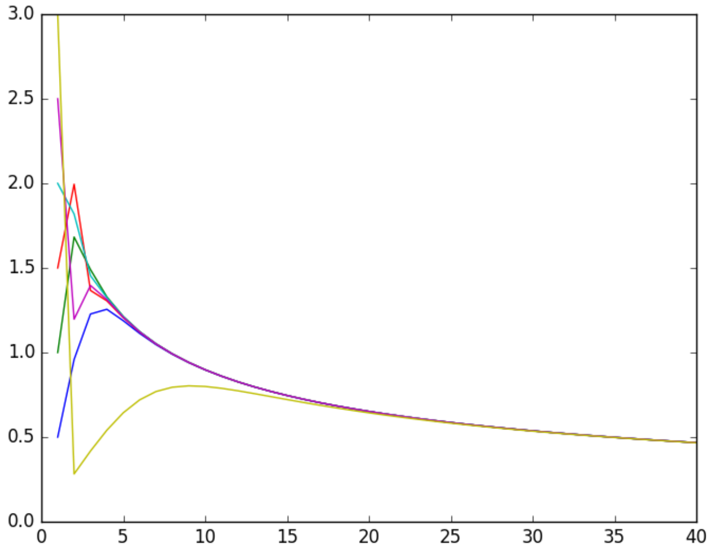
```python
import random as rd
import numpy as np

def laplace(a,b):
    u = rd.choice([-1,1])
    v = - np.log(1 - rd.random())
    return a + b*u*v
```

Corrigé de l'exercice de la planche 90

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \geqslant 3$.
   - $u_1 \in]0, \pi[$ donc $u_2 \in]0, 2]$ puis $u_3 \in \left]0, 1 + \frac{1}{2}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   - Soit $n \geqslant 3$. Supposons que $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$. On en déduit que $0 < \sin(u_n) < 1$ puis $0 < u_{n+1} < 1 + \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$, ce qui conclut le raisonnement.
2. Supposons que la suite converge vers un réel ℓ. Par passage à la limite de la relation de récurrence, on obtient l'équation $\ell = \sin(\ell)$, qui admet pour unique solution $\ell = 0$. Dans l'hypothèse où la suite (u_n) converge, elle ne peut converger que vers 0.
3.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def suite_u(N, u1):
    n_liste = [1]
    u_liste = [u1]
    u = u1
    for n in range(1, N):
        # calcul de u_{n+1}
        u_liste.append((1+(1/n))*np.sin(u))
        n_liste.append(n+1)
    return n_liste, u_liste

for u1 in [0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3]:
    n_liste, u_liste = suite_u(40, u1)
    plt.plot(n_liste, u_liste)
plt.show()
```

On conjecture que, quelque soit la valeur de u_1, la suite est décroissante.



4. Supposons qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 4$ tel que $u_{n_0} \leqslant u_{n_0-1}$.

   Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. La propriété est vraie pour $n = n_0$ par hypothèse. Soit $n \geqslant n_0 + 1$. Supposons que $u_n \leqslant u_{n-1}$.

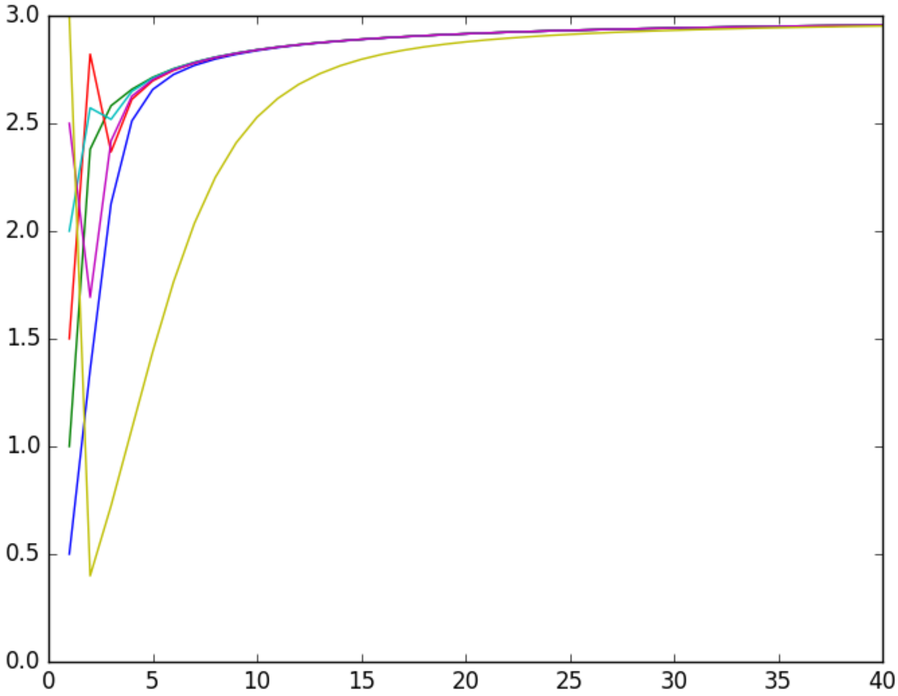
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin(u_n)}{u_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin(u_n)}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\sin(u_{n-1})} = \frac{n^2-1}{n^2}\frac{\sin(u_n)}{\sin(u_{n-1})}$$

   Puisque la fonction sin est croissante (et ne s'annule pas) sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\sin(u_n)}{\sin(u_{n-1})} \leqslant 1$ et ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$.

   On en déduit donc que la suite décroit à partir du rang n_0.
5. Supposons par l'absurde que, pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n > u_{n-1}$.

   La suite (u_n) est donc strictement croissante. Puisqu'elle est majorée par $\frac{\pi}{2}$, elle converge vers un réel strictement supérieur à u_1, ce qui est impossible d'après la question 2.
6. On déduit des questions 4 et 5 que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et converge vers 0.
7. Le code ci dessous permet de conjecturer que la suite $(\sqrt{n}u_n)$ converge vers 3, quelque soit la valeur de u_1.

```python
for u1 in [0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3]:
    n_liste, u_liste = suite_u(40, u1)
    racine_u = [(n_liste[k]**0.5)*u_liste[k] for k in range(40)]
    plt.plot(n_liste, racine_u)
plt.show()
```



8. Pour $n \geqslant 1$, on a $x_{n+1} - x_n = \dfrac{\sin(u_n) - u_n}{n}$. Puisque la suite (u_n) converge vers 0, on sait que $\sin(u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^3}{6}$.

   On en déduit que $x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{n^2}{6} x_n^3$.

   De la même manière, on trouve que $\sin(u_n) + u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2u_n + o(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2nx_n$ et $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$.

   Ainsi :

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{-(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n)}{x_{n+1}^2 x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} = \frac{-(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n)}{x_n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{n^2}{6} x_n^3 \times 2n x_n}{x_n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3}$$

9. Puisque pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on en déduit que $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{18} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{9}$ puis $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n\sqrt{n}}$ et enfin $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{\sqrt{n}}$ et $\sqrt{n}u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3$.

Corrigé de l'exercice de la planche 91

1.
```python
import random as rd

N=10
blanches = 2
total = N
liste_X = []
for k in range(1,N+1):
    if rd.random() < blanches/total:
        blanches -= 1
        liste_X.append(k)
    total -= 1
print(liste_X)
```

2. Il est évident que $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = 0$ si $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N$. Supposons que $i < j$ et notons B_k l'événement "on a tiré une boule blanche au k-ème tirage. Puisque $[X_1 = i] \cap [X_2 = j] = \overline{B_1} \cap \dots \overline{B_{i-1}} \cap B_i \cap \overline{B_{i+1}} \cap \dots \overline{B_{j-1}} \cap B_j$, on obtient par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) &= \frac{N-2}{N} \times \dots \times \frac{N-i}{N-i+2} \times \frac{2}{N-i+1} \times \frac{N-i-1}{N-i} \times \dots \times \frac{N-j+1}{N-j+2} \times \frac{1}{N-j+1} \\ &= \frac{2(N-2)!}{N!} = \frac{2}{N(N-1)}. \end{aligned}$$

3. a. On obtient les lois marginales en appliquant la formule des probabilités totales avec les systèmes complets d'événements $([X_1 = i])_{1 \leqslant i \leqslant N-1}$ et $([X_2 = j])_{2 \leqslant j \leqslant N}$:

$$\forall i \in [\![1, N-1]\!],\ P(X_1 = i) = \sum_{j=2}^{N} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \sum_{j=i+1}^{N} \frac{2}{N(N-1)} = \frac{2(N-i)}{N(N-1)},$$

$$\forall j \in [\![2, N]\!],\ P(X_1 = j) = \sum_{i=1}^{N-1} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} = \frac{2(j-1)}{N(N-1)},$$

b. Puisque $P(X_1 = i) \neq 0$ et $P(X_2 = j) \neq 0$ mais $P([X_1 = 2] \cap [X_2 = 2]) = 0$, on en déduit que les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

4. Pour tout $i \in [\![1, N-1]\!],\ N+1-i \in [\![2, N]\!]$ et $P(N+1-X_2 = i) = P(X_2 = N+1-i) = \dfrac{2(N-i)}{N(N-1)} = P(X_1 = i)$. On en déduit que la variable $N+1-X_2$ a la même loi que X_1.

5. a. En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet $([A = i])_{1 \leqslant i \leqslant N}$, on a :

$$P(D) = P(A \neq B) = 1 - P(A = B) = 1 - \sum_{i=1}^{N} P([A = i] \cap [B = i]) = 1 - \sum_{i=1}^{N} P(A = i)P(B = i) = \frac{N-1}{N}.$$

b. Soit $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$. Si $i \geqslant j,\ P_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = 0$. Sinon :

$$P_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = P_D([A = i] \cap [B = j]) + P_D([A = j] \cap [B = i]) = \frac{2}{N(N-1)}.$$

c. Sachant l'événement D, le couple de variables (Y_1, Y_2) suit la même loi que (X_1, X_2). Il suffit donc de simuler la réalisation d'une variable A puis celle d'une variable B ne prenant pas la même valeur que A.

Corrigé de l'exercice de la planche 92

1. $J(x) = \arctan(x)$.

2. $\forall k \in \mathbb{N},\ I_k(x) = \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\right)$ est continue sur $[-1,1]$ donc $J_n(x)$ est bien défini et :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^k \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = J_n(x).$$

4.
```python
def J(n,x):
    s = 0
    for k in range(0, n+1):
        s += (-1)**k * x**(2*k+1)/(2*k+1)
    return s
```

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$.

$$|J(x) - J_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

On peut montrer que le résultat est encore vrai pour $x \in [-1,0]$.

6. Le théorème d'encadrement assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n(x) = J(x) = \arctan(x)$.

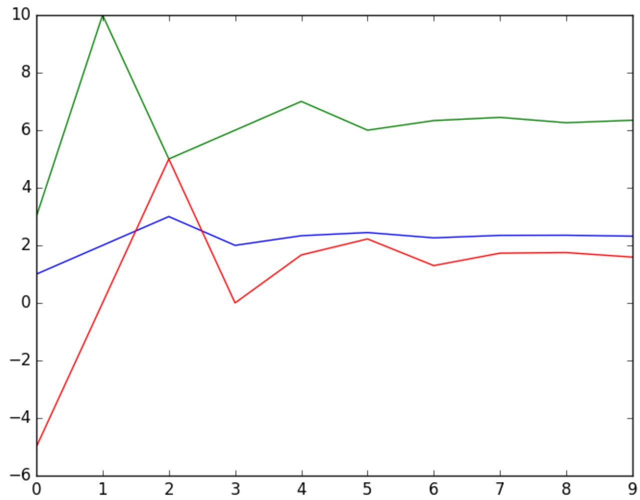
7.
```python
def approx_arctan(x):
    n = 4999
    return J(n,x)
```

8. Le résultat n'est pas valable pour $x \notin [-1,1]$ comme le montre l'exemple

```python
import numpy as np

print(approx_arctan(1.01) - np.arctan(1.01))
# réponse : -8.17874672397e+38
```

Corrigé de l'exercice de la planche 93

1.
```
import matplotlib.pyplot as plt

def liste_u(n, liste3):
    u = liste3
    for k in range(0, n-3):
        u.append((u[k]+u[k+1]+u[k+2])/3)
    return u

n = 10
abs = [k for k in range(n)]
for liste3 in [[1,2,3], [3,10,5], [-5,0, 5]]:
    plt.plot(abs, liste_u(n, liste3))
plt.show()
```



2. Puisque A n'est pas inversible (on peut lire son rang : 3), 0 n'est pas valeur propre de A.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda-3\lambda^2 \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\lambda \\ 0 & 1 & 1+\lambda-3\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-3\lambda \\ 0 & 1 & 1+\lambda-3\lambda^2 \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$$

où $Q(\lambda) = 1+\lambda+\lambda^2-3\lambda^3$.

On en déduit que λ est une valeur propre de A si, et seulement si, λ est solution de l'équation $x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.

4. Remarquons que $Q(1) = 0$. Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $Q(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$. Après calculs, on trouve : $a = -3$, $b = -2$ et $c = -1$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{C}$, $Q(x) = -(x-1)(3x^2+2x+1) = -3(x-1)(x-z)(x-\overline{z})$ où $z = \dfrac{-2-2i\sqrt{2}}{6} = \dfrac{-1-i\sqrt{2}}{3}$. Remarquons que $|z| < 1$. La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable et il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tel que :

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} \end{pmatrix}P^{-1}.$$

5. Pour tout entier naturel n, on a immédiatement $X_{n+1} = AX_n$ et (par récurrence immédiate) $X_n = A^n X_0$.

6. D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^n & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z}^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Par opérations sur les matrices, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + bz^n + c\overline{z}^n$.

7. L'inégalité triangulaire permet d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |bz^n + c\overline{z}^n| \leqslant |b||z|^n \leqslant |c||\overline{z}|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|z| = |\overline{z}| < 1$.

Puisque $|\mathrm{Re}(bz^n + c\overline{z}^n)| \leqslant |bz^n + c\overline{z}^n|$ et $|\mathrm{Im}(bz^n + c\overline{z}^n)| \leqslant |bz^n + c\overline{z}^n|$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(bz^n + c\overline{z}^n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(bz^n + c\overline{z}^n) = 0$.

8. On déduit des deux questions précédentes que la suite (u_n) converge vers a. Puisque la suite est à valeurs réelles, il vient que $a \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice de la planche 94

1. a.
```python
import random as rd
n = 1000 # nombre de simulations
compteur = 0
for k in range(n):
    x1 = rd.random()
    x2 = rd.random()
    if x1 + x2 <= 1:
        compteur += 1
print(compteur/n) # réponse : 0.486
```

b. Les événement $[X_1 \leqslant X_2]$ et $[X_2 < X_1]$ sont complémentaires donc $P(X_1 \leqslant X_2) + P(X_2 < X_1) = 1$. Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes à densité, la variable $X_1 - X_2$ est à densité. Ainsi $P(X_1 - X_2 = 0) = 0$, i.e. $P(X_1 = X_2) = 0$. On en déduit que $P(X_1 \leqslant X_2) + P(X_2 \leqslant X_1) = 1$.

c. Par symétrie des rôles de X_1 et X_2, il vient que $P(X_1 \leqslant X_2) = P(X_2 \leqslant X_1) = \dfrac{1}{2}$.

d. En étudiant la fonction de répartition de $1 - X_2$, on retrouve celle de X_2. Ainsi $1 - X_2$ suit la même loi que X_2, i.e. la loi uniforme sur $[0, 1]$. On en déduit que :

$$P(Z \leqslant 1) = P(X_1 + X_2 \leqslant 1) = P(X_1 \leqslant 1 - X_2) = P(X_1 \leqslant X_2) = \frac{1}{2}.$$

Montrer que $1 - X_2$ et X_2 ont la même loi. En déduire la valeur exacte de $P(Z \leqslant 1)$.

e. La probabilité de l'événement $[Z \leqslant 1]$, i.e. de $[X_1 + X_2 \leqslant 2]$ est le quotient de l'aire du triangle défini par les droites d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $x + y \leqslant 1$ et du carré $[0, 1]^2$, i.e. $\dfrac{1}{2}$.

2. a. Puisque $X_1^2(\Omega) = [0, 1]^2$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P(X_1^2 \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ P(X_1 \leqslant \sqrt{t}) = \sqrt{t} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant t > 1. \end{cases}$$

La fonction de répartition de X_1^2 est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1, donc la variable aléatoire X_1^2 est à densité dont une densité est :

$$f_{X_1^2} : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b. $T(\Omega) = [0, 2]$. Puisque X_1^2 et X_2^2 sont des variables indépendantes à densité, T est une variable à densité et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1^2}(t) f_{X_2^2}(x - t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque :

$$f_{X_1^2}(t) f_{X_2^2}(x - t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leqslant 1 \\ 0 < x - t \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leqslant 1 \\ x - 1 \leqslant t < x \end{cases}$$

on a, pour tout $x \in]0, 1]$, $f_T(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{4\sqrt{t}\sqrt{x - t}}$.

c. Soit $x \in]0, 1]$. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{t}{x}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, x[$. Ainsi, en posant $u = \dfrac{t}{x}$, on a $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$ et, par changement de variable :

$$I_x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{x - t}} \underset{u = \frac{t}{x}}{=} \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}u}{\sqrt{xu}\sqrt{x - xu}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\sqrt{1 - u}} = I_1.$$

d. Puisque $T(\Omega) = [0, 2]$, on a :

$$P(T \leqslant 1) = \int_0^1 f_T(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 I_1\,\mathrm{d}x = \frac{I_1}{4}.$$

```
n = 100000 # nombre de simulations
p = 0
for k in range(n):
    x1 = rd.random()
    x2 = rd.random()
    if x1**2 + x2**2 <= 1:
        p += 1
p = p/n
print(4*p) # réponse : 3.14488
```

Corrigé de l'exercice de la planche 95

1. a. $I_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $u : t \mapsto (1-t^2)^n$ et $v : t \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par intégration par parties, on a :

$$I_n = \left[t(1-t^2)^n\right]_0^1 + \int_0^1 2nt^2(1-t^2)^{n-1}\,\mathrm{d}t = 2n\int_0^1 (1-(1-t^2))(1-t^2)^{n-1}\,\mathrm{d}t = 2nI_{n-1} - 2nI_n.$$

On en déduit que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$.

b.

```python
def I(n):
    i = 1
    for k in range(1,n+1):
        i *= 2*k/(2*k+1)
    return i
```

```python
def S(n):
    s = 0
    for k in range(n+1):
        s += I(k)/(2**(k+1))
    return 4*s
```

On remarque que $S(10)$ semble être une approximation de π : `S(10) = 3.141106021601377`.

2. a. Soit t un réel positif et n un entier naturel. Puisque $\dfrac{1-t^2}{2} \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^2)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1-t^2}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}.$$

b. L'égalité précédente est une égalité de fonction continues sur $[0,1]$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (1-t^2)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

c'est-à-dire :

$$\pi - S_n = \frac{1}{2^{n-1}}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

c. Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $0 \leqslant \dfrac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \leqslant 1$. Par croissance de l'intégrale, on a : $0 \leqslant \pi - S_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

3. Il suffit de choisir une valeur de n suffisamment grande pour que $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ soit inférieur à `eps`.

```python
def approx(eps):
    n = 0
    while 2**(-n+1) > eps:
        n += 1
    return S(n)
```

Corrigé de l'exercice de la planche 96

1. Le premier tirage s'effectue dans l'urne N, la loi de X_1 est donc la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$.
2.

```python
import random as rd

def simulation(N):
    compteur = 1
    tirage = rd.randint(1,N)
    while tirage != 1:
        tirage = rd.randint(1, tirage)
        compteur += 1
    return compteur
```

3. Soient k un entier naturel non nul et $i \in [\![1, N]\!]$. Puisque $X_k(\Omega) \subset [\![1, N]\!]$, la famille $([X_k = j])_{j \in [\![1,N]\!]}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{N} P(X_{k+1} = i, X_k = j).$$

Puisque $P(X_{k+1} = i, X_k = j) = 0$ si $j < i$, et la loi conditionnelle de X_{k+1} sachant $[X_k = j]$ est la loi uniforme sur $[\![1, j]\!]$, on en déduit que :

$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=i}^{N} P_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) P(X_k = j) = \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j).$$

4.
   - Le résultat est trivial pour $k = 1$: la suite $(P(X_1 = i))_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est constante.
   - Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On a :

$$\forall i \in [\![1, N-1]\!],\ P(X_k = i+1) - P(X_k = i) = \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{j} P(X_{k-1} = j) - \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{j} P(X_{k-1} = j) = -\frac{1}{i} P(X_{k-1} = i) \leqslant 0,$$

   ce qui conclut la démonstration.

5. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$P(X_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j) = P(X_k = 1) + \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j) \geqslant P(X_k = 1).$$

La suite $(P(X_k = 1))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante. Puisqu'elle est majorée par 1, elle converge vers un réel ℓ inférieur ou égal à 1.

b. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall j \in [\![2, N]\!],\ \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{j} P(X_k = j) \geqslant \frac{1}{N} \sum_{j=2}^{N} P(X_k = j) = \frac{1}{N} (1 - P(X_k = 1))$$

' Ainsi :

$$P(X_{k+1} = 1) \geqslant P(X_k = 1) + \frac{1}{N}\Big(1 - P(X_k = 1)\Big).$$

c. Par passage à la limite, on a $\ell \geqslant \ell + \dfrac{1}{N}(1 - \ell)$, i.e. $\ell \geqslant 1$. Puisque $\ell \leqslant 1$, on en déduit que $\ell = 1$.

L'événement "tous les tirages donnent un numéro différent de 1" est donc quasi-impossible, i.e. de probabilité nulle.

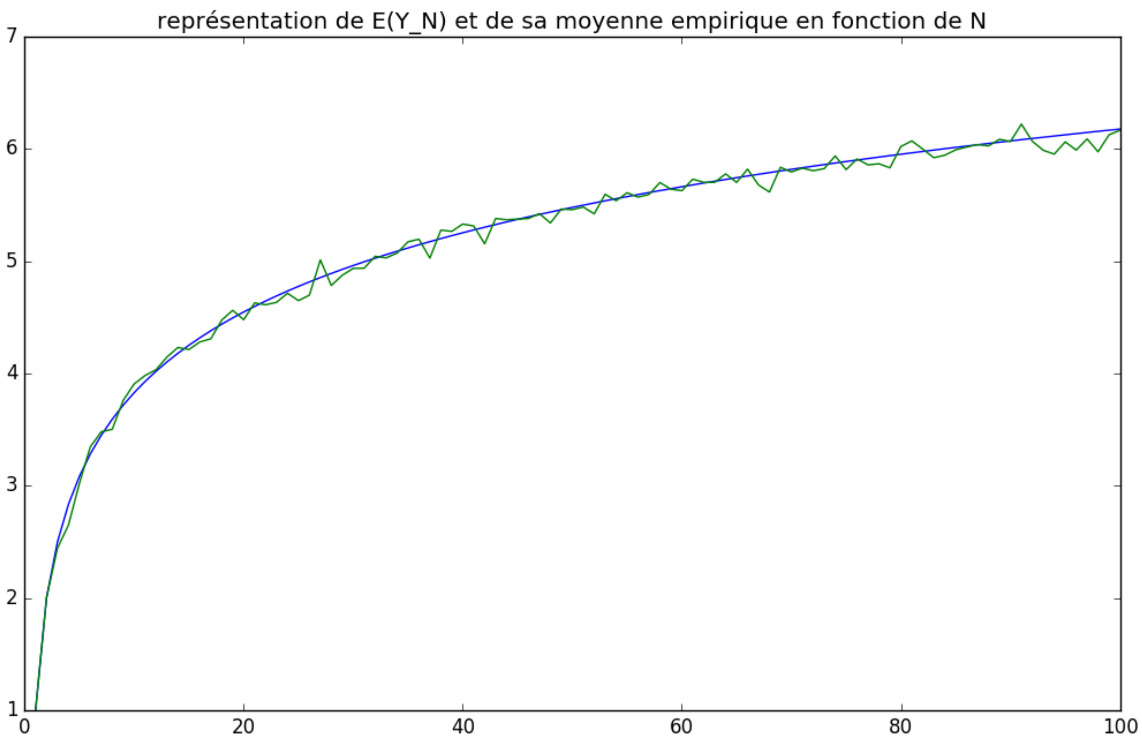
6. On sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{i=2}^{N} P(X_k = i) = 1 - P(X_k = 1).$$

Par passage à la limite et positivité des probabilités, il vient que, pour tout $i \in [\![2, N]\!]$, $\lim_{k \to +\infty} P(X_k = i) = 0$.

7.

```python
N_max = 100
nb_simulations = 1000 # nb de simulations
abs = [1]
esp = [1]
moyenne = [1]
s = 1
for N in range(2, N_max+1):
    abs.append(N)
    s += 1/(N-1)
    esp.append(s)
    y = 0
    for i in range(nb_simulations):
        y += simulation(N)
    moyenne.append(y/nb_simulations)
plt.ion()
plt.plot(abs, esp)
plt.plot(abs, moyenne)
plt.title("représentation de E(Y_N) et de sa moyenne empirique en fonction de N")
plt.show()
```



Corrigé de l'exercice de la planche 97

1. a. Trivialement, $u_1 = (1-p)^2$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons X le nombre de descendants de la fleur initiale. La famille d'événements $([X = k])_{0 \leqslant k \leqslant 2}$ forme donc un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(E_{n+1}) = P(X=0)P_{[X=0]}(E_{n+1}) + P(X=1)P_{[X=1]}(E_{n+1}) + P(X=2)P_{[X=2]}(E_{n+1}).$$

   - $P(X=0) = (1-p)^2$ et $P_{[X=0]}(E_{n+1}) = 1$;
   - $P(X=1) = 2p(1-p)$ et $P_{[X=1]}(E_{n+1}) = P(E_n)$ par translation à la seule fleur de la génération 1;
   - $P(X=2) = p^2$ et $P_{[X=2]}(E_{n+1}) = P(E_n)^2$ par translation du problème aux deux fleurs (indépendantes) de la génération 1.

   On en déduit que $u_{n+1} = (1-p)^2 + 2p(1-p)u_n + p^2u_n^2 = ((1-p)+pu_n)^2$.

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E_n \subset E_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante. Puisqu'elle est majorée (par 1), elle converge vers un réel $\ell \leqslant 1$. Par passage à la limite de la formule de récurrence, on obtient $\ell = ((1-p)+p\ell)^2$, soit $p^2\ell^2 + \left(-2p^2+2p-1\right)\ell + (1-p)^2 = 0$. Les solutions de cette équation sont 1 et $\dfrac{(1-p)^2}{p^2}$.

   - Supposons que $p \leqslant \dfrac{1}{2}$. Dans ce cas $\dfrac{(1-p)^2}{p^2} \geqslant 1$. La seule limite possible pour (u_n) est donc 1. On en déduit dans ce cas que la population a tendance s'éteindre.
   - Supposons que $p > \dfrac{1}{2}$. Dans ce cas $0 \leqslant \dfrac{(1-p)^2}{p^2} < 1$.
     Dressons le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto ((1-p)+px)^2$ sur $[0,1]$:

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & 0 & & \dfrac{(1-p)^2}{p^2} & & 1 \\
\hline
 & & & & & 1 \\
f(x) & & & \dfrac{(1-p)^2}{p^2} & \nearrow & \\
 & (1-p)^2 & \nearrow & & & \\
\hline
\end{array}$$

     Puisque l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{(1-p)^2}{p^2}\right]$ est stable par f et $u_1 = (1-p)^2 \in I$ et p, on obtient par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left[0, \dfrac{(1-p)^2}{p^2}\right]$. La suite (u_n) est donc croissante et convergente vers $\dfrac{(1-p)^2}{p^2}$.
     Ainsi, la population tend à s'éteindre avec la probabilité $\dfrac{(1-p)^2}{p^2}$.

2.

```python
import random as rd

def descendance(p):
    s = 0
    for k in range(2):
        if rd.random() < p:
            s += 1
    return s

def generation(n, p):
    nb_fleurs = 1
    for k in range(n):
        s = 0
        for k in range(nb_fleurs):
            s += descendance(p)
        nb_fleurs = s
    return nb_fleurs
```

```python
def freq_extinction(p):
    nb_simulations = 50
    extinctions = 0
    for k in range(nb_simulations):
        if generation(20, p) == 0:
            extinctions += 1
    return extinctions/nb_simulations

## Tests
p1 = 0.4
p2 = 0.9
print(freq_extinction(p1)) # 0.98

print(freq_extinction(p2)) # 0.01
print((1-p2)**2/(p2**2)) # 0.0123
```

Corrigé de l'exercice de la planche 98

1. Chaque souris jeune donne naissance à une souris jeune et chaque souris adulte donne naissance à huit souris jeunes, d'où : $j_{n+1} = j_n + 8a_n$. Un souris jeune sur quatre devient adulte, d'où : $a_{n+1} = 0,25j_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \begin{pmatrix} j_n + 8a_n \\ 0,25j_n + 0a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = LS_n \text{ où } L = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ S_n = L^n S_0$ (récurrence immédiate).

3. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{rg}(L - \lambda I_2) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0,25 & -\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -4\lambda \\ 1-\lambda & 8 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -4\lambda \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

où $P(\lambda) = 8 - (1-\lambda)(-4\lambda) = -4(\lambda^2 - \lambda - 2) = -4(\lambda+1)(\lambda-2)$.
La matrice $L \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes, -1 et 2, elle est donc diagonalisable.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
$LX = -X \Leftrightarrow x + 4y = 0 \Leftrightarrow x = -4y$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(L + I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
$LX = 2X \Leftrightarrow x - 8y = 0 \Leftrightarrow x = 8y$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(L + I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
En posant $U_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que (U_1, U_2) est une base de vecteurs propres de L.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ L^n U_1 = (-1)^n U_1$ et $L^n U_2 = 2^n U_2$. Puisque $S_0 = \lambda U_1 + \mu U_2$, on a, d'après la question 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \lambda(-1)^n U_1 + \mu 2^n U_2.$$

4. a.

```
def generations():
    j, a = 20, 0
    liste_j, liste_a = [20], [0]
    for k in range(1, 11):
        j, a = j + 8*a, 0.25*j
        liste_j.append(j)
        liste_a.append(a)
    return liste_j, liste_a
```

```
def generations_bis():
   jeune, adulte = [20], [0]
   for k in range(10):
      jeune.append(jeune[k] + 8*adulte[k])
      adulte_a.append(0.25*jeune[k])
   return jeune, adulte
```

b. $S_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} = -\dfrac{5}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{5}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $\lambda = -\dfrac{5}{3},\ \mu = \dfrac{5}{3}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = S_n = -\dfrac{5}{3}(-1)^n \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{5}{3}2^n \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$,
i.e. $j_n = \dfrac{20}{3}(-1)^n + \dfrac{40}{3}2^n$ et $a_n = -\dfrac{5}{3}(-1)^n + \dfrac{5}{3}2^n$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ t_n = j_n + a_n = 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n$.

d. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n = 0$, on en déduit que $(-1)^n \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$ puis $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 15 \times 2^n$.
Ainsi : $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{15 \times 2^{n+1}}{15 \times 2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$. La population totale de souris tend à doubler chaque année.

e. De la même manière, $j_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{40}{3}2^n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{5}{3}2^n$ Ainsi : $\dfrac{j_n}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 8$.
Après un grand nombre d'années, il y aura huit fois plus de souris jeunes que de souris adultes.

Corrigé de l'exercice de la planche 99

(i) Supposons A diagonalisable. Alors A a nécessairement une ou deux valeurs propres. Si A n'avait qu'une seule valeur propre λ, il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $A = P\lambda I_2 P^{-1} = \lambda I_2$, ce qui est impossible étant donné les coefficients de A. On en déduit que si la matrice A est diagonalisable alors elle admet deux valeurs propres distinctes. Réciproquement, cette condition est suffisante pour assurer la diagonalisabilité de A.

$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ y & 2x-\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -\lambda \\ 2x-\lambda & y \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -\lambda \\ 0 & y-(2x-\lambda)\lambda \end{pmatrix}$$

Le réel λ est valeur propre de A si, et seulement si $y-(2x-\lambda)\lambda = 0$ $\left(\Leftrightarrow \lambda^2 - 2x\lambda + y = 0\right)$.

Ainsi A est diagonalisable si, et seulement si, l'équation du second degré précédente admet deux solutions distinctes, i.e. si, et seulement si son discriminant est strictement positif, i.e. $4x^2 - 4y > 0$, soit $x^2 - y > 0$.

(ii) a. On rappelle que la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$ est la fonction :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminons la fonction F_{X^2} de répartition de la variable aléatoire X^2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x < 0$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = 0$ car $X(\Omega) = [0,1]$. Si $x \geq 0$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = P(X \leq \sqrt{x})$ car $X(\Omega) = [0,1]$. La fonction de répartition de la variable X^2 est la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La fonction de répartition F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points (0 et 1), donc X^2 est une variable à densité et $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$ en est une densité.

La variable aléatoire $-Y$ suit une loi uniforme sur $[-1,0]$ (la vérification est immédiate). On en déduit que la fonction $g = \mathbf{1}_{[-1,0]}$ est une densité de $-Y$.

b. Puisque X et Y sont indépendantes, alors X^2 et $-Y$ le sont aussi.
Ainsi X^2 et $-Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes à densité, donc leur somme est une variable aléatoire à densité, dont une densité h est donnée par le produit de convolution des fonctions f et g.

$$\forall z \in \mathbb{R}, h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)\mathbf{1}_{[-1,0]}(z-x)\,\mathrm{d}x$$

Or :

$$(S)\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq z-x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ z \leq x \leq z+1 \end{cases}$$

- Si $-1 \leq z \leq 0$, $(S) \Leftrightarrow 0 \leq x \leq z+1$ et :
$$h(z) = \int_0^{z+1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{z+1}.$$
- Si $0 \leq z \leq 1$, $(S) \Leftrightarrow z \leq x \leq 1$ et :
$$h(z) = \int_z^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 1 - \sqrt{z}.$$
- sinon, pour toute autre valeur de z, (S) n'admet pas de solution et $h(z) = 0$.

(iii) Puisque $P(X^2 - Y > 0) = \int_0^{+\infty} h(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (1-\sqrt{z})\,\mathrm{d}z = \left[x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$, on en déduit, d'après la première question, la probabilité que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice de la planche 100

1. a. Sachant $[U_n = k]$, i.e. sachant qu'il y a k cellules pathogènes actives en suspension à l'instant $n\delta t$, X_n suit la loi binomiale de paramètres k et α. En effet, X_n est le nombre de succès ("une cellule se divise") lors de la répétition de k expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre α (la probabilité qu'une cellule se divise).

   La série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} iP_{[U_n=k]}(X_n = i)$ converge car, pour tout $i > k$, $P_{[U_n=k]}(X_n = i) = 0$. Sa somme est par définition l'espérance de cette loi conditionnelle de X_n sachant $[U_n = k]$. Ainsi $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} iP_{[U_n=k]}(X_n = i) = k\alpha$.

   b. Commençons par remarquer que X_n et U_n admettent une espérance car ce sont des variables aléatoires finies (majorées par $2^n \times N$). Toutes les sommes considérées sont donc à support fini.

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{i=0}^{+\infty} iP(X_n = i)\\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} i\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(U_n = k)P_{[U_n=k]}(X_n = i)\right) \quad \text{(formule des probabilités totales - } ([U_n = k])_{k\in\mathbb{N}} \text{ s.c.e.)}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} iP_{[U_n=k]}(X_n = i)\right) P(U_n = k) \quad \text{(intervertion possibles car les sommes sont à support fini)}\\
&= \alpha E(U_n).
\end{aligned}$$

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il vient immédiatement que, $U_{n+1} = U_n + X_n$: chaque cellule qui se divise entre les instants $n\delta t$ et $(n+1)\delta t$ ajoute une cellule active supplémentaire aux cellules actives à l'instant $n\delta t$. Par linéarité de l'espérance, on obtient $E(U_{n+1}) = E(U_n) + E(X_n) = (1+\alpha)E(U_n)$. On en déduit que, $E(U_n) = (1+\alpha)^n E(U_0) = (1+\alpha)^n N$.

   d. On peut estimer que $E(U_{200}) \approx 4000$, soit $\alpha \approx \sqrt[200]{400} - 1 \approx 0,03$.

2. a. Par analogie avec ce qui précède, la loi conditionnelle de Y_n sachant $[U_n = k]$ est la loi $\mathcal{B}(k, \beta)$ et celle de de X_n est la loi $\mathcal{B}(k, \alpha(1-\beta))$. Toujours avec la même analogie, on trouve $E(Y_n) = \beta E(U_n)$ et $E(X_n) = \alpha(1-\beta)E(U_n)$. Puisque $U_{n+1} = U_n + X_n - Y_n$, on obtient, par linéarité de l'espérance $E(U_{n+1}) = (1 + \alpha(1-\beta) - \beta)E(U_n)$, i.e. $E(U_{n+1}) = (1+\alpha)(1-\beta)E(U_n)$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(U_n) = (1+\alpha)^n(1-\beta)^n N$.

   b. L'infection est enrayée lorsque la suite $(E(U_n))_n$ converge vers 0, i.e. lorsque $(1+\alpha)(1-\beta) < 1$.

3.
```python
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulations(N, alpha, beta):
    for k in range(10): # on réalise dix simulations
        u, n_liste, u_liste = N, [0], [N]
        for n in range(200): # nombre d'instants
            for i in range(u): # pour chaque cellule
                if rd.random() < beta:
                    u -= 1 # cellule neutralisée
                elif rd.random() < alpha:
                    u += 1 # cellule dupliquée
            n_liste.append(n)
            u_liste.append(u)
        plt.plot(n_liste, u_liste)
    plt.show()

## Tests
simulations(10,0.03, 0.029)
simulations(10,0.03, 0.05)
simulations(10,0.03, 0.01)
```

Corrigé de l'exercice de la planche 101

Partie 1 : définition d'une fonction.

1. Le polynôme P_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $P_t'(x) = 3x^2 + 2tx = x(3x + 2t)$. La fonction P_t est donc strictement croissante sur $I = \left]-\infty, -\dfrac{2t}{3}\right]$ et $[0, +\infty[$, et décroissante sur $\left[-\dfrac{2t}{3}, 0\right]$. Puisque $P_t(0) = 1$, on peut appliquer le théorème de la bijection sur I (par continuité sur cet intervalle). Le polynôme P_t admet donc une unique racine que l'on notera $r(t)$.

Partie 2 : ébauche de la courbe de la fonction r.

2. Le point d'intersection du graphe de P_2 avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(r(2), 0)$. Le symétrique de ce point par rapport à la première bissectrice a pour coordonnées $(0, r(2))$. On peut donc construire le point de coordonnées $(2, r(2))$ sur la figure 1 comme l'image par la symétrie par rapport à la première bissectrice puis par la translation horizontale de vecteur $2\vec{i}$.

3. a. On peut conjecturer (et retrouver immédiatement par le calcul) que $r(0) = -1$: $x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
   b. On peut conjecturer que $r(t) \leqslant -1$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
   Remarquons que $P_t(-1) = t \geqslant 0$. La fonction P_t étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que P_t s'annule en un réel inférieur ou égal à -1, i.e. $r(t) \leqslant -1$.
   c. On peut conjecturer que $r(t)$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.
   On sait que $r(t)^2 \geqslant 1$ et $P_t(r(t)) = 0$, i.e. $r(t)^3 + tr(t)^2 + 1 = 0$. Ainsi $r(t)^3 = -1 - tr(t)^2 \leqslant -t$.
   Par comparaison de limites, $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)^3 = -\infty$, i.e. $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t) = -\infty$.
   d. On peut conjecturer que la courbe d'équation $y = -x$ est une branche infinie de la courbe de r en $+\infty$.
   En effet, puisque $r(t)^3 + tr(t) + 1 = 0$, il vient que $r(t)^2\,(r(t) + t) = -1$ puis $r(t) + t = \dfrac{-1}{r(t)^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui conclut la démonstration.

4. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Soit $y \in]-\infty, -1[$.

$$y = r(t) \Leftrightarrow P_t(y) = P_t(r(t)) y^3 + ty^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow ty^2 = -1 - t^3 \Leftrightarrow t = \frac{-1 - y^3}{y^2}$$

   La fonction r réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty, -1]$, et sa réciproque est la fonction définie sur $]-\infty, -1]$ par $s : y \mapsto \dfrac{-1 - y^3}{y^2}$.

5. Puisque la fonction s est continue sur $]-\infty, -1]$, sa réciproque, i.e. la fonction r, est continue sur $\mathbb{R}^+$. Puisque la fonction s est décroissante sur $]-\infty, -1]$, la fonction r est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Partie 3 : approche informatique.

6. L'idée ici est de réaliser une recherche dichotomique. On peut vérifier que, pour tout $t \geqslant 0$, $-2t \leqslant r(t) \leqslant 0$, initialisant les valeurs `a` et `b` de l'algorithme.

```
def r(t,n):
    a, b = -2*t, 0
    while b - a > 2*10**(-n):
        c = (a+b)/2
        if c**3 + t*c**2 + 1 < 0:
            a = c
        else:
            b = c
    return (a+b)/2
```

7.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
t_array = np.arange(0,10.1,0.1)
y_list = [r(t,3) for t in t_array]
plt.ion()
plt.plot(t_array, y_list)
plt.show()
```

Corrigé de l'exercice de la planche 102

1. a. La linéarité est triviale car héritée de celle des opérateurs de dérivation première et seconde. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a : $(X-X^2)P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(1-2X)P' \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. L'application Φ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. La matrice de l'endomorphisme Φ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -6 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -n(n+1) \end{pmatrix}$$

   b. Le spectre de Φ se lit sur la matrice triangulaire M : $\mathrm{Sp}(\Phi) = \{-k(k+1) \mid k \in [\![0,n]\!]\}$.
   L'endomorphisme Φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes. Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, l'endomorphisme Φ est diagonalisable.

   c. L'application Φ n'est pas bijective car 0 est valeur propre de Φ.

2. a. Puisque le monôme de plus haut degré de T_p est $(-1)^p X^{2p}$, celui de L_p est $\dfrac{(-1)^p}{p!}\dfrac{(2p)!}{p!}X^p$. Le polynôme L_p est donc de degré p et son coefficient dominant est égal à $(-1)^p\binom{2p}{p}$.

   b. En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$T_p = X^p(1-X)^p = X^p\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-X)^k\right) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}X^{k+p}.$$

   On en déduit que :

$$L_p = \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\frac{(k+p)!}{k!}X^k. = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{p+k}{k}X^k.$$

   Ainsi :

$$\forall k \in [\![0,p]\!], a_{k,p} = (-1)^k\binom{p}{k}\binom{p+k}{k}.$$

   c. Pour tout $k \in [\![0,p-1]\!]$, on trouve $a_{k+1,p} = -\dfrac{(p-k)(p+k+1)}{(k+1)^2}a_{k,p}$. De plus $a_{0,p} = 1$.

   d.

```python
def coeffLp(p):
    liste = [1]
    a = 1
    for k in range(1,p+1):
        a *= -(p+k)*(p-k+1)//(k**2)
        liste.append(a)
    return liste

## Tests :
print(coeffLp(0)) # réponse : [1]
print(coeffLp(1)) # réponse : [1, -2]
print(coeffLp(2)) # réponse : [1, -6, 6]
```

   e. D'après la question précédente, $L_0 = 1$, $L_1 = 1-2X$ et $L_2 = 1-6X+6X^2$.
   À la lecture de M, on trouve immédiatement que $\Phi(L_0) = 0$ et $\Phi(L_1) = -2L_1$.
   Après calculs, on trouve que $\Phi(L_2) = -6L_2$.
   Les vecteurs L_0, L_1 et L_2 sont donc trois vecteurs propres de l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_2[X]$. Puisque $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, (L_0, L_1, L_2) est bien une base de vecteurs propres de Φ.

Corrigé de l'exercice de la planche 103

1. On trouve immédiatement que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Pour tout $t < 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant t) = 0$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(\ln(1-U) \geqslant -\lambda t) = \mathbb{P}(1-U \geqslant e^{-\lambda t}) = \mathbb{P}(U \leqslant 1 - e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ car } 1 - e^{-\lambda t} \in [0,1[.$$

   On reconnait une fonction de répartition usuelle : X suit donc la loi exponentielle de paramètre λ.

2. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n est à densité et que f_n est une densité de S_n.

   - $S_1 = X_1$ est une variables à densité suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On reconnait immédiatement f_1 comme une densité de S_1.
   - Soit $n \geqslant 1$. Supposons que S_n est à densité et que f_n est une densité de S_n.
     Remarquons que $S_{n+1} = X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1} = S_n + X_n$. Puisque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, les variables aléatoires à densité S_n et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions. On en déduit que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ est une variable à densité, dont une densité est :

$$g : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) f(z-x)\,\mathrm{d}x \quad \text{où } f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ est une densité de } X_{n+1}.$$

     Soit $z \in \mathbb{R}$.

$$f_n(x)f(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ z - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < z$$

     Si $z \leqslant 0$, $g(z) = 0 = f_n(z)$. Sinon, $z > 0$ et on a :

$$g(z) = \int_0^z \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda(z-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} \int_0^z x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda e^{-\lambda z}(\lambda z)^n}{n!} = f_{n+1}(z).$$

     On en déduit que f_{n+1} est une densité de S_{n+1}, ce qui conclut la récurrence.

3. a. Pour tout $n \geqslant 0$, l'événement $[N_t \geqslant n]$ est réalisé si, et seulement si, au moins n bus sont passés entre l'instant 0 et l'instant t, i.e. si, et seulement si, le n-ème bus est passé avant l'instant t. Ainsi : $\forall n \geqslant 0,\ [N_t \geqslant n] = [S_n \leqslant t]$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'égalité qui précède, on a : $[N_t = n] = [N_t \geqslant n] \setminus [N_t \geqslant n+1] = [S_n \leqslant t] \setminus [S_{n+1} \leqslant t]$.
   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant t)$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque S_n suit la loi de densité f_n, on a :

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant t) = \int_{-\infty}^t f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}x$$

   Les fonctions $u : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ et $v : x \mapsto \dfrac{\lambda^{n-1}x^n}{n!}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,t]$ et on a $u' : x \mapsto -\lambda^2 e^{-\lambda x}$ et $v' : x \mapsto \dfrac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$. On trouve par intégration par parties :

$$\mathbb{P}(S_n \leqslant t) = \left[\lambda e^{-\lambda x} \frac{\lambda^{n-1}x^n}{n!}\right]_0^t + \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda x} \frac{\lambda^{n-1}x^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant t).$$

   On en déduit alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(N_t = n) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$, i.e. N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.

4. a. Les variables `r` et `s` correspondent aux temps de passage de deux bus successifs. Les variables `u` et `v` correspondent respectivement au temps d'attente entre l'instant $T = 100$ et le bus qui le précède, et au temps de passage de deux bus successifs.

   b. Cela semble paradoxal, car les bus arrivent en moyenne toutes les dix minutes mais le temps moyen entre deux bus successifs est en moyenne de 20 minutes.

Corrigé de l'exercice de la planche 104

1. a. Il suffit de tirer au maximum `tmax` boules, et de mettre-à-jour le nombre de boules blanches en cas de tirage d'une boule blanche.

```
from random import random

def estimeProbaEchec(m, tmax):
    compteSucces = 0
    for i in range(m):
        b = 1
        succes = 0
        tirages = 0
        while succes == 0 and tirages < tmax:
            tirages += 1
            if random() <= 1/(b+1):
                succes = 1
            else:
                b = 2*b
        compteSucces += succes
    return compteSucces/m
```

b.

En exécutant le code ci-après, on trouve que la fréquence des boules noires tirées n'est pas égale à 1 (mais plutôt autour de 0,8). On conjecture donc que la probabilité de n'obtenir aucune boule noire n'est pas nulle.

```
for tmax in range(10000, 90000, 5000):
    print(estimeProbaEchec(100, tmax))
```

2. a. Soit n un entier naturel non nul. En notant A_{n+1} l'événement "on a tiré une boule blanche au $(n+1)$-ème tirage", on a immédiatement que $B_{n+1} = A_{n+1} \cap B_n$.
Puisqu'il y a 2^n boules blanches dans l'urne juste avant le $(n+1)$-ème tirage, on a :

$$u_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) = P(B_n) \times \frac{2^n}{1+2^n} = \frac{2^n}{1+2^n}u_n.$$

On en déduit que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.

b. La suite (u_n) est strictement positive et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^n}{1+2^n} < 1$. La suite (u_n) est donc strictement décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0, (u_n) converge vers un réel ℓ.

c. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} \leqslant 0$.
La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Puisque $f(0) = 0$, la fonction f est négative sur $\mathbb{R}^+$, i.e. pour tout réel $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$,
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$-\ln(u_n) = -\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+2^{-k}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+2^{-k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} \leqslant 2.$$

La suite $(-\ln(u_n))$ est croissante et majorée par 2, elle converge donc vers un réel inférieur ou égal à 2.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} [X = k] = \overline{B_n}$. Par σ-additivité, on a (l'union étant disjointe) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = 1 - P(B_n)$.
D'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant e^{-2}$. Par passage à la limite, on trouve $\ell \geqslant e^{-2}$.
La probabilité que la série de tirages s'arrête est donc inférieure à $1 - e^{-2}$. Ce n'est donc pas un événement quasi-certain.