Exercice.

1. Montrons le résultat par récurrence.

   Puisque l'intégrale de référence $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, la propriété est initialisée.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\Gamma(n)$ est une intégrale convergente. Une intégration par parties (les fonctions $u : t \mapsto -e^{-t}$ et $v : t \mapsto t^n$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$) montre que $\Gamma(n+1)$ converge et $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. La propriété est donc héréditaire.

   On en déduit qu'on que l'intégrale $\Gamma(n)$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n+1) = n\Gamma$.

   Une récurrence rapide montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$.

3. La fonction f_n est bien positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, donc sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. D'après la question 1, son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge par linéarité et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

   La fonction f_n est donc bien une densité.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Si Y suit la loi de Poisson de paramètre x, on a :

$$1 - \mathbb{P}(Y \leqslant n-1) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y = k) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} e^{-x}.$$

   On considère alors la fonction $g_n : x \mapsto 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^k}{k!} e^{-x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0,\ g_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} e^{-x} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} e^{-x} - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{x^i}{i!} e^{-x} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} = f_n(x).$$

   On a alors :

$$\forall x > 0,\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x g_n'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[g_n(t)\Big]_0^x = g_n(x) = 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant n-1).$$

Exercice.

1. Supposons A admet une unique valeur propre λ et que $A \neq \lambda I_n$. Supposons par l'absurde que A est diagonalisable. Il existerait alors une matrice inversible P telle que $A = P\lambda I_n P^{-1} = \lambda I_n$, ce qui est absurde.

   On en déduit donc que A n'est pas diagonalisable.

2. On distingue alors trois cas :

   - Si $a < 0$, la matrice réelle A n'admet pas de valeur propre réelle, elle n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Si $a > 0$, la matrice réelle A admet deux valeurs propres distinctes ($-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$). Puisque A est de taille 2, elle est diagonalisable.
   - Si $a = 0$, la matrice A admet une seule valeur propre : 0. Puisque $A \neq 0_2$, la matrice n'est pas diagonalisable d'après la question 1.

Exercice.

1. La linéarité ne pose aucun problème. On pourrait raisonner sur le degré de $\Phi(P)$ pour montrer que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, mais étant donné la question suivante, il est plus efficace de calculer l'image de la base canonique:
$$\Phi(1) = 0,\ \Phi(X) = 1 - 2X,\ \Phi\left(X^2\right) = -2X^2, \Phi\left(X^3\right) = -3X^2.$$
On en déduit alors l'image de Φ :
$$\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Vect}\left(\Phi(1), \Phi(X), \Phi\left(X^2\right), \Phi\left(X^3\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(1 - 2X, -2X^2, -3X^2\right) \subset \mathbb{R}_3[X].$$
On en déduit que Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. D'après les calculs précédents, la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Les valeurs propres de Φ sont celles de sa matrice A ; on peut les lire sur sa diagonale (A est triangulaire supérieure) : 0 et -2.

   Puisque $\operatorname{rg}(A) = 2$ et $\operatorname{rg}(A + 2I_4) = 2$, $\dim \operatorname{Ker} A = 2$ et $\dim \operatorname{Ker}(A + 2I_4) = 2$ d'après le théorème du rang. On en déduit alors que A - donc Φ - est diagonalisable (la somme des dimensions de ses espaces propres est égal à $4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$.

4. L'endomorphisme Φ n'est pas bijectif puisque 0 est valeur propre de Φ.

Exercice.

1. Remarquons que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{2^k}{3^{k+1}} \geqslant 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{k=0}^{N} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{2}{3}\right)^k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$
Il existe donc bien une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{2^k}{3^{k+1}}$.

2. Puisque $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :
$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = n, X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n - k, X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = n - k)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^n}{3^{n+2}} \\
&= (n + 1)\frac{2^n}{3^{n+2}}.
\end{aligned}$$

3. Le théorème du transfert nous amène à étudier la convergence (absolue) de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{1+n}\mathbb{P}(Z = n)$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{n=0}^{N} \left|\frac{1}{1+n}\mathbb{P}(Z = n)\right| = \sum_{n=0}^{N} \frac{2^n}{3^{n+2}} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{1}{3}.$$
On en déduit que S admet une espérance égale à $\dfrac{1}{3}$.

Exercice.

1.
$$\operatorname{rg} A(a) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1+a & -2+2a\\ 0 & 1-a & 2-2a\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1+a & -2+2a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} < 3.$$

La matrice $A(a)$ n'est donc pas inversible.

2. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases}(-1-a)x + y + az = 0\\ x - 2y + z = 0\\ ax + y + (-1-a)z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - 2y + z = 0\\ (-1-2a)y + (1+2a)z = 0\\ (1+2a)y + (-1-2a)z = 0\end{cases}$$

Si $a \neq -\dfrac{1}{2}$, on trouve que $E_3 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Si $a = -\dfrac{1}{2}$, on trouve que $E_3 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

3. On trouve que : $A(a)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $A(a)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = (2-2a)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

4. $A(a)$ est symétrique réelle donc diagonalisable.
Si $a = -\dfrac{1}{2}$, on a prouvé que 0 et 3 sont valeurs propres. On trouve que $P^{-1}A(a)P = D(a)$ où :

$$P = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } D(a) = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Sinon les réels 0, 3 et $2-2a$ sont valeurs propres de $A(1)$. On trouve que $P^{-1}A(a)P = D(a)$ où :

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } D(a) = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2-2a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Exercice.

1. Il y a $\binom{2n}{n}$ poignées différentes. Choisir une poignée contenant le numéro $i \in [\![1, n]\!]$ revient à choisir les $n-1$ boules restantes parmi les $2n-1$ boules. Ainsi la variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_i = \dfrac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.

2. La covariance existe bien puisque X_i et X_j sont finies (et donc admettent une variance). D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) - p_ip_j = \begin{cases}\dfrac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} - \left(\dfrac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}\right)^2 & \text{si } i \neq j\\[2ex] \dfrac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} - \left(\dfrac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}\right)^2 & \text{si } i = j\end{cases}$$

Calculer $\operatorname{Cov}(X_i, X_j)$ pour tous i et j compris entre 1 et n.

3. C'est du cours : la variable aléatoire Z suit la loi hypergéométrique de paramètres $2n$, n et $\dfrac{1}{2}$. Ainsi $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{n}{2}$.

Exercice.

1. Soit $x \neq 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En posant $u = \dfrac{t}{x}$, on a $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$. Le théorème de changement de variable assure alors que :
$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-(xu)^2} x\,\mathrm{d}u = xG(x).$$

2. Puisque la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que primitive de f sur $\mathbb{R}$).

   On en déduit que $G : x \mapsto \dfrac{F(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (par quotient) et :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ G'(x) = \frac{xF'(x) - F(x)}{x^2} = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2}.$$

3. Puisque la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, on a :
$$\forall x > 0,\ F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant xf(x),\ \text{ i.e. } G'(x) \leqslant 0.$$
   La fonction G est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Puisque $G(x) = G(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction G est paire et ainsi croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telles que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad X_k(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ et } \mathbb{P}(X_k = 1) = p, \quad \text{où } p \in]0,1[.$$
On note, pour n entier naturel non nul, $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ ainsi que $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

1. La loi de Y_2 est donnée par :
$$\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -1) = p^2 + (1-p)^2 \text{ et } \mathbb{P}(Y_2 = -1) = 1 - p^2 - (1-p)^2$$
   Puisque $([X_3 = 1], [X_3 = -1])$ forme un système complet d'événement, on trouve que :
$$\mathbb{P}(Y_3 = 1) = \mathbb{P}(X_3 = 1)\mathbb{P}(Y_2 = 1) + \mathbb{P}(X_3 = -1)\mathbb{P}(Y_2 = -1) = p^3 + p(1-p)^2 + (1-p)\left(1 - p^2 - (1-p)^2\right).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $([X_{n+1} = 1], [X_{n+1} = -1])$ forme un système complet d'événement. La formule des probabilités totales assure que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(Y_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1)\mathbb{P}(Y_n = -1) = (2p-1)p_n + 1 - p.$$

3. La suite (p_n) est arithmético-géométrique. On trouve après calculs que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2}.$$

Exercice.

1. La matrice est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul, i.e. $x^2 - y^2 \neq 0$.

2. Notons $q = 1 - p$.

   D'après la question précédente, la probabilité que M soit inversible est égale à $\mathbb{P}(X^2 - Y^2 \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(X = Y)$ (puisque X et Y sont positives). La formule des probabilités totales, avec $([X = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour système complet, assure que :

$$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n, Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=n) = p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} q^{2n-2} = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}.$$

   La probabilité que M soit inversible est donc égale à $\dfrac{2q}{1+q}$.

Exercice.

1. Montrons le résultat par récurrence. La propriété est trivialement initialisée. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geqslant \sqrt{n}$. Ainsi $u_n \geqslant 0$ et :

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \geqslant \sqrt{n+1}.$$

   La propriété est donc héréditaire. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{n}$.

2. Soit $x \geqslant 0$. On a alors : $(x+1)^2 - 4x = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geqslant 0$, d'où $(x+1)^2 \geqslant 4x$. Puisque $x \geqslant 0$, $x+1 \geqslant 2\sqrt{x}$.

   On en déduit que : $\forall x \geqslant 0,\ \sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.

3. Montrons le résultat par récurrence. La propriété est trivialement initialisée. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$.

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leqslant \frac{n+2+u_n}{2} \leqslant \frac{n}{2} + 1 + \frac{n}{2} + \frac{u_0}{2^{n+1}} = n + 1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}.$$

   On a donc bien prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leqslant \frac{u_{n-1}}{n^2} \leqslant \frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$$

   Le théorème d'encadrement de limites assure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n^2} = 0.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{n} = \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{u_{n-1}}{n^2}}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

Exercice.

1. Pour tout $x > 0$, on a :
$$1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

2. La fonction g est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente, donc positive sur $\mathbb{R}$. Elle aussi continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

   Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonction $1 - F$ et $t \mapsto \ln(1 - F(t))$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$.
$$\begin{aligned}\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A -f(t)\ln(1-F(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[(1-F(t))\ln(1-F(t))\Big]_0^A - \int_0^A (1-F(t))\frac{-f(t)}{1-F(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= (1-F(A))\ln(1-F(A)) + \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
   Puisque $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, on trouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

3. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :
$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(U \geqslant e^{-\lambda y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & \text{si } y \geqslant 0. \end{cases}$$
   La variable aléatoire Y suit donc la loi exponentielle de paramètre λ.

   On vérifie sans problème que la variable aléatoire Y vérifie les conditions énoncées dans le préambule de l'exercice.

Exercice.

1. On trouve immédiatement que $P_0 = 1$ et :
$$\begin{aligned} P_1 &= (-1)^0\binom{2}{1}(1-X^2)^0 X = 2X, \\ P_2 &= \sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{3}{2k+1}(1-X^2)^k X^{2-2k} = 3X^2 - (1-X^2) = 4X^2 - 1, \\ P_3 &= \sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{4}{2k+1}(1-X^2)^k X^{3-2k} = 4X^3 - 4X(1-X^2) = 8X^3 - 4X. \end{aligned}$$

2. Puisque :
$$P_n(-X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n+1}{2k+1}(1-X^2)^k(-X)^{n-2k} = (-1)^n\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n+1}{2k+1}(1-X^2)^k X^{n-2k} = (-1)^n P_n.$$
   On en déduit que P_n a la même parité que n.

3. Pour tout $k \in \left[\!\left[0, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right]\!\right]$, le monôme de plus haut degré de $(-1)^k\binom{n+1}{2k+1}(1-X^2)^k X^{n-2k}$ est $\binom{n+1}{2k+1}X^n$.

   On en déduit donc que le polynôme P_n est de degré n et son coefficient dominant est égal à :
$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n+1}{2k+1} = \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ impair}}}^{n+1}\binom{n+1}{i} = \sum_{\substack{i=0\\ i \text{ pair}}}^{n+1}\binom{n+1}{i} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i} = 2^n.$$

Exercice.

1. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a, par indépendance de X et Y :
$$\mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}(X \leqslant z)\mathbb{P}(Y \leqslant z) = \Phi(z)^2$$
La fonction Φ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ la fonction de répartition de Z l'est aussi. La variable aléatoire Z admet donc une densité, égale à $2f\Phi$.

2. On est amené à étudier la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2xf(x)\Phi(x)\,\mathrm{d}x$ donc la convergence (simple) des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\,\mathrm{d}x$. Par intégration par parties (les fonctions $\left(x \mapsto -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ et Φ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et leur produit converge en $+\infty$), on trouve, sous réserve de convergence, que :
$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \text{ où } \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\,\mathrm{d}x$ et vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

De la même manière, on peut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\,\mathrm{d}x$ et vaut $-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

On en déduit que Z admet une espérance, égale à :
$$\mathbb{E}(Z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice.

1. On vérifie sans problème la linéarité de T.
Puisque $\dim E = \dim \mathbb{R}^n$, montrer la bijectivité de T revient à prouver son injectivité. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $T(P) = 0$. On en déduit que P admet n racines distinctes. Puisque $\deg P \leqslant n-1$, P est le polynôme nul.
L'application linéaire T est ainsi injective et donc un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.

2. Par définition, $T(L_i) = e_i$, i.e. $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$.

3. D'après la question précédente, L_i admet $n-1$ racines : $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$. Puisque $\deg L_i \leqslant n-1$, il existe donc un réel λ tel que :
$$\mathcal{L}_i = \lambda \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j)$$
Puisque $L_i(a_i) = 1$, on trouve que $\lambda = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$ et ainsi que : $\mathcal{L}_i = \lambda \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

4. Puisque la famille est de cardinal $n = \dim E$, il suffit d'étudier sa liberté pour prouver que c'est une base de E. Soit $(\lambda, \dots, \lambda_n)$ tel que $\lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_n L_n = 0$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on trouve que $\lambda_1 L_1(a_i) + \dots + \lambda_n L_n(a_i) = 0$, i.e. $\lambda_i = 0$. On en déduit donc que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de E.
Avec la même idée (évaluation en tous les a_i), on trouve que :
$$\forall P \in E,\ P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i.$$

Exercice.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{n=0}^{N} P(X=n) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1+a^n}{4n!}. = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N}\frac{a^n}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e+e^a}{4}.$$
Puisque $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on en déduit que $\dfrac{e+e^a}{4} = 1$, i.e. $a = \ln(4-e)$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{n=0}^{N} |nP(X=n)| = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{a^n}{(n-1)!} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{a^{n+1}}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e+ae^a}{4}.$$
La variable aléatoire positive X admet donc une espérance égale à $\dfrac{e+ae^a}{4}$.

3. $S(\Omega) = \mathbb{N}$. Puisque $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que la loi de S est donnée par :
$$\begin{aligned}
P(S=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n, S=k) \\
&= \sum_{n=0}^{k} P(X=n, Y=k-n) \text{ car } Y(\Omega)=\mathbb{N} \\
&= \sum_{n=0}^{k} P(X=n)P(Y=k-n) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1+a^n}{4n!}\right)\left(\frac{1+a^{k-n}}{4(k-n)!}\right) \\
&= \frac{1}{16k!}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\left(1+a^n+a^{k-n}+a^k\right) \\
&= \frac{2^k + 2(1+a)^k + 2^k a^k}{16k!} \text{ en appliquant 4 fois la formule du binôme} \\
&= \frac{2(1+a)^k + 2^k(1+a^k)}{16k!}
\end{aligned}$$

Exercice.

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_n\}$ tel que $f(A) = \lambda A$, i.e. $A^T = \lambda A$.
On en déduit que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{j,i} = \lambda a_{i,j} = \lambda(\lambda a_{j,i}) = \lambda^2 a_{j,i}$. Puisqu'il existe $a_{i,j} \neq 0$ ($A \neq 0_n$), on en déduit que $\lambda^2 = 1$, i.e. $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Ainsi, les seules valeurs propres potentielles sont -1 et 1.
Réciproquement, les réels 1 et -1 sont valeurs propres de f et les espaces propres associés sont :

- l'espace des matrices symétriques $E_1(f) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$
- l'espace des matrices anti-symétriques $E_{-1}(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$.

Exercice.

1. On remarque que $X_1(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

   On note, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, F_k l'événement "on obtient face au k-ème lancer".
   $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ [X_1=k]=\big(F_1\cap\cdots\cap F_k\cap\overline{F_{k+1}}\big)\cup\big(\overline{F_1}\cap\cdots\cap\overline{F_k}\cap F_{k+1}\big).$$
   Puisque cet événement est l'union d'événements disjoints et par indépendance des tirages, on obtient la loi de X_1 :
   $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X_1=k)=P\big(F_1\cap\cdots\cap F_k\cap\overline{F_{k+1}}\big)+P\big(\overline{F_1}\cap\cdots\cap\overline{F_k}\cap F_{k+1}\big)=p^kq+pq^k.$$
   Soit $N\in\mathbb{N}^*$.
   $$\sum_{k=1}^{N}kP(X_1=k)=\sum_{k=1}^{N}kp^kq+\sum_{k=1}^{N}kpq^k=pq\sum_{k=1}^{N}kp^{k-1}+pq\sum_{k=1}^{N}kq^{k-1}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{pq}{(1-p)^2}+\frac{pq}{(1-q)^2}=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}.$$
   La variable aléatoire X_1 admet donc une espérance et $E(X_1)=\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}$.

2. Pour tout $(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on a :
   $$[X_1=i]\cap[X_2=j]=\big(F_1\cap\cdots\cap F_i\cap\overline{F_{i+1}}\cap\cdots\cap\overline{F_{i+j}}\cap F_{i+j+1}\big)\cup\big(\overline{F_1}\cap\cdots\cap\overline{F_i}\cap F_{i+1}\cap\cdots\cap F_{i+j}\cap\overline{F_{i+j+1}}\big)$$
   Par le même raisonnement qu'à la question 1, on trouve :
   $$\forall(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ P(X_1=i,X_2=j)=p^jq^{i+1}+p^{i+1}q^j.$$
   Puisque $(X_1=i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :
   $$\forall j\in\mathbb{N}^*,\ P(X_2=j)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(X_1=i,X_2=j)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left(p^jq^{i+1}+p^{i+1}q^j\right).$$
   Puisque :
   $$\sum_{i=1}^{+\infty}p^jq^{i+1}=p^{j-1}q^2\sum_{i=1}^{+\infty}pq^{i-1}=p^{j-1}q^2\ \text{et}\ \sum_{i=1}^{+\infty}p^{i+1}q^j=p^2q^{j-1}\sum_{i=1}^{+\infty}p^{i-1}q=p^2q^{j-1},$$
   on trouve : $\forall j\in\mathbb{N}^*,\ P(X_2=j)=p^{j-1}q^2+p^2q^{j-1}$.

3. $P(X_1=1,X_2=1)=pq^2+p^2q=pq(p+q)=pq$ et $P(X_1=1)P(X_2=1)=2pq(p^2+q^2)$ Ainsi :
   $$P(X_1=1,X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=1)\Leftrightarrow 2(p^2+q^2)=1\Leftrightarrow 4p^2-4p+1=0\Leftrightarrow p=\frac{1}{2}.$$
   On en déduit que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes si $p\neq\dfrac{1}{2}$.

   Lorsque $p=\dfrac{1}{2}$, on remarque après calculs que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Exercice.

Puisque $\ln(1+u)\underset{u\to0}{=}u-\dfrac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)$, on a :
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\underset{x\to+\infty}{=}e^{x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}\underset{x\to+\infty}{=}e^{1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}.$$
Ainsi, puisque $e^u-1\underset{u\to0}{\sim}u$:
$$x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right)\underset{x\to+\infty}{=}x\left(e^{1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}-e\right)\underset{x\to+\infty}{=}xe\left(e^{-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}-1\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}xe\left(-\frac{1}{2x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{e}{2}$$
On peut alors conclure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right)=-\frac{e}{2}$.

Exercice.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N},\ P(X > k) = q^k$ (on peut faire un calcul de somme par complémentaire ou bien voir que l'événement $[X > k]$ se réalise, si et seulement si, on effectue k échecs consécutifs réalisés avec la probabilité q).

   Puisque la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k$ converge, on en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \frac{1}{p} = E(X)$.

2. a.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} P(X > k) &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)P(X > k) - kP(X > k)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+1)P(X > k) - \sum_{k=1}^{n} kP(X > k)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} kP(X > k-1) - \sum_{k=0}^{n} kP(X > k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(P(X > k-1) - P(X > k)\right) + (n+1)P(X > n)\\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) + (n+1)P(X > n).
\end{aligned}$$

   b. Puisque X admet une espérance, le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Or :

$$0 \leqslant (n+1)P(X > n) = (n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k).$$

   Le théorème d'encadrement permet de conclure : $\lim_{n\to+\infty}(n+1)P(X > n) = 0$.

   On en déduit que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance, alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} P(X > k)$ converge et a pour somme $E(X)$.

Exercice.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1\\ -\lambda & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1-\lambda^2 & 1+\lambda\\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

   On en déduit que $\operatorname{Sp}(A) = \{-1; 1\}$. De plus :

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \left\{ x - y + z = 0 \right. \quad \Leftrightarrow x = y - z \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0\\ z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y\\ z = 0 \end{cases}$$

   Ainsi $E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-1} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0 \end{pmatrix}\right)$. A est donc diagonalisable car $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 3$.

2. La matrice A est inversible car 0 n'est pas valeur propre de A.

3. Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers p et q tels que $A^{2p+1} = A^{2q}$.

   Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.

   Ainsi $A^{2p+1}X = (-1)^{2p+1}X = -X$ et $A^{2q}X = (-1)^{2q}X = X$. On en déduit que $X = 0$, ce qui est absurde.

   Il n'est donc pas deux entiers p et q tels que $A^{2p+1} = A^{2q}$.