Exercice.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\Gamma(n)$ est converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (*on pourra raisonner par récurrence*).

2. Calculer $\Gamma(n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que la fonction f_n définie ci-dessous est une densité :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Soit X une variable aléatoire de densité f_n. Montrer que, pour tout $x > 0$, si Y suit la loi de Poisson de paramètre x, alors $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant n-1)$.

   (Indication : penser à dériver.)

Exercice.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Montrer que si A admet une unique valeur propre λ et que $A \neq \lambda I_n$, alors A n'est pas diagonalisable.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice.
On considère l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $\Phi(P) = (X^2 - X)P'' + (1 - 2X)P'$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Quelles sont les valeurs propres de Φ ? L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
4. L'endomorphisme Φ est-il bijectif ?

Exercice.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{2^k}{3^{k+1}}.$$
2. Soit Y une variable aléatoire de même loi que X et indépendante de X. Donner la loi de $Z = X + Y$.
3. Calculer l'espérance de $S = \dfrac{1}{1+Z}$.

Exercice.

Soient a un réel et $A(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2-a \end{pmatrix}$.

1. La matrice $A(a)$ est-elle inversible ?

2. Montrer que 3 est valeur propre de $A(a)$ et déterminer le sous-espace propre associé.

3. Calculer $A(a)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(a)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Montrer qu'il existe deux matrices P inversible et $D(a)$ diagonale telles que $P^{-1}A(a)P = D(a)$.

Exercice.

Une urne contient $2n$ boules avec n boules numérotées 0 et n boules numérotées de 1 à n. On tire une poignée de n boules et on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numéro i est tirée et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i pour i variant de 1 à n.

2. Calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$ pour tous i et j compris entre 1 et n.

3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules numérotées 0 qui apparaissent dans la poignée. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Exercice.
Soit $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^1 e^{-(xu)^2} du$.

1. Montrer à l'aide d'un changement de variable que : $\forall x \neq 0,\ F(x) = xG(x)$.

2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall x \neq 0,\ G'(x) = \dfrac{xf(x) - F(x)}{x^2}$, où $f(x) = e^{-x^2}$.

3. En déduire les variations de G.

Exercice.
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ et } \mathbb{P}(X_k = 1) = p, \quad \text{où } p \in]0, 1[.$$

On note, pour n entier naturel non nul, $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$ ainsi que $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

1. Donner la loi de Y_2, la loi de Y_3.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = (2p - 1)p_n + 1 - p$.

3. En déduire p_n en fonction de n.

Exercice.

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur y et x pour que cette matrice soit inversible.

2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé . On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur cet espace probabilisé, indépendantes, et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
   Pour tout ω de Ω on définit la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.
   Quelle est la probabilité que cette matrice soit inversible ?

Exercice.

On considère une suite (u_n) vérifiant $u_0 \geqslant 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{n}$.

2. Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ \sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$.

4. Montrer que $\dfrac{u_{n-1}}{n^2}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ puis que $\dfrac{u_n}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice.

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de densité f telle que $\begin{cases} f(x) = 0 & si,\ x < 0 \\ f(x) > 0 & si,\ x \geqslant 0 \end{cases}$.

On suppose de plus que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F la fonction de répartition de X.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - F(x) > 0$.
2. On pose $g(x) = -f(x) \ln(1 - F(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que g est une fonction de densité.
   (Indication : on pourra faire une intégration par parties.)
3. Soit U suivant une loi uniforme sur $]0, 1[$ et λ un réel strictement positif. Déterminer la loi de $Y = \dfrac{-\ln U}{\lambda}$.
   La variable aléatoire Y vérifie-t-elle les conditions énoncées dans le préambule de l'exercice ?

Exercice.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} (1 - X^2)^k X^{n-2k}.$$

1. Montrer que $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et déterminer P_2 et P_3.
2. Étudier la parité du polynôme P_n.
3. Montrer que P_n est de degré n et donner son coefficient dominant.

Exercice.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite.
On pose $Z = \sup(X, Y)$.

1. Montrer que Z est à densité et donner sa fonction de densité g en fonction de la densité f et de la fonction de répartition Φ communes à X et Y.

2. Montrer que Z admet une espérance et la déterminer à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni de sa base canonique $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ et $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
On considère l'application T de E dans $\mathbb{R}^n$ définie par $T(P) = (P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n))$.

1. Montrer que T est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. On note L_i l'unique antécédent de e_i par T.

   Donner $L_i(a_j)$, pour tout j dans $[\![1; n]\!]$.

3. En déduire $L_i(X)$.

4. Justifier que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E et donner les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base en fonction des $P(a_i)$.

Exercice.
X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = P(Y = n) = \frac{1 + a^n}{4n!}.$$

1. Quelle est la valeur de a ?

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? La calculer le cas échéant.

3. Quelle est la loi de $S = X + Y$?

Exercice.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f suivant :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^T \end{array}$$

Exercice.

On lance une pièce truquée qui tombe sur pile avec une probabilité p et sur face avec une probabilité $q = 1 - p$.

On considère la variable aléatoire X_1 égale au nombre de lancers de la première série de lancers successifs qui tombent uniquement sur pile ou uniquement sur face.

On définit de même la variable aléatoire X_2 égale au nombre de lancers de la seconde série de lancers successifs qui tombent uniquement sur pile ou uniquement sur face.

Exemple : si on obtient $PPPFPPPPF$, alors $X_1 = 3$ et $X_2 = 1$.

1. Donner la loi de X_1 et déterminer $E(X_1)$.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) et en déduire la loi marginale de X_2.
3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice.

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right)$.

Exercice.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

2. Soit X une variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet une espérance.

   a. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) + (n+1)\mathbb{P}(X > n).$$

   b. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\mathbb{P}(X > n) = 0$. Conclure.

Exercice.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. La matrice A est-elle inversible ?

3. Existe-t-il deux entiers p et q tels que $A^{2p+1} = A^{2q}$?