1 Analyse

Proposition 1 (***Trigonométrie : valeurs particulières***)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N.D.	$-\sqrt{3}$	0	N.D.	0

Proposition 2 (***Trigonométrie : formules des angles associés***)

- Théorème de Pythagore : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$
- Formules des angles associés :

$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$	$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$	$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$
$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$
$\cos(\theta+2\pi) = \cos\theta$	$\sin(\theta+2\pi) = \sin\theta$	$\tan(\theta+2\pi) = \tan\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$	

Proposition 3 (***Trigonométrie : formules d'addition des arcs***)

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$	$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$	$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

Proposition 4 (***Trigonométrie : formules de duplication***)

$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

Proposition 5 (***Trigonométrie : résolution d'équations***)

$\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = y\ [2\pi]$ ou $x = -y\ [2\pi]$
$\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y\ [2\pi]$ ou $x = \pi - y\ [2\pi]$
$\tan x = \tan y \Leftrightarrow x = y\ [\pi]$

Théorème 1 (***Expression explicite d'une suite arithmétique***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\forall p \geqslant 0,\ \forall n \geqslant p,\ u_n = u_p + (n-p)r.$$

Théorème 2 (***Expression explicite d'une suite géométrique***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\forall p \geqslant 0,\ \forall n \geqslant p,\ u_n = u_p q^{n-p}.$$

Théorème 3 (***Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique*** ♡)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

$$\forall p \geqslant 0,\ \forall n \geqslant p,\ \sum_{k=p}^{n} u_k = \begin{cases} (n-p+1)u_p & \text{si } q = 1 \\ u_p\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

Théorème 4 (***Expression explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
Soit $(E_C) : q^2 = aq + b$ son équation caractéristique associée et soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, (E_C) admet deux racines réelles distinctes q_1 ou q_2.
  Il existe alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$.
- Si $\Delta = 0$, (E_C) admet une racine double réelle q_0.
  Il existe alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu)q_0^n$.
- Si $\Delta < 0$, (E_C) admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$.
  Il existe alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$.

Proposition 6 (***Suites extraites de rangs pairs et impairs***)

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell. \end{cases}$$

Proposition 7 (***Passage à la limite***)

Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0},\ (v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles convergentes.
Si, pour tout entier $n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Théorème 5 (***Théorème d'encadrement dit "des gendarmes"***)

Soient $(u_n),\ (v_n)$ et (w_n) trois suites réelles. Si :

- les suites u et w convergent vers la même limite réelle ℓ
- et pour tout entier naturel $n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

alors la suite v converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$.

Théorème 6 (***Théorème de comparaison de limites***)

Soient $(u_n),\ (v_n)$ deux suites réelles telles que pour tout $n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$. Alors :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 7 (***Théorème de la limite monotone (pour les suites)***)

Toute suite monotone admet une limite (finie ou infinie). En particulier :

(i) toute suite croissante majorée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;

(ii) toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$;

(iii) toute suite décroissante minorée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;

(iv) toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 8 (***Théorème des suites adjacentes***)

Deux suites adjacentes $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$convergent vers une seule et même limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, si pour tout $n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$, alors on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Proposition 8 (***Équivalent d'une suite convergente vers un réel non nul***)

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle et soit ℓ un réel **non nul**. Alors :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Théorème 9 (***Théorème de la limite monotone (pour les fonctions réelles)***)

Toute fonction monotone f sur un intervalle $I = [a, b[$ admet une limite en b.

(i) Si f est croissante et majorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe et est finie.

(ii) Si f est croissante non majorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

(iii) Si f est décroissante et minorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe et est finie.

(iv) Si f est décroissante non minorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = -\infty$.

Théorème 10 (***Théorème d'encadrement***)

Soient $f,\ g$ et h trois fonctions définies en un voisinage V d'un point a et vérifiant :

$$\forall x \in V,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

Si f et h admettent une limite finie ℓ en a, alors g admet aussi le réel ℓ pour limite en a.

Théorème 11 (***Théorème de comparaison***)

Soient f et g deux fonctions définies en un voisinage V d'un point a et vérifiant :

$$\forall x \in V,\ f(x) \leqslant g(x).$$

(i) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

(ii) Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Théorème 12 (***Passage d'une inégalité à la limite***)

Soient f et g deux fonctions admettant une limite (finie ou non) en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
S'il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in V$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$$

Théorème 13 (***Théorème des valeurs intermédiaires***)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) une valeur $c \in [a, b]$ telle que $y = f(c)$.

Proposition 9 (***L'image d'un intervalle par une fonction continue***)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 14 (***Image d'un segment par une fonction continue***)

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 15 (***Théorème de la bijection***)

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Alors :

- f réalise une bijection entre l'intervalle I et l'intervalle $f(I)$;
- f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f.

Théorème 16

Deux fonctions sont équivalentes si, et seulement si, leur différence est négligeable devant l'une d'elles :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right).$$

Théorème 17 (***Dérivation d'une application réciproque***)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et :

$$\forall y \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)} \quad \text{i.e.} \quad \left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Théorème 18 (***Théorème de Rolle***)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 19 (***Théorème des accroissements finis***)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$) et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Il existe alors un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Proposition 10

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est de signe constant sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I, alors f est strictement monotone sur I.

Proposition 11 (***Croissances comparées de suites***)

Soient α et β deux réels strictement positifs et soit $q > 1$.

$$(\ln n)^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^\beta\right), \quad n^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}\left(q^n\right), \quad q^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n!\right),$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{q^n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0.$$

Proposition 12 (***Croissances comparées de fonctions***)

Soient α et β deux réels strictement positifs.

$$(\ln x)^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right) \text{ et } x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^x\right), \quad |\ln x|^\alpha = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{e^x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^\beta \left|\ln x\right|^\alpha = 0.$$

Proposition 13 (*Développements limités usuels*)

(i) $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

(ii) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$

(iii) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$

(iv) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

(v) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

(vi) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

(vii) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

Proposition 14 (*Approximation affine*)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$ si alors elle admet un **développement limité à l'ordre** 1 de la forme :

$$f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0) \quad \text{ou encore} \quad f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + \underset{h\to 0}{o}(h).$$

Dans ce cas, $\ell = f'(x_0)$.

Proposition 15 (*Unicité du développement limité*)

Si f admet un développement limité en a à l'ordre n, alors celui-ci est unique (au point a et à l'ordre n).

Théorème 20 (*Formule de Taylor-Young à l'ordre n*)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_{x\to a}\left((x-a)^n\right).$$

Proposition 16 (*Intégration terme-à-terme d'un développement limité*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I (contenant 0), admettant un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o_{x\mapsto 0}\left(x^n\right).$$

Soit F une primitive de f sur I. Alors F admet pour DL à l'ordre $n+1$ en 0 :

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o_{x\mapsto 0}\left(x^{n+1}\right).$$

Proposition 17 (*Dérivées et primitives usuelles*)

Chacune des fonctions f ci-dessous est dérivable sur l'intervalle I, de dérivée f'.

f	I	f'
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ si $n < 0$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$)	$\mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \ln x$	$\mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto a^x$ ($a > 0$)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto (\ln a)a^x$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \tan x$	$\left]\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$x \mapsto \arctan x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

Proposition 18 (*Linéarité de l'intégrale*)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$.

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \int_a^b(\lambda f(t)+\mu g(t))\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 19 (*Relation de Chasles*)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

$$\forall c\in[a,b],\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 20 (*Positivité de l'intégrale*)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.
Si $f\geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$

Proposition 21 (*Croissance de l'intégrale*)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.
Si $f\leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition 22 (*Inégalité triangulaire*)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Proposition 23 (*Stricte positivité de l'intégrale*)

L'intégrale d'une fonction positive et non identiquement nulle sur un segment non réduit à un singleton est strictement positive.

Théorème 21 (*Théorème fondamental du calcul intégral*)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a\in I$. La fonction

$$F:\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Théorème 22 (*Intégration par parties sur un segment*)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x=\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 23 (*Formule du changement de variable*)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. On suppose que $\varphi(J)\subset I$. Soient $(a,b)\in J^2$. On a alors :

$$\int_a^b\varphi'(t)\times f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t\underset{x=\varphi(t)}{=}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 24 (*Sommes de Riemann - méthode des rectangles*)

Pour toute fonction f continue sur le segment $[a,b]$ (où $a<b$), on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 25 (*Ensemble des solutions de $y'+ay=0$*)

Soit $A:I\to\mathbb{R}$ une primitive d'une fonction a continue sur l'intervalle I. L'ensemble des solutions de (H) $y'=ay$ est :

$$\left\{\ f:\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & Ce^{-A(x)}\end{array},\ C\in\mathbb{K}\right\}.$$

Théorème 26 (***Structure des solutions de $y' + ay = b$***)

Soient a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $f_0 : I \to \mathbb{K}$ une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b$.
Une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - f_0$ est solution de **l'équation différentielle homogène associée** $(H) : y' + ay = 0$.

Théorème 27 (***Solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ ($a \neq 0$)***)

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique $(E_C) : ar^2 + br + c = 0$ associée à l'équation différentielle homogène $(H) : ay'' + by' + cy = 0$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E_C) admet deux solutions réelles r_1 et r_2 et l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\left\{ \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \end{array}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation (E_C) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (H) est :

$$\left\{ \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \mu e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{array}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E_C) admet une solution double réelle γ et l'ensemble des solutions de (H) est :

$$\left\{ \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\lambda x + \mu) e^{\gamma x} \end{array}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Théorème 28 (***Théorème de superposition - équa diff linéaire du premier ordre***)

Soient a, f_1 et f_2 des fonctions continues sur un intervalle I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Si deux fonctions y_1 et y_2 sont respectivement des solutions des équations différentielles $y' + ay = f_1$ et $y' + ay = f_2$, alors la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = \lambda f_1 + \mu f_2$.

Théorème 29 (***Théorème de superposition - équa diff linéaire du second ordre***)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, f_1 et f_2 des fonctions continues sur un intervalle I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Si deux fonctions y_1 et y_2 sont respectivement des solutions des équations différentielles $ay'' + by' + cy = f_1$ et $ay'' + by' + cy = f_2$, alors la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \lambda f_1 + \mu f_2$.

Théorème 30 (***Dérivation d'une composée (fonction de deux variables)***)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles dérivables sur I telles que, pour tout réel $t \in I$, $\big(u(t), v(t)\big) \in U$.
Alors, la fonction réelle

$$\begin{array}{rccc} \phi: & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f\big(u(t), v(t)\big) \end{array}$$

est définie et dérivable sur I. De plus, pour tout réel $t \in I$, on a :

$$\phi'(t) = u'(t).\frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t), v(t)\big) + v'(t).\frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t), v(t)\big).$$

Théorème 31 (***Théorème de Schwarz***)

Soit f une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\forall (x, y) \in U, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

2 Algèbre et géométrie

Théorème 32 (***Composée d'injections, de surjections, de bijections***)

Soient E, F et G trois ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

(i) Si f et g sont deux injections, alors $g \circ f$ est une injection.

(ii) Si f et g sont deux surjections, alors $g \circ f$ est une surjection.

(iii) Si f et g sont deux bijections, alors $g \circ f$ est une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Théorème 33 (***Formule du binôme dans le cas de deux matrices commutatives***)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Proposition 24 (*Inversibilité d'une matrice triangulaire*)

Une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est inversible si, et seulement si, aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul.

Proposition 25 (*Involution et linéarité de la transposition*)

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$. Alors :

$$\left(A^T\right)^T = A, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T, \quad (A+B)^T = A^T + B^T.$$

Proposition 26 (*Transposée d'un produit matriciel*)

Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

Proposition 27 (*Transposition et inversibilité*)

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Proposition 28 (*Inversibilité d'un produit*)

Soit $(A, B) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))^2$. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition 29 (*Inverse et puissances de matrice*)

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est inversible, d'inverse $\left(A^{-1}\right)^k$.

Proposition 30 (*Inversibilité d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$*)

Une matrice de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son déterminant $ad - bc$ est non nul. Dans ce cas, son inverse est donné par :

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Proposition 31 (*Matrice de la composée d'applications linéaires*)

Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ des bases respectives de trois espaces vectoriels E, F et G.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_1}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_2}(v)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}(u).$$

Théorème 34 (*Caractérisation matricielle d'un isomorphisme*)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases respectives des deux E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme si, et seulement si, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible. Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(u^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)\right)^{-1}$$

Proposition 32 (*Degré de la somme de polynômes*)

Pour tous polynômes P et Q, $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$.
De plus, il y a égalité si $\deg P \neq \deg Q$.

Théorème 35 (*Caractérisation d'une racine*)

Un scalaire a est racine d'un polynôme P si, et seulement si, $(x \mapsto x - a)$ divise P.

Proposition 33 (*Généralisation à plusieurs racines distinctes*)

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires **deux-à-deux distincts**.
Les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ sont des racines d'un polynôme P si, et seulement si, le polynôme $x \mapsto (x - a_1) \ldots (x - a_n)$ divise P.

Proposition 34 (*Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine*)

Un scalaire $a \in \mathbb{K}$ est une racine multiple d'un polynôme P si, et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.

3 Probabilités et statistiques

Proposition 35 (***Coefficients binomiaux***)

(i) Symétrie : $\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2,\ \binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$.

(ii) Formule du triangle de Pascal : $\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2,\ \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

(iii) Formule du "pion" : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![1,n]\!],\ \binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Proposition 36 (***Dénombrement***)

Soit E un ensemble fini à n éléments. Soit $p\in[\![0,n]\!]$.

(i) Il y $n!$ permutations de E.

(ii) Il y a $\binom{n}{p}$ sous-ensembles à p éléments de E.

(iii) Il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ p-uplets sans répétition de E.

Théorème 36 (***Formule de Poincarré ou du crible***)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Alors :

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B).$$

Théorème 37 (***Loi de probabilité sachant un événement***)

Soit A un événement de probabilité non nulle d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$. Alors l'application :

$$\mathbb{P}_A:\begin{array}{ccc}\mathcal{T} & \to & [0,1]\\ B & \mapsto & \mathbb{P}_A(B)\end{array}$$

est une loi de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{T})$, appelée **loi de probabilité sachant** A.

Théorème 38 (***Formule des probabilités composées***)

Soient $(A_1,\ldots,A_n)$ une famille d'événements telle que $\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)=\mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\times\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\cdots\times\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Théorème 39 (***Formule des probabilités totales***)

Soit $(A_1,\ldots,A_n)$ un système complet d'événements. Pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k\cap B).$$

Théorème 40 (***Formule de Bayes***)

Soient $(A_1,\ldots,A_n)$ un système complet d'événements et soit B un événement.
Si tous les événements $B,\ A_1,\ldots,\ A_n$ ont une probabilité non nulle, alors :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}_B(A_i)=\frac{\mathbb{P}(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)P_{A_k}(B)}.$$

Théorème 41 (***Caractérisation d'une variable par sa fonction de répartition***)

Deux variables aléatoires réelles ont même loi si, et seulement si, elles ont même fonction de répartition.

Proposition 37 (***Fonction de répartition d'une variable aléatoire finie***)

Soit X une variable aléatoire finie.
On note $X(\Omega)=\{x_1,\ldots,x_n\}$, où les x_k sont rangés dans l'ordre strictement croissant.

(i) Pour tout $t<x_1,\ F_X(t)=0$,

(ii) pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, pour tout $t\in[x_k,x_{k+1}[$, on a :

$$F_X(t)=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X=x_i).$$

(iii) pour tout $t\geqslant x_n,\ F_X(t)=1$.

Définition 1 (*Espérance*)

Soient X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
On dit que X admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}(X = x) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \mathbb{P}(X = x_k).$$

Proposition 38 (*Linéarité de l'espérance*)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies sur Ω et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\lambda X) = \lambda\, \mathbb{E}(X).$$

Proposition 39 (*Positivité et croissance de l'espérance*)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies sur Ω. On a alors :

- Si X est positive, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$. Si de plus, $\mathbb{E}(X) = 0$ alors $X = 0$.
- Si $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Théorème 42 (*Théorème du transfert*)

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur un univers Ω et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.
Alors $f(X)$ est une variable aléatoire admettant une espérance égale à :

$$\mathbb{E}\left(f(X)\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, \mathbb{P}(X = x).$$

Définition 2 (*Variance*)

Soient X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
On dit que X admet une variance donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right].$$

Théorème 43 (*Formule de König-Huygens*)

Toute variable aléatoire finie X admet une espérance, un moment d'ordre 2 et une variance, liées par la formule suivante :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Proposition 40 (*Caractérisation des variables constantes*)

Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini.
La variance de X est nulle si, et seulement si, X est constante.

Proposition 41 (*Quadraticité et invariance par translation de la variance*)

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω.
Pour tous réels a et b, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\, \mathbb{V}(X)$

Proposition 42 (*Propriétés de deux variables aléatoires indépendantes*)

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies indépendantes, alors :

- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$,
- $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$

Théorème 44 (*Lemme des coalitions*)

Soient $X_1, \dots, X_{n+p}$ des variables aléatoires finies mutuellement indépendantes.

- Soient $\varphi_1,\ \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des fonctions à valeurs réelles définies respectivement sur $X_1(\Omega),\ X_2(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$. Les variables aléatoires $\varphi_1(X_1),\ \varphi_2(X_2), \dots,\ \varphi_n(X_n)$ forment une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
- Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles respectivement définies sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ et $X_{n+1}(\Omega) \times \cdots \times X_{n+p}(\Omega)$.

  Alors les variables $f(X_1, \dots, X_n)$ et $g(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$ sont indépendantes.

Loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$
Univers-image	$X(\Omega) = [\![a,b]\!]$
Loi de probabilité	$\forall k \in [\![a,b]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{b-a+1}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
Univers-image	$X(\Omega) = \{0;1\}$
Loi de probabilité	$\begin{cases} \mathbb{P}(X=1) = p \\ \mathbb{P}(X=0) = 1-p \end{cases}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = p$
Variance	$\mathbb{V}(X) = p(1-p) = pq$

Loi de binomiale de paramètres n et p	
Notation	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
Univers-image	$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
Loi de probabilité	$\mathbb{P}(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Espérance	$\mathbb{E}(X) = np$
Variance	$\mathbb{V}(X) = np(1-p) = npq$

Théorème 45 (*Somme de Bernoulli indépendantes de même paramètre*)

Si $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p, alors la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Proposition 43 (*Statistiques - Covariance et coefficient de corrélation linéaire*)

Soit $S = ((x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n))$ une série statistique bivariée.
On note $\overline{x}$ et s_x^2 (resp. $\overline{y}$ et s_y) la moyenne et la variance de la série x (resp. y), ainsi que $s_{x,y}$ et $r_{x,y}$ la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de la série double S.

- $s_{xy} = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}$.
- $|s_{xy}| \leqslant s_x s_y$ (donc $|r_{xy}| \leqslant 1$) et $s_{x+y}^2 = s_x^2 + 2s_{xy} + s_y^2$.

Théorème 46 (*Ajustement affine selon la méthode des moindres carrés*)

Soit $S = ((x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)) \in (\mathbb{R}^2)^n$ une série statistique bivariée.
Parmi toute les droites du plan d'équation $y = ax+b$, il en existe une seule et unique qui minimise la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i+b)]^2 \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette droite, appelée la **droite d'ajustement affine selon la méthode des moindres carrés** a pour équation $y = ax+b$ où $a = \dfrac{s_{xy}}{s_x^2}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$, et passe par le point milieu $(\overline{x},\overline{y})$ du nuage de points.