Sujet MCR 2021 Partie II

1. La variable aléatoire N_1 est égale au nombre de succès ("être du type 1") lors de la répétition de N expériences indépendantes de Bernoulli de probabilité de succès p_1. La variable aléatoire N_1 suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p_1)$.

   Par le même raisonnement, N_2 (resp. N_3) suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p_2)$ (resp. $\mathcal{B}(N, p_3)$).

2. Le cours donne directement que $\mathbb{E}(N_1) = Np_1$ et $\mathbb{V}(N_1) = Np_1(1-p_1)$.

3. La variable aléatoire $\dfrac{N_1 - Np_1}{\sqrt{Np_1(1-p_1)}}$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à N_1 qui suit une loi binomiale. Le théorème de Moivre-Laplace assure que, pour tout $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $a < b$:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{N_1 - Np_1}{\sqrt{Np_1(1-p_1)}} \leqslant b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

4. a. Puisque $\mathrm{Cov}(N_1, N_2) = \mathrm{Cov}(N_2, N_1)$, la matrice W est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

   b. Puisque N_1 et N_2 admettent une variance, $aN_1 + bN_2$ aussi et

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(aN_1 + bN_2) &= a^2\,\mathbb{V}(N_1) + 2ab\,\mathrm{Cov}(N_1, N_2) + b^2\,\mathbb{V}(N_2)\\ &= \mathbb{V}(aN_1) + 2\,\mathrm{Cov}(aN_1, bN_2) + \mathbb{V}(bN_2)\end{aligned}$$

   D'autre part, on trouve que :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\,\mathbb{V}(N_1) + b\,\mathrm{Cov}(N_1, N_2)\\ a\,\mathrm{Cov}(N_1, N_2) + b\,\mathbb{V}(N_2)\end{pmatrix}\\ &= a^2\,\mathbb{V}(N_1) + 2ab\,\mathrm{Cov}(N_1, N_2) + b^2\,\mathbb{V}(N_2)\\ &= \mathbb{V}(aN_1 + bN_2).\end{aligned}$$

   c. Soit λ une valeur propre de W. Notons $X = \begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}$ un vecteur propre de W associé à λ.

$$\begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda \|X\|^2.$$

   Puisque X est un vecteur propre, $(a,b) \neq (0,0)$ et ainsi $\|X\|^2 \neq 0$. D'après la question précédente, on trouve que :

$$\lambda = \frac{1}{\|X\|^2}\,\mathbb{V}(aN_1 + bN_2) \geqslant 0.$$

   On en déduit que toutes les valeurs propres de W sont positives.

   d. Supposons par l'absurde que 0 est valeur propre de W.

   Notons $X = \begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}$ un vecteur propre de W associé à 0. D'après les calculs de la question précédente, $\mathbb{V}(aN_1 + bN_2) = 0$. On en déduit que la variable aléatoire $aN_1 + bN_2$ est constante presque-sûrement. Le couple (N_1, N_2) prend les valeurs $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$ avec des probabilités non nulles donc la variable aléatoire $aN_1 + bN_2$ prend les valeurs 0, a et b avec des probabilités non nulles. Puisque $(a,b) \neq (0,0)$, la variable aléatoire $aN_1 + bN_2$ prend au moins deux valeurs distinctes, ce qui est absurde.

   On en déduit que 0 n'est pas valeur propre de W et donc que W n'admet que des valeurs propres strictement positives.

   e. D'après la question 10.a, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (donc inversible et vérifiant $P^T = P^{-1}$) et une matrice diagonale $\tilde{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ telles que $W = P\tilde{D}P^{-1}$.

   D'après la question précédente, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Posons $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0\\ 0 & \sqrt{\mu}\end{pmatrix}$. La matrice diagonale D est bien inversible puisque ses coefficients diagonaux sont non nuls.

   On remarque que $D^2 = \tilde{D}$. On en déduit donc que $W = PD^2P^{-1}$.

5. Calculons AWA^T :

$$AWA^T = \left(D^{-1}P^{-1}\right)\left(PD^2P^{-1}\right)\left(D^{-1}P^T\right)^T = DP^{-1}\left(PD^{-1}\right) = DD^{-1} = I_2.$$

   On en déduit que $\mathbb{V}(Y_1) = \mathbb{V}(Y_2) = 1$ et $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$.

6. a. Puisque $N_1 + N_2 = N - N_3$, $\mathbb{V}(N_1 + N_2) = \mathbb{V}(N - N_3) = \mathbb{V}(N_3) = Np_3(1-p_3)$.

   b. Puisque N_1 et N_2 sont finies, (N_1, N_2) admet une covariance.

   Puisque $\mathbb{V}(N_1 + N_2) = \mathbb{V}(N_1) + 2\,\mathrm{Cov}(N_1, N_2) + \mathbb{V}(N_2)$, il vient que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(N_1, N_2) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{V}(N_1 + N_2) - \mathbb{V}(N_1) - \mathbb{V}(N_2)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(Np_3(1-p_3) - Np_1(1-p_1) - Np_2(1-p_2)\right)\\ &= \frac{N}{2}\left((1-p_1-p_2)(p_1+p_2) - p_1(1-p_1) - p_2(1-p_2)\right)\\ &= -Np_1p_2.\end{aligned}$$

c. Les valeurs propres de W sont non nulles donc la matrice W est inversible. Puisque $W \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il vient que :

$$\begin{aligned}
W^{-1} &= \frac{1}{\mathbb{V}(N_1)\,\mathbb{V}(N_2) - \operatorname{Cov}(N_1,N_2)^2} \begin{pmatrix} \mathbb{V}(N_2) & -\operatorname{Cov}(N_1,N_2) \\ -\operatorname{Cov}(N_1,N_2) & \mathbb{V}(N_1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{N^2 p_1 p_2 (1-p_1)(1-p_2) - N^2 p_1^2 p_2^2} \begin{pmatrix} N p_2(1-p_2) & N p_1 p_2 \\ N p_1 p_2 & N p_1 (1-p_1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{N p_1 p_2 p_3} \begin{pmatrix} p_2(1-p_2) & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_1(1-p_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

d. Calculons $A^T A$:

$$A^T A = \left(D^{-1} P^T\right)^T \left(D^{-1} P^T\right) = P D^{-2} P^T = P D^{-2} P^{-1} = \left(P D^2 P^{-1}\right)^{-1} = W^{-1}.$$

Calculons enfin $Y_1^2 + Y_2^2$:

$$\begin{aligned}
&Y_1^2 + Y_2^2 \\
&= \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(A \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 \\ N_2 - N p_2 \end{pmatrix}\right)^T A \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 \\ N_2 - N p_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 & N_2 - N p_2 \end{pmatrix} A^T A \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 \\ N_2 - N p_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 & N_2 - N p_2 \end{pmatrix} W^{-1} \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 \\ N_2 - N p_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{N p_1 p_2 p_3} \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 & N_2 - N p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(1-p_2) & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_1(1-p_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 \\ N_2 - N p_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{N p_1 p_2 p_3} \begin{pmatrix} N_1 - N p_1 & N_2 - N p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(1-p_2)(N_1 - N p_1) + p_1 p_2 (N_2 - N p_2) \\ p_1 p_2 (N_1 - N p_1) + p_1(1-p_1)(N_2 - N p_2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{p_2(1-p_2)(N_1 - N p_1)^2 + 2 p_1 p_2 (N_1 - N p_1)(N_2 - N p_2) + p_1(1-p_1)(N_2 - N p_2)^2}{N p_1 p_2 p_3}.
\end{aligned}$$

On remarque que le double produit du carré $(N_1 - Np_1 + N_2 - Np_2)^2 = (N - Np_3)^2$ est $2(N_1 - Np_1)(N_2 - Np_2)$. Ainsi $Y_1^2 + Y_2^2 = \dfrac{p_1 p_2 (N - Np_3)^2 + S}{N p_1 p_2 p_3}$ où :

$$\begin{aligned}
S &= (p_2(1-p_2) - p_1 p_2)(N_1 - N p_1)^2 + (p_1(1-p_1) - p_1 p_2)(N_2 - N p_2)^2 \\
&= p_2 p_3 (N_1 - N p_1)^2 + p_1 p_3 (N_2 - N p_2)^2.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
Y_1^2 + Y_2^2 &= \frac{p_1 p_2 (N - N p_3)^2 + p_2 p_3 (N_1 - N p_1)^2 + p_1 p_3 (N_2 - N p_2)^2}{N p_1 p_2 p_3} \\
&= \frac{(N - N p_1)^2}{N p_1} + \frac{(N - N p_2)^2}{N p_2} + \frac{(N - N p_2)^2}{N p_2}.
\end{aligned}$$

* *
*