Questions de cours

1. Énoncer le théorème des suites adjacentes.
2. Énoncer le théorème de superposition pour les équations différentielles linéaires du premier ordre.
3. Donner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.

Exercice 1 - Oral Agro 2023

On dispose initialement d'une urne U_0 contenant 1 boule blanche et 2 boules rouges. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remplit ensuite l'urne U_{n+1} avec 3 boules de la façon suivante. On effectue 3 tirages avec remise dans l'urne U_n, et pour chaque boule rouge (respectivement blanche) tirée, on place une nouvelle boule rouge (respectivement blanche) dans l'urne U_{n+1}. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne U_n. En particulier $Y_0 = 1$.

1. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et simulant les variables aléatoires $Y_0, \dots, Y_n$. La fonction renverra le résultat sous la forme d'une liste $[Y_0, Y_1, \dots, Y_n]$.
2. Identifier la loi de la variable aléatoire Y_1.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$ dans toutes ces sous-questions.

   a. Soit $k \in \{0;1;2;3\}$. Justifier **sans calcul** que :

   $$\forall j \in [\![0,3]\!],\ \mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1}=j) = \binom{3}{j}\left(\frac{k}{3}\right)^j\left(1-\frac{k}{3}\right)^{3-j}.$$

   b. Justifier que tout $k \in \{0;1;2;3\}, \displaystyle\sum_{j=0}^{3} j\mathbb{P}_{[Y_n=k]}\left(Y_{n+1}=j\right) = k$.

   c. À l'aide de la formule des probabilités totales et d'un système complet d'événements bien choisis, Montrer que :

   $$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} j\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1}=j)\mathbb{P}(Y_n=k)$$

   d. En déduire que $\mathbb{E}\left(Y_{n+1}\right) = \mathbb{E}\left(Y_n\right)$ puis l'expression de $\mathbb{E}\left(Y_n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \mathbb{P}\left(Y_n = 0\right),\ b_n = \mathbb{P}\left(Y_n = 1\right)\ c_n = \mathbb{P}\left(Y_n = 2\right)$ et $d_n = \mathbb{P}\left(Y_n = 3\right)$.

5. À l'aide de la formule des probabilités totales et du système complet d'événements $([Y_n = k])_{0\leqslant k\leqslant 3}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} + c_{n+1} = \dfrac{2}{3}\left(b_n + c_n\right)$.
6. En déduire la convergence et la limite des suites (b_n) et (c_n).
7. Montrer que la suite (a_n) et la suite (d_n) sont croissantes. Montrer qu'elles convergent.
8. Montrer que (d_n) converge vers $\dfrac{1}{3}$. Quelle est la limite de la suite (a_n) ? Interpréter le résultat.
9. On note T le numéro de la première urne ne contenant que des boules rouges ou que des boules blanches.

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(T > n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   b. **[5/2]** En déduire que la variable T suit une loi usuelle qu'on déterminera. Quelle est l'espérance de T ?

Exercice 2 - Oral Agro 2021

Soit $I =]1, +\infty[$. On considère l'équation différentielle (E) :

$$\forall t \in I,\ -t^2y'(t) + ty(t) = (y(t))^2,$$

d'inconnue une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de (E).

1. a. Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ est solution de (E) sur $]1, +\infty[$.

   b. **[5/2]** L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un espace vectoriel ?

2. Déterminer l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle d'inconnue $z : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I :
$$(E') : \forall t \in I,\ t^2 z'(t) + tz(t) = 1.$$

3. Soit y une solution de (E), qui ne s'annule pas sur tout l'intervalle I. Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{y(t)}$ est solution de (E'). En déduire une expression de y.

4. a. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des fonctions appartenant à $\mathcal{S}$ qui ne s'annulent pas sur I.

   b. A-t-on $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$?

   c. Existe-t-il une solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I.

Exercice 3 - Oral Agro 2022

Rappel : Algorithme de recherche dichotomique du zéro d'une fonction.

Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un réel α. On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :

- *$a_0 = a$ et $b_0 = b$*
- *Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et :*
  - *si $f(a_k)f(c_k) < 0$ alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$*
  - *sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$.*

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ convergent toutes deux vers α.

On étudie dans cet exercice, pour tout entier naturel n non nul, les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation
$$(E_n) : \ln x + x = n.$$
À cet effet, on introduit la fonction $f : x \mapsto \ln x + x$.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation (E_n) admet une unique solution, notée x_n ; vérifier que $x_n \in [0, 1; n]$.

   b. À l'aide de l'algorithme de recherche dichotomique, écrire en Python une fonction qui prend en argument un entier naturel n non nul et renvoie une approximation à 10^{-3}-près de x_n.

   c. Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on pourra comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$).

2. a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x < x$.

   b. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$.

   c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

3. a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 0$ (*on pourra s'aider de la question 2.b*). En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 1$.

4. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln n}$.

   a. Exprimer $u_n - 1$ en fonction de x_n et n. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   b. En déduire que $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

   c. En déduire que $x_n = n - \ln n + \dfrac{\ln n}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

* *
*