Exercice 1 - Oral Agro 2023

1.

```python
import random as rd

def simule_Y(n):
    Y = [1]
    for k in range(n):
        s = 0
        for i in range(3):
            if rd.random() < Y[k]/3:
                s += 1
        Y.append(s)
    return Y
```

2. La variable aléatoire Y_1 est égale au nombre de succès ("obtenir une boule blanche") lors de la répétition de 3 expériences de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès $\dfrac{1}{3}$, donc Y_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.

3. Sachant que $[Y_n = k]$, la variable aléatoire Y_{n+1} est le nombre de succès ("obtenir une boule blanche") lors de la répétition de 3 expériences de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès $\dfrac{k}{3}$. Ainsi, la loi conditionnelle de Y_{n+1} sachant $[Y_n = k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \dfrac{k}{3}\right)$, i.e. :

$$\forall j \in [\![0, 3]\!],\ \mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) = \binom{j}{3}\left(\frac{k}{3}\right)^j\left(1 - \frac{k}{3}\right)^{3-j}.$$

4. a. Sachant que $[Y_n = k]$, la variable aléatoire Y_{n+1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \dfrac{k}{3}\right)$. L'espérance de cette loi, étant égale à k, le résultat est immédiat.

   b. Les variables aléatoires Y_{n+1} et Y_n étant finies, elles admettent une espérance. En utilisant la formule des probabilités totales avec $([Y_n = k])_{0 \leqslant k \leqslant 3}$ comme système complet, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{3} j\mathbb{P}(Y_{n+1} = j) \\
&= \sum_{j=0}^{3} j \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(Y_n = k)\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \left(\sum_{j=0}^{3} j\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j)\right) \mathbb{P}(Y_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{3} k\mathbb{P}(Y_n = k) \\
&= \mathbb{E}(Y_n).
\end{aligned}$$

La suite $(\mathbb{E}(Y_n))$ est donc constante : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_0) = 1$.

5. En utilisant la formule des probabilités totales avec $([Y_n = k])_{0 \leqslant k \leqslant 3}$ comme système complet, on trouve :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} + c_{n+1} &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(Y_{n+1} = 2) \\
&= \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(Y_n = k)\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 1) + \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(Y_n = k)\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 2) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \mathbb{P}(Y_n = k)\frac{k(3-k)^2}{9} + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{P}(Y_n = k)\frac{k^2(3-k)}{9} \\
&= \frac{2}{3}\mathbb{P}(Y_n = 1) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(Y_n = 2) \\
&= \frac{2}{3}\left(b_n + c_n\right).
\end{aligned}$$

6. La suite $(b_n + c_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, elle converge donc vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant b_n \leqslant b_n + c_n$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ et de même $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $[Y_n = 0] \subset [Y_{n+1} = 0]$, $a_n \leqslant a_{n+1}$. La suite (a_n) est donc croissante. Puisqu'elle est majorée par 1, elle converge. La suite (d_n) converge par le même argument.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $1 = \mathbb{E}(Y_n) = b_n + 2c_n + 3d_n$, la suite (d_n) converge vers $\dfrac{1}{3}$. Puisque $a_n = 1 - b_n - c_n - d_n$, la suite (a_n) converge vers $\dfrac{2}{3}$.

9. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que l'événement $[T > n] = [Y_n = 1] \cup [Y_n = 2]$. En effet, si l'urne n ne contient pas que des boules de même couleur, c'est qu'il y a encore une ou deux boules blanches. Ainsi, par disjonction des cas, on trouve que :

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(Y_n = 1) + \mathbb{P}(Y_n = 2) = b_n + c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b. Remarquons que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

La variable T suit donc la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$. Elle admet une espérance, égale à 3.

Exercice 2 - Oral Agro 2021

1. a. La fonction f est bien dérivable sur $]1, +\infty[$ et, pour tout $t > 1$, $f'(t) = \dfrac{\ln(t) - 1}{\ln^2(t)}$.

Ainsi :

$$\forall t > 1,\ -t^2 f'(t) + tf(t) = \frac{-t^2\ln(t) + t^2 + t^2\ln(t)}{\ln^2(t)} = \left(\frac{t}{\ln(t)}\right)^2 = (f(t))^2.$$

La fonction f est donc solution de (E) sur $]1, +\infty[$.

b. Vérifions que $2f$ n'est pas solution de (E) :

$$\forall t > 1,\ -t^2(2f)'(t) + t(2f)(t) = 2\left(-t^2 f'(t) + tf(t)\right) = 2\,(f(t))^2 \neq (2f(t))^2.$$

La fonction $2f$ n'est pas solution donc $\mathcal{S}$ n'est pas un espace vectoriel.

2. Résoudre (E') sur I revient à résoudre l'équation différentielle : $\forall t \in I,\ z'(t) + \dfrac{1}{t}z(t) = \dfrac{1}{t^2}$. On trouve sans difficulté que l'ensemble des solutions de (E') est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{C + \ln t}{t} \end{array},\ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Notons $z : t \mapsto \dfrac{1}{y(t)}$. Puisque y est dérivable et ne s'annule pas sur I, z est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, t^2 z'(t) + tz(t) = -t^2\frac{y'(t)}{y^2(t)} + \frac{t}{y(t)} = 1.$$

On en déduit qu'il existe un réel C tel que : $\forall t \in I,\ \dfrac{1}{y(t)} = \dfrac{C + \ln(t)}{t}$, c'est-à-dire $y(t) = \dfrac{t}{C + \ln(t)}$.

4. a. Si y est une solution de (E) ne s'annulant pas sur I, alors y est de la forme trouvée à la question précédente.

Réciproquement, soit $y : t \mapsto \dfrac{t}{C + \ln(t)}$ où $C \in \mathbb{R}$. Si $C < 0$, alors y n'est pas définie sur I donc n'est pas solution de (E). Supposons $C \geqslant 0$. Dans ce cas, on prouve facilement que y est dérivable sur I et :

$$\begin{aligned}\forall t \in I,\ -t^2 y'(t) + ty(t) &= -t^2\frac{C + \ln(t) - 1}{(C + \ln(t))^2} + \frac{t^2}{C + \ln(t)} \\ &= \frac{-t^2(C + \ln(t) - 1) + t^2(C + \ln(t))}{(C + \ln(t))^2} \\ &= (y(t))^2.\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{C + \ln t} \end{array},\ C \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

b. Puisque la fonction nulle est solution de (E) mais pas dans $\mathcal{S}_1$, il vient que $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}$.

c. Supposons qu'il existe une solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I. Il existe alors $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $y(t) = \dfrac{t}{C + \ln(t)}$ pour tout $t \in I$. Puisque $y(e) = 3$, $C = \dfrac{3}{e} - 1 < 0$, ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I.

Exercice 3 - Oral Agro 2022

1. a. La fonction f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]\lim\limits_{0^+} f, \lim\limits_{+\infty} f[= \mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n admet un unique antécédent par f, i.e. l'équation (E_n) admet une unique solution. Puisque $f(0,1) < 1 = n < f(n)$, $x_n \in [0,1; n]$.

b.

```python
import numpy as np

def f(x,n):
    return np.log(x) + x - n

def dichotomie(a,b,n):
    eps = 10**(-3)
    while b-a > 2*eps:
        c = (a+b)/2
        if f(a,n)*f(c,n)<0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$. Puisque f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $x_{n+1} > x_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

2. a. La fonction $g : x \mapsto \ln x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

On en déduit que la fonction g est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. Elle atteint donc son maximum en 1, qui vaut -1. La fonction g est donc strictement négative, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x < x$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} + \ln\left(\frac{n}{2}\right) < n = f(x_n) < n + \ln(n) = f(n)$, on trouve que $\frac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$ par croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ par comparaison de limites.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2.b, on a

$$\frac{\ln(n) - \ln(2)}{n} \leqslant \frac{\ln(x_n)}{n} \leqslant \frac{\ln(n)}{n}.$$

On conclut par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0$. Puisque $\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln(x_n)}{n}$, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$, i.e. $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

b. D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$. Ainsi :

$$x_{n+1} - x_n = n + 1 - \ln(x_{n+1}) - n + \ln(x_n) = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

4. a. En utilisant la même idée qu'à la question précédente, on trouve que

$$u_n - 1 = \frac{n - x_n - \ln n}{\ln n} = \frac{\ln x_n - \ln n}{\ln n} = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

b. D'après la question précédente, $1 - u_n = -\frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} = -\frac{1}{\ln n}\ln\left(1 + \frac{x_n - n}{n}\right)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n - n}{n} = 0$, on trouve que $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n - x_n}{n \ln n} = \frac{1}{n} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

c. En écrivant $1 - u_n \frac{1}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, on trouve que :

$$x_n = n - \ln(n) u_n = n - \ln n\left(1 - \frac{1}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

* *
*