Exercice 1

Écrire une fonction `nb_car` en Python qui prend en argument une chaine de caractères et qui renvoie le nombre de caractères différents de la chaine. *Par exemple,* `nb_car("ananas")` *devra renvoyer 3 car la chaine* `ananas"` *est composée des caractères* `"a"`, `"n"` *et* `"s"`.

Exercice 2

Montrer que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{nx^n}{2^{n-1}}-\frac{n^2x^{n+1}}{3^n}\right)$$

converge pour tout réel x tel que $|x|<2$. Montrer que sa somme est égale à :

$$\frac{4x}{(2-x)^2}-\frac{6x^3}{(3-x)^3}-\frac{3x^2}{(3-x)^2}.$$

Exercice 3

1. Montrer que :

$$\forall k\geqslant 3,\ \frac{1}{k(\ln k)^2}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}.$$

2. En déduire que :

$$\forall n\geqslant 3,\ \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^2}\leqslant\frac{1}{\ln 2}.$$

3. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

Exercice 4

Un jeu se déroule comme suit : un joueur se trouve devant une infinité de portes numérotées $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Derrière chaque porte P_n ($n\in\mathbb{N}^*$), il y a un coffre, mais la probabilité que ce coffre contienne un trésor dépend de la porte. On sait que :

- derrière chaque porte P_n (avec $n\in\mathbb{N}^*$), il y a un trésor avec une probabilité $p_n=\dfrac{2}{3^n}$;
- le joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir face. S'il a effectué n lancers, il ouvre la porte P_n.
- le joueur décide de vérifier si le coffre contient un trésor.

On définit les événements T : “Le joueur trouve un trésor” et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, C_n : “le joueur ouvre la porte P_n” et F_n : “le joueur obtient face au n-ème lancer de la pièce”.

1. Quelle est la probabilité que le joueur trouve un trésor en ouvrant la porte P_1 ?
2. a. Justifier que la famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne constitue pas un système complet d'événements.

   b. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(C_n)$. Que peut-on en déduire ?
3. En utilisant la formule des probabilités totales, calculez la probabilité que le joueur trouve un trésor.
4. Sachant que le joueur a trouvé un trésor, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la porte P_n pour $n\in\mathbb{N}^*$?
5. Sachant que le joueur n'a pas trouvé de trésor, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la porte P_n pour $n\in\mathbb{N}^*$?

* *
*