Probabilités sur un univers fini

Exercice 1. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Un fumeur décide d'arrêter de fumer (au jour 1). S'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est de $0,3$. En revanche, s'il succombe ce jour-là, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $0,9$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n l'événement "la personne fume le n- ème jour" et $p_n = \mathbb{P}(\overline{F_n})$.

Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique. Quelle est la probabilité qu'il ne fume pas le n-ème jour ($n \in \mathbb{N}^*$), en supposant qu'il ne fume pas le premier jour ?

Exercice 2. Dénombrement ♡ [Corrigé] ★★☆

Déterminer la probabilité qu'une main de 5 cartes au poker (jeu de 52 cartes) contienne exactement :

(i) un carré (quatre cartes de même hauteur)

(ii) un full (brelan + paire).

(iii) un brelan (trois cartes de même hauteur) mais pas un carré ni un full

(iv) une double paire (deux paires distinctes) mais pas un carré ou un full

(v) une paire (deux cartes de même hauteur) mais aucune des mains ci-dessus.

Exercice 3. Paradoxe des anniversaires [Corrigé] ★★☆

1. Déterminer la probabilité qu'au moins deux élèves d'une classe de n élèves aient la même date d'anniversaire.

   On supposera toutes les années non bissextiles : prendre en compte un tel phénomène serait coûteux en raisonnement mais ne modifierait que très peu les résultats.

2. Écrire une fonction en `Python` qui renvoie le nombre minimum d'élèves nécessaire pour que cette probabilité dépasse une probabilité p passée en argument.

   On testera avec $p = 0,5$ et $p = 0,9$.

Exercice 4. Paradoxe des maladies rares ♡ [Corrigé] ★★☆

Une maladie rare touche un individu sur 10000. Un laboratoire propose un test de dépistage de cette maladie. Des tests randomisés ont permis d'établir que :

- lorsque l'individu est sain, le test est négatif dans $99,9\%$ des cas,
- lorsque l'individu est malade, le test est positif dans 99% des cas.

Peut-on avoir confiance en ce test ? Dans quelle(s) mesure(s) ?

Exercice 5. [Corrigé] ★★★

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance n fois une pièce équilibrée, de manière indépendante. Démontrer que les événements A_n : "on obtient au plus un pile" et B_n : "on obtient au moins un pile et un face" sont indépendants si, et seulement si, $n = 3$.

Exercice 6. Monty Hall Problem [Corrigé] ★★★

Sonia joue à un jeu télévisé. Corinne, l'animatrice du jeu, lui propose de choisir trois portes derrière lesquelles il y a respectivement deux chèvres et un voiture. Sonia choisit l'une des portes sans l'ouvrir. Corinne regarde alors derrière les deux autres portes restantes et ouvre celle derrière laquelle se trouve une chèvre. Sonia a alors l'ultime de chance de changer d'avis pour gagner la voiture.

Devrait-elle ouvrir la porte choisie ou bien devrait-elle revenir sur son choix ?

Probabilités sur un univers dénombrable

Exercice 7. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 0$.

Exercice 8. ♡ [Corrigé] ★☆☆

On dispose d'une infinité d'urnes numérotées, de telle sorte que l'urne numérotée $k \in \mathbb{N}^*$ soit constituée de 3^k boules (indiscernables au toucher) dont une seule blanche. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'urne k est choisie avec la probabilité $\dfrac{2}{3^k}$. Vérifier qu'il est presque-sûr de choisir une urne puis déterminer la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne choisie.

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

On dispose initialement d'une urne constituée d'une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers de la pièce et on suit le protocole suivant :

- si on obtient "face", on ajoute une boule noire dans l'urne ;
- si on obtient "pile", on tire une boule dans l'urne et on arrête l'expérience.

On admettra que, pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et sa somme vaut $-\ln(1-x)$.

1. Montrer que l'expérience s'arrête presque-sûrement.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice 10. ♡ [Corrigé] ★★☆

Dans une population, la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants ($n \in \mathbb{N}$) est égale à :

$$p_n = a\frac{2^n}{n!} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+^*.$$

1. Déterminer la valeur du réel a.
2. On suppose qu'il est équiprobable d'obtenir un garçon ou une fille.
   a. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un garçon.
   b. On suppose qu'une famille a exactement un garçon.
   Quelle est la probabilité que cette famille ait exactement deux enfants ?

Exercice 11. [Corrigé] ★★☆

Deux joueurs A et B jouent. Le joueur A lance deux fois une pièce équilibrée tandis que le joueur B ne lance qu'une fois une pièce qui fait pile avec la probabilité p. Le gagnant est celui qui fait le plus de faces. Tant qu'il y a égalité, ils rejouent.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait égalité au premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?
3. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?
4. Existe-t-il un réel p tel que le jeu soit équitable ? Qui a le plus de chance de gagner ?

Exercice 12. Continuité monotone [Corrigé] ★★★

1. a. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements (pour l'inclusion), i.e. vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}.$$

   (i) On pose $B_0 = A_0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$.
   Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} B_k$ et $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ en fonction des événements de la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

   (ii) En déduire la propriété de **continuité croissante** :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

   b. Déduire de ce qui précède que, pour tout suite quelconque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

2. a. Montrer que, pour tout suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on a la propriété de **continuité décroissante** :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

   b. Montrer que, pour tout suite quelconque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

3. On lance indéfiniment un dé équilibré. Montrer que l'événement “on n'obtient jamais de 6” est de probabilité nulle.

Exercice 13. [Corrigé] ★★★

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir “pile” est $p \in]0,1[$.

1. Soit $n \geqslant 2$. Calculer la probabilité de l'événement A_n : “la séquence PF apparaît pour la première fois (dans cet ordre) aux lancers $n-1$ et n”.
2. Quelle est la probabilité de l'événement “la séquence PF apparait au moins une fois” ?
3. Quelle est la probabilité de l'événement “la séquence PP apparaît sans que la séquence PF ne soit apparue auparavant” ?

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]
Soit $n \geqslant 2$. Puisque $(F_{n-1}, \overline{F_{n-1}})$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_n = \mathbb{P}(F_{n-1})\mathbb{P}_{F_{n-1}}(\overline{F_n}) + \mathbb{P}(\overline{F_{n-1}})\mathbb{P}_{\overline{F_{n-1}}}(\overline{F_n}) = -0,6p_{n-1} + 0,9.$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.
Après calculs, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{9}{16} + (-0,6)^{n-1}\frac{7}{16}.$$

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]
Commençons par remarquer qu'il y a $\binom{52}{5}$ mains de cinq cartes, toutes équiprobables.

(i) La probabilité qu'une main contienne un carré, égale à $\dfrac{13\times 48}{\binom{52}{5}}$.

En effet, choisir une main contenant un carré revient à choisir :

- la hauteur du carré (parmi les 13) ; il y a $\binom{13}{1}$ façons de la choisir ;
- les quatre couleurs de cette hauteur ; il y a $\binom{4}{4} = 1$ façons de les choisir ;
- la cinquième carte (parmi les 48 restantes) : il y a $\binom{48}{1} = 48$ façons de la choisir.

(ii) La probabilité qu'une main exactement un full, égale à $\dfrac{13\times\binom{4}{3}\times 12\times\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$.

En effet, choisir une main contenant un full revient à choisir :

- la hauteur du brelan (parmi les 13) ; il y a $\binom{13}{1} = 13$ façons de la choisir ;
- les trois couleurs du brelan (parmi les 4) ; il y a $\binom{4}{3}$ façons de les choisir ;
- la hauteur de la paire (parmi les 12) ; il y a $\binom{12}{1} = 12$ façons de la choisir ;
- les deux couleurs de la paire (parmi les 4) ; il y a $\binom{4}{2}$ façons de les choisir ;

(iii) La probabilité qu'une main contienne exactement un brelan est $\dfrac{13\times\binom{4}{3}\times\binom{12}{2}\times 4^2}{\binom{52}{5}}$.
En effet, choisir une main contenant exactement un brelan revient à choisir :

- la hauteur du brelan (parmi les 13) ; il y a $\binom{13}{1} = 13$ façons de la choisir ;
- les trois couleurs du brelan (parmi les 4) ; il y a $\binom{4}{3}$ façons de les choisir ;
- les deux hauteurs distinctes - pour éviter de compter les brelan - (parmi les 12 restantes) ; il y a $\binom{12}{2}$ façons de les choisir ;
- la couleur de ces deux cartes ; il y a $\binom{4}{1} = 4$ façons de choisir chacune des ces couleurs.

(iv) La probabilité qu'une main contienne exactement une double paire est $\dfrac{\binom{13}{2}\times\binom{4}{2}^2\times 44}{\binom{52}{5}}$.
En effet, choisir une main (de cinq cartes) contenant exactement une double paire revient à choisir :

- les deux hauteurs de la double paire ; il y a $\binom{13}{2}$ façons de la choisir ;
- les deux couleurs de chaque paire ; il y a $\binom{4}{2}$ façons de les choisir (pour chaque paire);
- la cinquième carte de hauteur distincte de celles des deux paires ; il y a $\binom{44}{1} = 44$ façons de les choisir.

Attention ! *L'erreur classique de dénombrement est ici de proposer le nombre*

$$\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{1}\binom{4}{2}\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}},$$

deux fois plus grand que la probabilité calculée ci-dessus.

L'erreur vient du fait que le calcul du produit $\binom{13}{1}\binom{12}{1}$ induit un ordre sur la hauteur des deux paires alors qu'une main est non ordonnée. On compte alors deux fois plus de doubles paires qu'il n'en y a réellement.

(v) La probabilité qu'une main contienne exactement une paire est égale à :

$$\frac{13\times\binom{4}{2}\times\binom{12}{3}4^3}{\binom{52}{5}}$$

En effet, choisir une main (de cinq cartes) contenant exactement une paire revient à choisir :

- la hauteur de la paire ; il y a $\binom{13}{1} = 13$ façons de la choisir ;
- les deux couleurs de la paire ; il y a $\binom{4}{2}$ façons de les choisir ;
- trois cartes de hauteurs distinctes (et distinctes de la hauteur de la paire) ; il y a $\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3$ façons de les choisir.

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

1. Il y a 365^n n-uplets de dates d'anniversaire possible pour une classe de n élèves.
   Il y a A_{365}^n des ces n-uplets correspondant à des dates d'anniversaires toutes distinctes.
   Étant en situation d'équiprobabilité, la probabilité qu'aucun élève de la classe ne partage sa date d'anniversaire avec un camarade est donc égale à $\dfrac{A_{365}^n}{365^n}$. La probabilité qu'au moins deux élèves d'une classe de n élèves aient la même date d'anniversaire est donc :
   $$1-\frac{A_{365}^n}{365^n}=1-\frac{365!}{(365-n)!365^n}.$$

2. Il est hors de question de calculer la valeur ci-dessus à l'aide de factoriels qui feraient exploser le nombre de calculs. Remarquons que la probabilité précédente est égale à :
   $$1-\prod_{k=0}^{n-1}\frac{365-k}{365}.$$
   Le principe de l'algorithme ci-dessous est donc de calculer le produit de proche en proche jusqu'à ce que la probabilité dépasse p.

```
def test(p):
    n = 0
    prod = 1
    while 1 - prod < p:
        prod *= (365-n)/365
        n += 1
    return n
```

   Un test sur machine permet d'affirmer qu'il suffit de 23 élèves (resp. 41) pour que la probablité qu'au moins deux personnes partagent la même date d'anniversaire dépasse 0,5 (resp. 0,9).

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

Notons S l'événement "l'individu est sain" et N l'événement "le test est négatif".

D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}_S(N)=0,999$, $\mathbb{P}_{\overline{S}}(\overline{N})=0,99$, et $\mathbb{P}(\overline{S})=0,0001$.

Calculons la probabilité que l'individu soit malade (resp. sain) sachant que le test est positif (resp. négatif). Il suffit d'appliquer la formule de Bayes avec $(S,\overline{S})$ pour système complet :

$$\mathbb{P}_{\overline{N}}(\overline{S})=\frac{\mathbb{P}(\overline{N}\cap\overline{S})}{\mathbb{P}(\overline{N})}=\frac{\mathbb{P}(\overline{S})\mathbb{P}_{\overline{S}}(\overline{N})}{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}_S(\overline{N})+\mathbb{P}(\overline{S})\mathbb{P}_{\overline{S}}(\overline{N})}\approx 9\%.$$

Le test fourni énormément de faux positifs (91 %), un test positif n'est donc pas fiable.

$$\mathbb{P}_N(S)=\frac{\mathbb{P}(N\cap S)}{\mathbb{P}(N)}=\frac{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}_S(N)}{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}_S(N)+\mathbb{P}(\overline{S})\mathbb{P}_{\overline{S}}(N)}\approx 100\%.$$

Le test ne fournit pratiquement aucun faux négatif, un test négatif est donc fiable.

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

On note, pour tout $k\in\mathbb{N}$, F_k (resp. P_k) l'événement "on obtient face au k-ème lancer.

L'événement A_n est la réunion de deux événements disjoints, celui où on n'obtient que des faces et celui où on obtient $n-1$ faces et un pile. Ce dernier événement s'écrit comme la réunion disjointe de n 'événements dont les probabilités sont toutes égales à $\mathbb{P}(P_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n)$.

Par disjonction, on trouve que :

$$\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(F_1\cap\cdots\cap F_n)+n\mathbb{P}(P_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n)=\frac{n+1}{2^n}.$$

De plus, il vient immédiatement que :

$$\mathbb{P}(B_n)=1-\mathbb{P}(F_1\cap\cdots\cap F_n)-\mathbb{P}(P_1\cap\cdots\cap P_n)=1-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

L'événement $A_n\cap B_n$ correspond à obtenir exactement un pile et $n-1$ faces, dont on a déjà calculé la probabilité :

$$\mathbb{P}(A_n\cap B_n)=n\mathbb{P}(P_1\cap F_2\cap F_n)=\frac{n}{2^n}.$$

Ainsi, A_n et B_n sont indépendants si, et seulement si :

$$\mathbb{P}(A_n\cap B_n)=\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B_n)\Leftrightarrow n+1=2^{n-1}$$

Puisque $2^{n-1}>n+1$ pour tout $n\geqslant 4$ (cela se prouve facilement par récurrence), A_n et B_n sont indépendants si, et seulement si, $n=3$ (après avoir éliminé les cas $n=1$ et $n=2$ par un rapide calcul).

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

Supposons sans perdre de généralité que Sonia ait choisi la porte 1 et que Corinne ait ouvert la porte 2. Pour $i\in\{1;2;3\}$, notons V_i l'événement "la voiture est derrière la porte i" et C_i l'événement "Corinne a ouvert la porte i pour révéler une chèvre".

D'après la formule de Bayes, avec le système complet d'événements (V_1,V_2,V_3), on a :

$$\mathbb{P}_{C_2}(V_1)=\frac{\mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(C_2)}{\mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(C_2)+\mathbb{P}(V_2)\mathbb{P}_{V_2}(C_2)+\mathbb{P}(V_3)\mathbb{P}_{V_3}(C_2)}=\frac{\frac13\times\frac12}{\frac13\times\frac12+\frac13\times 0+\frac13\times 1}=\frac13.$$

La probabilité que Sonia a de gagner si elle ne change pas de porte est donc égale à $\dfrac13$. Sonia a donc intérêt à changer son choix de porte.

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

Puisque $(\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\})$ converge (et sa somme vaut 1). On en déduit que son terme général converge vers 0, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 0$.

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

Notons B l'événement "on tire une boule blanche" et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, U_k l'événement "on choisit l'urne k".

La famille $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système quasi-complet d'événements car les événements sont deux-à-deux disjoints et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{3^k} = 1 \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité).}$$

D'après la formule des probabilités totales, on a (la série ci-dessous converge par σ-additivité)

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U_k)\mathbb{P}_{U_k}(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{3^k} \times \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{9^k} = \frac{1}{4}.$$

La probabilité de tirer une boule blanche est donc égale à $\frac{1}{4}$.

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note F_k (resp. P_k) l'événement "on obtient face (resp. pile) au k-ème lancer et A_k l'événement "l'expérience s'arrête après le k-lancer".

   On note A l'événement "l'expérience s'arrête". On a alors :

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \text{ où } A_n = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n.$$

   Puisque les événements de la famille $(A_n)_{n\in N*}$ sont deux-à-deux disjoints, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

   L'expérience s'arrête donc presque-sûrement.

2. On note B l'événement "on tire une boule blanche à la fin de l'expérience".

   Puisque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un système quasi-complet d'événements (c'est ce qu'on a prouvé à la question précédente), la formule des probabilités totales nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln 2 \quad \text{(d'après le résultat admis dans l'énoncé).}
\end{aligned}$$

   La probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience est égale à $\ln 2$.

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons E_n l'événement "la famille a n enfants". Puisque $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ (la série converge par σ-additivité). Puisque la série exponentielle $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n}{n!}$ converge et a pour somme e^2, $a = e^{-2}$.

2. a. Notons G l'événement "la famille obtient au moins un garçon" et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, F_k l'événement "le k-ème enfant de la famille est une fille".

   Toujours d'après la formule des probabilités totales avec le même système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{G}\right) \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}_{E_n}\left(\overline{G}\right) \text{ la série converge par } \sigma\text{-additivité} \\
&= 1 - \mathbb{P}(E_0) - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}_{E_n}(F_1 \cap \cdots \cap F_n) \\
&= 1 - a - \sum_{n=1}^{+\infty} a\frac{2^n}{n!}\frac{1}{2^n} \text{ par indépendance du sexe des enfants} \\
&= 1 - a\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= 1 - e^{-1}.
\end{aligned}$$

b. Notons G_1 l'événement "la famille a exactement un garçon" et appliquons la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{G_1}(E_2) = \frac{\mathbb{P}(G_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(G_1)}$$

Or $\mathbb{P}(G_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}_{E_2}(G_1) = 2e^{-2}\mathbb{P}_{E_2}\left((F_1 \cap \overline{F_2}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2)\right) = e^{-2}$, et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}_{E_n}(G_1) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2}\frac{2^n}{n!} \times n\mathbb{P}_{E_n}\left(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2}\frac{1}{(n-1)!} \\
&= e^{-2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&= e^{-1},
\end{aligned}$$

la deuxième égalité étant obtenue en remarquant que, sachant E_n, G_1 s'écrit comme la réunion disjointe de n événéments ayant la même probabilité que $\overline{F_1} \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$. On pouvait aussi invoquer que, sachant E_n, le nombre de garçons d'une famille suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

La probabilité que la famille ait exactement deux enfants, sachant qu'elle a un garçon est égale à e^{-1}.

Corrigé de l'exercice 11. [Énoncé]

1. On note F^B l'événement "le joueur B obtient face à son lancer" et F_1^A (resp. F_2^A) l'événement "le joueur A obtient face au premier (resp. second) lancer".

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement "il y a égalité au tour n".

   Puisque :

$$E_1 = \left(F_1^A \cap \overline{F_2^A} \cap F^B\right) \cup \left(\overline{F_1^A} \cap F_2^A \cap F^B\right) \cup \left(\overline{F_1^A} \cap \overline{F_2^A} \cap \overline{F^B}\right),$$

   la probabilité q' qu'il y ait égalité au premier tour est :

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{4}\left[2(1-p)+p\right] = \frac{2-p}{4}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'événement S_n correspondant à l'arrêt du jeu à l'issue du tour n vérifie :

$$S_n = \left(\bigcap_{p=1}^{n-1} E_p\right) \cap \overline{E_n}$$

   L'événement S correspondant à l'arrêt du jeu vérifie alors :

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} S_n.$$

   Par indépendance des tours de jeu, il vient que $\mathbb{P}(S_n) = p'q'^{n-1}$ où $p' = 1 - q' = \frac{2+p}{4}$.

   Puisque les événements de la famille $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux-à-deux disjoints, on a, par σ-additivité :

$$\mathbb{P}(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p'q'^{n-1} = 1 \quad \text{car } q' \neq 1,$$

   (la série convergeant par σ-additivité).

   La probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est donc nulle.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement "le joueur A gagne la n-ème manche".

   L'événement (qu'on notera encore A) correspondant à la victoire du joueur A vérifie :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\left(\bigcap_{p=1}^{n-1} E_p\right) \cap A_n\right).$$

   Ainsi, en reprenant le même raisonnement qu'à la question précédente, on trouve par σ-additivité que :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2p+1}{4}q'^{n-1} = \frac{2p+1}{p+2}$$

   La probabilité que le joueur A gagne est donc égale à $\frac{2p+1}{p+2}$.

4. Le jeu est équitable si, et seulement si $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, i.e. $p = 0$, ce qui revient à ce que le joueur B obtienne toujours face.

Corrigé de l'exercice 12. [Énoncé]

1. a. (i) Un raisonnement par récurrence permet de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_n$.

Remarquons que :

$$x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x \in B_n$$
$$\Leftrightarrow x \in A_0 \text{ ou } \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x \in A_n \setminus A_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

On en déduit que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

(ii) Puisque les événements de la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux-à-deux disjoints, on a, par σ-additivité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k).$$

On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

b. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\tilde{A}_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$. La suite $\left(\tilde{A}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante pour l'inclusion, on a, par continuité croissante :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\tilde{A}_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \tilde{A}_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

2. a. La suite $\left(\overline{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante pour l'inclusion, on a, d'après la première partie :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right).$$

soit, en passant au complémentaire :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

b. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\tilde{A}_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$.

La suite $\left(\tilde{A}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante pour l'inclusion et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \bigcap_{k=0}^{n} \tilde{A}_k = \bigcap_{k=0}^{n} A_k \quad \text{et} \quad \bigcap_{n=0}^{+\infty} \tilde{A}_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n,$$

on trouve, par continuité décroissante :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\tilde{A}_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \tilde{A}_n\right). = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons A_n l'événement "on n'obtient pas de six au n-ème lancer".

L'événement "on n'obtient jamais de 6" correspond donc à $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Remarquons que par indépendance des lancers, on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

D'après le corollaire de la continuité décroissante (question 2.b), on trouve que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = 0$$

L'événement "on n'obtient jamais de 6" est donc de probabilité nulle.

Corrigé de l'exercice 13. [Énoncé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n (resp. P_n) l'événement "on obtient face (resp. pile) au n-ème lancer".

   On remarque que $A_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} (F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n)$.

   Notons $q = 1 - p$. Puisque A_n est la réunion d'événements deux-à-deux disjoints, on obtient par σ-additivité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} (F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p^{n-k} q^k \\
&= p^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k \\
&= \begin{cases} (n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \text{si } p = q \\ pq\dfrac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q} & \text{si } p \neq q \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Notons A l'événement "la séquence PF apparait au moins une fois" ? Puisque $A = \bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n$ et puisque cette réunion est celle d'événements disjoints, on a, par σ-additivité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-addivité)} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } p = q \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} pq\frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q} & \text{si } p \neq q \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \text{si } p = q \\ \displaystyle\frac{pq}{p-q}\sum_{n=1}^{+\infty} p^n - q^n & \text{si } p \neq q \end{cases}
\end{aligned}$$

   Puisque $|p| < 1$ et $|q| < 1$ les séries géométriques $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} q^n$ convergent et ainsi $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p^n - q^n$ converge par linéarité. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \begin{cases} \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} & \text{si } p = q \\ \dfrac{pq}{p-q}\left(p\dfrac{1}{1-p} - q\dfrac{1}{1-q}\right) & \text{si } p \neq q \end{cases} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

   L'événement A est donc quasi-certain.

3. Pour tout $n \geqslant 2$, on note $B_n = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n$.

   En notant B l'événement "la séquence PP apparaît sans que la séquence PF ne soit apparue auparavant", on a $B = \bigcup_{n=2}^{+\infty} B_n$

   En appliquant le raisonnement de la question précédente, on trouve :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} p^2 q^{n-2} = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = p.$$

   L'événement B a donc pour probabilité p.