**Semaines 5 et 6**
du lundi 9 au vendredi 20 octobre 2023

**Chapitre** : Nombres complexes (révisions de sup)
**Chapitre** : Polynômes

- **Mots-clé du cours :**
  - Notation $X$ pour désigner la fonction $x \mapsto x$.
  - Généralités : opérations sur les polynômes (combinaison linéaire, produit, composée), unicité de l'écriture d'un polynôme, coefficient dominant, degré (définition, liens avec les opérations sur les polynômes), notations $K[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ (tout le chapitre se limite à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
  - Racine et factorisation : définition d'une racine, caractérisation, généralisation à plusieurs racines distinctes, ordre de multiplicité d'une racine (la caractérisation par les dérivées successives est hors-programme)
  - Polynômes et nombres complexes : conjugué d'une racine d'un polynôme à coefficients réels, théorème de d'Alembert-Gauss, factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ (la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est hors-programme).

**Chapitre** : Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- **Mots-clé du cours :**
  - espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ : définition, premières propriétés de calcul,
  - sous-espaces vectoriels : définition, caractérisation, intersection de sous-espaces vectoriels, sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs,
  - famille génératrice d'un espace vectoriel, famille finie, propriétés usuelles,
  - base : définition, caractérisation d'une base par l'existence d'une unique décomposition, base canonique,
  - dimension : définition, notion de droite, de plan, d'hyperplan, théorème de la base incomplète, caractérisation d'une base par le nombre de vecteurs d'une famille libre, par une famille génératrice, dimension d'un sous-espace vectoriel,
  - rang : définition, propriétés d'invariance
  - espace vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (nous verrons plus tard la structure d'espaces vectoriels de l'ensemble des applications linéaires de $E$ vers $F$).

**Résultats à connaitre :**

☐ degré d'une somme, du produit, de la composée de deux polynômes, degré du produit par un scalaire,

☐ caractérisation d'une racine

☐ caractérisation d'un nombre fini de racines deux-à-deux distinctes

☐ caractérisation d'une racine multiple

☐ Majoration du nombre de racines d'un polynôme par son degré

☐ théorème de d'Alembert-Gauss

☐ factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

☐ nombre de racines complexes comptées avec multiplicité

☐ caractérisation d'un sous-espace vectoriel,

☐ intersection de sous-espaces vectoriels,

☐ si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, les vecteurs $e_k$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel $E$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ (*la démonstration est exigible*),

- ☐ toute famille finie de polynômes non nuls de degrés étagés est libre (*la démonstration est exigible*),
- ☐ caractérisation d'une base par l'existence d'une unique décomposition,
- ☐ toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension fini ont même cardinal.
- ☐ théorème de la base incomplète (+ version famille génératrice)
- ☐ caractérisation d'une base par le nombre de vecteurs d'une famille libre,
- ☐ caractérisation d'une famille libre ou génératrice par son rang, (*la démonstration est exigible*)
- ☐ invariance du rang d'une famille de vecteurs par les opérations élémentaires.