Questions de cours

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre complexe α soit racine multiple d'un polynôme P.

2. Énoncer la formule des probabilités totales.

3. Énoncer le critère de comparaison des séries à termes positifs.

Exercice 1

Rappel : *la méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant, de proche en proche, l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point :*

$$\textit{en tout point } a,\ \varphi(a+h) \approx \varphi(a) + h\varphi'(a) \textit{ lorsque } h \textit{ est petit.}$$

On admet que l'équation différentielle :

$$(E) : \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = \frac{1}{1+ty(t)}$$

admet une unique solution y sur $[0,1]$ vérifiant $y(0)=0$. En subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en 1001 points équi-répartis $(t_k)_{0\leqslant k\leqslant 1000}$, on cherche à approcher les réels $y(t_k)$ par une suite finie $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant 1000}$ par la méthode d'Euler.

1. Préciser la valeur de y_0 puis exprimer, pour tout $k \in [\![0,999]\!]$, y_{k+1} en fonction de y_k et d'un réel h à définir.

2. En déduire un script Python représentant graphiquement le tracé de l'approximation de la fonction y par la méthode d'Euler.

Exercice 2

Un gardien doit ouvrir une porte dans le noir. Il possède un trousseau de 10 clés, une seule convenant. Lorsqu'il est ivre, il essaie une clé, puis agite le trousseau et recommence (sans se rappeler des clés déjà testées). Lorsqu'il est sobre, il essaie les clés les unes après les autres (sans réutiliser celles déjà testées). On sait que le gardien est ivre un jour sur trois. On note S l'événement "le gardien est sobre", et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, E_k l'événement "le k-ème essai du gardien est un échec" et T_k l'événement "le gardien ouvre la porte à son k-ème essai".

1. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité $\mathbb{P}_S(T_k)$.
   b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{S}}(T_k)$.

2. Un jour, le gardien réussit à ouvrir la porte à sa deuxième tentative ; quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

Exercice 3

On considère une pièce de monnaie pouvant tomber sur pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et sur face avec la probabilité $1-p$. On lance indéfiniment cette pièce. Ces lancers sont supposés mutuellement indépendants.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'événement "on obtient pile au k-ème lancer", F_k l'événement "on obtient face au k-ème lancer", X_k l'événement "pile apparait pour la première fois au k-ème lancer" et Y_k l'événement "on a obtenu pour la première fois deux piles consécutifs en k lancers". *Par exemple, si on obtient $F_1\cap F_2\cap P_3\cap F_4\cap P_5\cap P_6\cap F_7\cap P_8\cap P_9\cap F_{10}$, alors les événements X_3 et Y_6 sont réalisés.*

1. Calculer $\mathbb{P}(X_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap Y_{k+2})$ puis justifier les égalités suivantes :

$$\mathbb{P}_{F_1}(Y_{k+2}) = \mathbb{P}(Y_{k+1}) \text{ et } \mathbb{P}_{P_1\cap F_2}(Y_{k+2}) = \mathbb{P}(Y_k)$$

   b. À l'aide de la famille d'événements $(F_1, P_1\cap P_2, P_1\cap F_2)$, démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y_{k+2}) = (1-p)\mathbb{P}(Y_{k+1}) + p(1-p)\mathbb{P}(Y_k).$$

3. a. Démontrer que le polynôme $R = X^2 - (1-p)X - p(1-p)$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2.
   b. Montrer que ces deux racines appartiennent à $]-1,1[$ (*on pourra évaluer R en -1, 0 et 1*).
   c. Exprimer la somme $r_1 + r_2$ et le produit $r_1 r_2$ en fonction de p.
4. Justifier qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y_k) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k$.
5. Montrer que $\lambda r_1 + \mu r_2 = 0,\ \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 = p^2,\ \lambda + \mu = \dfrac{p}{1-p}$ et $\lambda r_2 + \mu r_1 = p$.
6. Montrer par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_k) = 1$. Que peut-on en déduire ?
7. Démontrer que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y_k) = \dfrac{1+p}{p^2}$.
   [5/2 uniquement] Interpréter ce résultat.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ suivant :

$$P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\cot = \dfrac{\cos}{\sin}$ (appelées fonction *cotangente*) puis montrer qu'elle réalise une bijection entre $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et un intervalle à déterminer.
2. À l'aide de la formule de Moivre et celle du triangle de Pascal, montrer que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \sin\left((2n+1)\alpha\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2(n-k)} \alpha \sin^{2k+1} \alpha.$$

3. En déduire que, pour tout réel $\alpha \neq 0\ [\pi]$, on a :

$$\sin\left((2n+1)\alpha\right) = (\sin\alpha)^{2n+1} P\left(\cot^2 \alpha\right).$$

4. Proposer alors n racines réelles distinctes de P, qu'on cherchera sous la forme $\cot^2 \beta_k$ où les réels β_k sont à déterminer.
5. Factoriser alors P.

Exercice 5

Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

1. Justifier rigoureusement que :

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\ln(a)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}.$$

*   *
*