## Exercice 1

1. Puisque y(0) = 0,  $y_0 = 0$ . On pose  $h = \frac{1}{1000}$ . Soit  $k \in [0, 999]$ . En approchant  $y'(t_k)$  par  $\frac{y(t_{k+1} - y(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$ , on trouve que  $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{1}{1 + t_k y_k}$ . On en déduit la relation de récurrence :

$$\forall k \in [0,999], \ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1 + t_k y_k}.$$

import matplotlib.pyplot as plt
t, y = [0], [0]
h = 1/1000
for k in range(1000):
 y.append(y[k] + h/(1+t[k]\*y[k]))
 t.append(t[k] + h)
plt.plot(t,y)
plt.show()

### Exercice 2

1. a. Puisque le gardien ne réutilise pas une clé déjà utilisée lorsqu'il est sobre, il réalise au plus 10 essais. Ainsi :

$$\forall k > 10, \ P_S(T_k) = 0.$$

Soit  $k \in [1, 10]$ . Remarquons que :

$$T_k = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} E_j\right) \cap \overline{E_k}. \quad (\star)$$

En appliquant la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\begin{split} \mathbb{P}_S(T_k) &= \mathbb{P}_S(E_1) \mathbb{P}_{S \cap E_1}(E_2) \cdots \mathbb{P}_{S \cap E_1 \cap \cdots \cap E_{k-2}}(E_{k-1}) \mathbb{P}_{S \cap E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}}(E_k) \\ &= \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \cdot \times \frac{9 - (k-2)}{10 - (k-2)} \times \frac{1}{10 - (k-1)} \\ &= \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \cdot \times \frac{11 - k}{12 - k} \times \frac{1}{11 - k} \\ &= \frac{1}{10} \quad \text{(en reconnaissant un produit télescopique)}. \end{split}$$

Ainsi:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}_S(T_k) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } k \in [1, 10] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b. La relation de la question précédente est encore valide pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  lorsque le gardien est ivre. En appliquant la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \mathbb{P}_{\overline{S}}(T_k) = \mathbb{P}_{\overline{S}}(E_1) \mathbb{P}_{\overline{S} \cap E_1}(E_2) \cdots \mathbb{P}_{\overline{S} \cap E_1 \cap \dots \cap E_{k-2}}(E_{k-1}) \mathbb{P}_{\overline{S} \cap E_1 \cap \dots \cap E_{k-1}}(E_k)$$
$$= \left[ \left( \frac{9}{10} \right)^{k-1} \times \frac{1}{10} \right].$$

2. On cherche à calculer  $\mathbb{P}_{T_2}(\overline{S})$ . Puisque  $(S, \overline{S})$  forme un système complet d'événements, la formule de Bayes assure que :

formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{split} \mathbb{P}_{T_2}\left(\overline{S}\right) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{S})\mathbb{P}_{\overline{S}}(T_2)}{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}_S(T_2) + \mathbb{P}(\overline{S})\mathbb{P}_{\overline{S}}(T_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{9}{100}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{100}} \\ &= \frac{9}{29}. \end{split}$$

# Exercice 3

1. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $X_k = F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$ , on trouve, par indépendance des lancers, que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X_k) = \mathbb{P}(F_1) \dots \mathbb{P}(F_{k-1}) \mathbb{P}(P_k) = p(1-p)^{k-1}.$$

2. a. L'événement  $P_1 \cap P_2 \cap Y_{k+2}$  est impossible : puisque  $k+2 \ge 3$ , il est impossible d'obtenir les deux premiers piles consécutifs aux tirages k+1 et k+2 alors qu'on a obtenu pile aux deux premiers tirages. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap Y_{k+2}) = 0.}$$

Sachant qu'on obtient face au premier lancer, réaliser l'événement  $Y_{k+2}$  revient à réinitialiser l'expérience et à obtenir pour la première fois le deuxième pile consécutif en k+1 tirages. Ainsi :

$$\mathbb{P}_{F_1}(Y_{k+2}) = \mathbb{P}(Y_{k+1}).$$

Sachant qu'on obtient pile puis face aux deux premiers lancers, réaliser l'événement  $Y_{k+2}$  revient à réinitialiser l'expérience et à obtenir pour la première fois le deuxième pile consécutif en k tirages. Ainsi :

$$\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(Y_{k+2}) = \mathbb{P}(Y_k).$$

b. Les événements de la famille  $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$  sont deux à deux disjoints. De plus, on trouve que leur réunion constitue l'univers :

$$F_1 \cup (P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2) = F_1 \cup (P_1 \cap (P_2 \cup F_2)) = F_1 \cup P_1 = \Omega$$

On en déduit que la famille  $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$  constitue un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ 

$$\begin{split} & \mathbb{P}(Y_{k+2}) \\ & = \mathbb{P}(F_1 \cap Y_{k+2}) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap Y_{k+2}) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap Y_{k+2}) \\ & = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(Y_{k+2}) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2)\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(Y_{k+2}) \\ & = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(Y_{k+1}) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(Y_{k+2}) \text{ par indépendance des lancers} \\ & = \boxed{(1-p)\mathbb{P}(Y_{k+1}) + p(1-p)\mathbb{P}(Y_k).} \end{split}$$

3. a. Le discriminant  $\Delta$  du polynôme  $R = X^2 - (1-p)X - p(1-p)$  est :

$$\Delta = (1 - p)^2 + 4p(1 - p) > 0 \quad (\text{car } 0$$

On en déduit que le polynôme R admet deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{1 - p - \sqrt{\Delta}}{2} < r_2 = \frac{1 - p + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

b. Évaluons le polynôme  $R = X^2 - (1-p)X - p(1-p)$  en -1, 0 et 1 :

$$R(1) = 1 - (1 - p) - p(1 - p) = p^{2} > 0$$

$$R(0) = -p(1 - p) < 0$$

$$R(-1) = 1 + (1 - p) - p(1 - p) = 1 + (p - 1)^{2} > 0.$$

Puisque la fonction R est continue sur  $\mathbb R$  et qu'elle change de signe sur les intervalles ]-1,0[ et ]0,1[, elle admet donc (au moins) une racine dans chacun des ces intervalles d'après le théorème des valeurs intermédiaires. On en déduit donc que

$$r_1 \in ]-1,1[$$
 et  $r_2 \in ]-1,1[$ .

c. Puisque R est un polynôme unitaire, qu'il admet deux racines distinctes et qu'il est de degré 2, on peut le factoriser entièrement :

$$R = (X - r_1)(X - r_2) = X^2 - (r_1 + r_2)X + r_1r_2.$$

Par identification, on trouve que:

$$r_1 + r_2 = 1 - p$$
 et  $r_1 r_2 = -p(1 - p)$ .

4. D'après la question 2, la suite  $(\mathbb{P}(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$  est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée est  $r^2-(1-p)r-p(1-p)=0$  qui admet  $r_1$  et  $r_2$  pour solution (d'après la question 3). On en déduit donc que :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(Y_k) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k.$$

5. L'événement  $Y_1$  est impossible donc  $\mathbb{P}(Y_1) = 0$ . Puisque  $Y_2 = P_1 \cap P_2$ , on trouve par indépendance des lancers que  $\mathbb{P}(Y_2) = p^2$ . On en déduit donc que :

$$\lambda r_1 + \mu r_2 = \mathbb{P}(Y_1) = 0 \text{ et } \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 = \mathbb{P}(Y_2) = p^2.$$

Puisque  $r_1$  et  $r_2$  sont racines de R, on a :

$$r_1^2 = (1-p)r_1 + p(1-p)$$
 et  $r_2^2 = (1-p)r_2 + p(1-p)$ .

On en déduit donc que :

$$p^{2} = \lambda r_{1}^{2} + \mu r_{2}^{2}$$
  
=  $(1 - p)(\lambda r_{1} + \mu r_{2}) + p(1 - p)(\lambda + \mu)$   
=  $p(1 - p)(\lambda + \mu)$ .

On en déduit donc que :

$$\lambda + \mu = \frac{p}{1 - p}.$$

Puisque  $r_1 + r_2 = 1 - p$ , il vient que :

$$\lambda r_2 + \mu r_1 = \lambda \left( (1-p) - r_1 \right) + \mu \left( (1-p) - r_2 \right) = (1-p)(\lambda + \mu) - (\lambda r_1 + \mu r_2) = p.$$

6. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{split} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(Y_k) &= \lambda \sum_{k=1}^{N} r_1^k + \mu \sum_{k=1}^{N} r_2^k \\ &= \lambda \left( -1 + \sum_{k=0}^{N} r_1^k \right) + \mu \left( -1 + \sum_{k=0}^{N} r_2^k \right) \\ &= -(\lambda + \mu) + \lambda \sum_{k=0}^{N} r_1^k + \mu \sum_{k=0}^{N} r_2^k. \end{split}$$

Puisque  $r_1 \in ]-1,1[$  et  $r_2 \in ]-1,1[$  les séries géométriques  $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} r_1^k$  et  $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} r_2^k$  sont convergentes. On en déduit que la série  $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(Y_k)$  converge par linéarité et :

$$\begin{split} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_k) &= -(\lambda + \mu) + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} r_1^k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} r_2^k \\ &= -(\lambda + \mu) + \frac{\lambda}{1 - r_1} + \frac{\mu}{1 - r_2} \\ &= -\frac{p}{1 - p} + \frac{\lambda(1 - r_2) + \mu(1 - r_1)}{(1 - r_1)(1 - r_2)} \\ &= -\frac{p}{1 - p} + \frac{\lambda + \mu - (\lambda r_2 + \mu r_1)}{1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2} \\ &= -\frac{p}{1 - p} + \frac{\frac{p}{1 - p} - p}{1 - (1 - p) - p(1 - p)} \\ &= -\frac{p}{1 - p} + \frac{p - p(1 - p)}{p^2(1 - p)} \\ &= -\frac{p}{1 - p} + \frac{1}{p^2(1 - p)} \\ &= \boxed{1.} \end{split}$$

On en déduit qu'on obtient presque-sûrement la série "pile-pile".

7. Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .

$$\sum_{k=1}^{N} k \mathbb{P}(Y_k) = \lambda \sum_{k=1}^{N} k r_1^k + \mu \sum_{k=1}^{N} k r_2^k = \lambda r_1 \sum_{k=1}^{N} k r_1^{k-1} + \mu r_2 \sum_{k=1}^{N} k r_2^{k-1}.$$

Puisque  $r_1 \in ]-1,1[$  et  $r_2 \in ]-1,1[$  les séries géométriques dérivées  $\sum\limits_{k\in \mathbb{N}^*} kr_1^{k-1}$  et  $\sum\limits_{k\in \mathbb{N}^*} kr_2^{k-1}$  sont convergentes. On en déduit que la série  $\sum\limits_{k\in \mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(Y_k)$  converge par linéarité, et :

$$\begin{split} \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(Y_k) &= \lambda r_1 \sum_{k=1}^{N} k r_1^{k-1} + \mu r_2 \sum_{k=1}^{N} k r_2^{k-1} \\ &= \frac{\lambda r_1}{(1 - r_1)^2} + \frac{\mu r_2}{(1 - r_2)^2} \\ &= \frac{\lambda r_1 (1 - r_2)^2 + \mu r_2 (1 - r_1)^2}{\left[ (1 - r_1)(1 - r_2) \right]^2} \\ &= \frac{(\lambda r_1 + \mu r_2) - 2 r_1 r_2 (\lambda + \mu) + r_1 r_2 (\lambda r_2 + \mu r_1)}{p^4} \\ &= \frac{2 p^2 - p^2 (1 - p)}{p^4} \\ &= \boxed{\frac{1 + p}{p^2}}. \end{split}$$

## Exercice 4

1. Les fonctions cos et sin sont définies sur  $\mathbb{R}$ . Puisque :

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \ x = k\pi,$$

la fonction  $\cot = \frac{\cos}{\sin}$  est définie sur  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . La fonction cot est dérivable sur  $\mathcal{D}$  donc sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  par théorèmes opératoires et :

$$\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ , \cot'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

La fonction cot est donc strictement décroissante sur  $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ . Puisque la fonction cot est aussi continue sur  $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ , le théorème de la bijection assure que la fonction cot réalise une bijection entre  $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$  et  $\left]\lim_{\frac{\pi}{2}-}\cot,\lim_{0+}\cot\left[=\right]0,+\infty\right[$ .

2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors, d'après la formule de Moivre, on a :

$$\begin{split} \sin\left((2n+1)\alpha\right) &= \operatorname{Im}\left(e^{i(2n+1)\alpha}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\left(e^{i\alpha}\right)^{2n+1}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)^{2n+1}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\sum_{\ell=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{\ell} i^{\ell} \left(\cos\alpha\right)^{2n+1-\ell} \left(\sin\alpha\right)^{\ell}\right). \end{split}$$

En séparant les termes de rangs pairs et impairs de la somme S de la question précédente, on trouve que :

$$\sum_{\ell=0}^{2n+1} {2n+1 \choose \ell} i^{\ell} (\cos \alpha)^{2n+1-\ell} (\sin \alpha)^{\ell}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {2n+1 \choose 2k} i^{2k} (\cos \alpha)^{2n+1-2k} (\sin \alpha)^{2k}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} {2n+1 \choose 2k+1} i^{2k+1} (\cos \alpha)^{2n+1-(2k+1)} (\sin \alpha)^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {2n+1 \choose 2k} (-1)^{k} (\cos \alpha)^{2n+1-2k} (\sin \alpha)^{2k}$$

$$+ i \sum_{k=0}^{n} {2n+1 \choose 2k+1} (-1)^{k} (\cos \alpha)^{2n-2k} (\sin \alpha)^{2k+1}.$$

Puisque ces deux dernières sommes sont à valeurs réelles, on peut identifier la partie imaginaire de S :

$$\sin((2n+1)\alpha) = \sum_{k=0}^{n} {2n+1 \choose 2k+1} (-1)^k (\cos \alpha)^{2n-2k} (\sin \alpha)^{2k+1}.$$

3. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha \neq 0$   $[\pi]$ . Remarquons que  $\sin \alpha \neq 0$ .

$$\sin((2n+1)\alpha) = \sum_{k=0}^{n} {2n+1 \choose 2k+1} (-1)^k (\cos \alpha)^{2n-2k} (\sin \alpha)^{2k+1}.$$

$$= (\sin \alpha)^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {2n+1 \choose 2k+1} (\cos \alpha)^{2(n-k)} (\sin \alpha)^{-2(n-k)}$$

$$= (\sin \alpha)^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {2n+1 \choose 2k+1} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)^{n-k}$$

$$= (\sin \alpha)^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {2n+1 \choose 2k+1} (\cot^2 \alpha)^{n-k}$$

$$= (\sin \alpha)^{2n+1} P(\cot^2 \alpha).$$

- 4. Posons, pour tout  $k \in [1, n]$ ,  $\beta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ . Pour tout  $k \in [1, n]$ ,  $\sin((2n+1)\beta_k) = 0$  et  $\sin \beta_k \neq 0$ . D'après la question précédente, on a :  $\forall k \in [1, n]$ ,  $P(\cot^2 \beta_k) = 0$ . On peut montrer que la fonction  $\cot^2$  est strictement décroissante donc injective sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  (intervalle auquel appartiennent tous les  $\beta_k$ ). Ainsi, les réels  $(\cot^2 \beta_k)_{1 \leq k \leq n}$  sont deux à deux distincts. On a donc trouvé n racines distinctes de P.
- 5. On a trouvé n racines distinctes du polynôme P. Puisque P est un polynôme de degré n, on a trouvé toutes les racines de P.

Le coefficient dominant de P étant égal à (2n+1), on en déduit une factorisation de P dans  $\mathbb{R}[X]$  (puisque toutes ses racines sont simples) :

$$P = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left( X - \cot^{2} \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right) \right).$$

### Exercice 5

1. Remarquons que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(a)\right)$ . Puisque  $e^x = 1 + x + o_{x\to 0}(x)$  et  $\lim_{n\to +\infty} \frac{1}{n}\ln(a) = 0$ , on trouve, par compositions de limites, que :

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\ln(a)}{n} + o_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right).$$

2. Par le même argument, on trouve que :

$$b^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\ln(b)}{n} + o_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n} = \left(1 + \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2n} + o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n}$$

$$= \left(1 + \frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n} + o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n}$$

$$= \exp\left(n\ln\left[1 + \frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n} + o_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)$$

Puisque 
$$\lim_{n\to +\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n} = 0$$
 et  $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ , on trouve que :

$$n \ln \left[ 1 + \frac{\ln \left( \sqrt{ab} \right)}{n} + o_{n \to +\infty} \left( \frac{1}{n} \right) \right] \underset{n \to +\infty}{\sim} n \times \frac{\ln \left( \sqrt{ab} \right)}{n} \cdot \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln \left( \sqrt{ab} \right).$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left( \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2} \right)^n = \sqrt{ab}.$$

\* \*

\*