Exercice 1

1. Puisque $y(0)=0$, $\boxed{y_0=0.}$ On pose $\boxed{h=\frac{1}{1000}}$. Soit $k\in [\![0,999]\!]$. En approchant $y'(t_k)$ par $\dfrac{y(t_{k+1}-y(t_k)}{t_{k+1}-t_k}$, on trouve que $\dfrac{y_{k+1}-y_k}{h}=\dfrac{1}{1+t_ky_k}$. On en déduit la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall k\in [\![0,999]\!],\ y_{k+1}=y_k+\frac{h}{1+t_ky_k}.}$$

2.

```
import matplotlib.pyplot as plt
t, y = [0], [0]
h = 1/1000
for k in range(1000):
    y.append(y[k] + h/(1+t[k]*y[k]))
    t.append(t[k] + h)
plt.plot(t,y)
plt.show()
```

Exercice 2

1. a. Puisque le gardien ne réutilise pas une clé déjà utilisée lorsqu'il est sobre, il réalise au plus 10 essais. Ainsi :

$$\boxed{\forall k>10,\ P_S(T_k)=0.}$$

Soit $k\in[\![1,10]\!]$. Remarquons que :

$$T_k=\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}E_j\right)\cap\overline{E_k}.\quad(\star)$$

En appliquant la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_S(T_k)&=\mathbb{P}_S(E_1)\mathbb{P}_{S\cap E_1}(E_2)\cdots\mathbb{P}_{S\cap E_1\cap\cdots\cap E_{k-2}}(E_{k-1})\mathbb{P}_{S\cap E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k)\\&=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdot\times\frac{9-(k-2)}{10-(k-2)}\times\frac{1}{10-(k-1)}\\&=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdot\times\frac{11-k}{12-k}\times\frac{1}{11-k}\\&=\frac{1}{10}\quad\text{(en reconnaissant un produit télescopique).}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}_S(T_k)=\begin{cases}\frac{1}{10}&\text{si } k\in[\![1,10]\!]\\0&\text{sinon.}\end{cases}}$$

b. La relation de la question précédente est encore valide pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ lorsque le gardien est ivre. En appliquant la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{N}^*\mathbb{P}_{\overline{S}}(T_k)&=\mathbb{P}_{\overline{S}}(E_1)\mathbb{P}_{\overline{S}\cap E_1}(E_2)\cdots\mathbb{P}_{\overline{S}\cap E_1\cap\cdots\cap E_{k-2}}(E_{k-1})\mathbb{P}_{\overline{S}\cap E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k)\\&=\boxed{\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\times\frac{1}{10}.}\end{aligned}$$

2. On cherche à calculer $\mathbb{P}_{T_2}\left(\overline{S}\right)$. Puisque $\left(S,\overline{S}\right)$ forme un système complet d'événements, la formule de Bayes assure que :

formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{T_2}\left(\overline{S}\right)&=\frac{\mathbb{P}(\overline{S})\mathbb{P}_{\overline{S}}(T_2)}{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}_S(T_2)+\mathbb{P}(\overline{S})\mathbb{P}_{\overline{S}}(T_2)}\\&=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{9}{100}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{9}{100}}\\&=\frac{9}{29}.\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Puisque $X_k=F_1\cap\cdots\cap F_{k-1}\cap P_k$, on trouve, par indépendance des lancers, que :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_k)=\mathbb{P}(F_1)\ldots\mathbb{P}(F_{k-1})\mathbb{P}(P_k)=p(1-p)^{k-1}.}$$

2. a. L'événement $P_1\cap P_2\cap Y_{k+2}$ est impossible : puisque $k+2\geqslant 3$, il est impossible d'obtenir les deux premiers piles consécutifs aux tirages $k+1$ et $k+2$ alors qu'on a obtenu pile aux deux premiers tirages. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}(P_1\cap P_2\cap Y_{k+2})=0.}$$

Sachant qu'on obtient face au premier lancer, réaliser l'événement Y_{k+2} revient à réinitialiser l'expérience et à obtenir pour la première fois le deuxième pile consécutif en $k+1$ tirages. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}_{F_1}(Y_{k+2})=\mathbb{P}(Y_{k+1}).}$$

Sachant qu'on obtient pile puis face aux deux premiers lancers, réaliser l'événement Y_{k+2} revient à réinitialiser l'expérience et à obtenir pour la première fois le deuxième pile consécutif en k tirages. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{P}_{P_1\cap F_2}(Y_{k+2}) = \mathbb{P}(Y_k).}$$

b. Les événements de la famille $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$ sont deux à deux disjoints. De plus, on trouve que leur réunion constitue l'univers :

$$F_1 \cup (P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2) = F_1 \cup (P_1 \cap (P_2 \cup F_2)) = F_1 \cup P_1 = \Omega$$

On en déduit que la famille $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$ constitue un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_{k+2})\\
&= \mathbb{P}(F_1 \cap Y_{k+2}) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap Y_{k+2}) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap Y_{k+2})\\
&= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(Y_{k+2}) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2)\mathbb{P}_{P_1\cap F_2}(Y_{k+2})\\
&= \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(Y_{k+1}) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}_{P_1\cap F_2}(Y_{k+2}) \text{ par indépendance des lancers}\\
&= \boxed{(1-p)\mathbb{P}(Y_{k+1}) + p(1-p)\mathbb{P}(Y_k).}
\end{aligned}$$

3. a. Le discriminant Δ du polynôme $R = X^2 - (1-p)X - p(1-p)$ est :

$$\Delta = (1-p)^2 + 4p(1-p) > 0 \quad (\text{car } 0 < p < 1)$$

On en déduit que <u>le polynôme R admet deux racines distinctes</u> :

$$r_1 = \frac{1-p-\sqrt{\Delta}}{2} < r_2 = \frac{1-p+\sqrt{\Delta}}{2}.$$

b. Évaluons le polynôme $R = X^2 - (1-p)X - p(1-p)$ en -1, 0 et 1 :

$$\begin{aligned}
R(1) &= 1 - (1-p) - p(1-p) = p^2 > 0\\
R(0) &= -p(1-p) < 0\\
R(-1) &= 1 + (1-p) - p(1-p) = 1 + (p-1)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Puisque la fonction R est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle change de signe sur les intervalles $]-1,0[$ et $]0,1[$, elle admet donc (au moins) une racine dans chacun des ces intervalles d'après le théorème des valeurs intermédiaires. On en déduit donc que :

$$\boxed{r_1 \in]-1,1[\text{ et } r_2 \in]-1,1[.}$$

c. Puisque R est un polynôme unitaire, qu'il admet deux racines distinctes et qu'il est de degré 2, on peut le factoriser entièrement :

$$R = (X - r_1)(X - r_2) = X^2 - (r_1 + r_2)X + r_1 r_2.$$

Par identification, on trouve que :

$$\boxed{r_1 + r_2 = 1 - p \text{ et } r_1 r_2 = -p(1-p).}$$

4. D'après la question 2, la suite $(\mathbb{P}(Y_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée est $r^2 - (1-p)r - p(1-p) = 0$ qui admet r_1 et r_2 pour solution (d'après la question 3). On en déduit donc que :

$$\boxed{\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y_k) = \lambda r_1^k + \mu r_2^k.}$$

5. L'événement Y_1 est impossible donc $\mathbb{P}(Y_1) = 0$. Puisque $Y_2 = P_1 \cap P_2$, on trouve par indépendance des lancers que $\mathbb{P}(Y_2) = p^2$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\lambda r_1 + \mu r_2 = \mathbb{P}(Y_1) = 0 \text{ et } \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 = \mathbb{P}(Y_2) = p^2.}$$

Puisque r_1 et r_2 sont racines de R, on a :

$$r_1^2 = (1-p)r_1 + p(1-p) \text{ et } r_2^2 = (1-p)r_2 + p(1-p).$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
p^2 &= \lambda r_1^2 + \mu r_2^2\\
&= (1-p)(\lambda r_1 + \mu r_2) + p(1-p)(\lambda + \mu)\\
&= p(1-p)(\lambda + \mu).
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\lambda + \mu = \frac{p}{1-p}.}$$

Puisque $r_1 + r_2 = 1 - p$, il vient que :

$$\boxed{\lambda r_2 + \mu r_1 = \lambda\left((1-p) - r_1\right) + \mu\left((1-p) - r_2\right) = (1-p)(\lambda+\mu) - (\lambda r_1 + \mu r_2) = p.}$$

6. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(Y_k) &= \lambda \sum_{k=1}^{N} r_1^k + \mu \sum_{k=1}^{N} r_2^k \\ &= \lambda\left(-1+\sum_{k=0}^{N} r_1^k\right) + \mu\left(-1+\sum_{k=0}^{N} r_2^k\right) \\ &= -(\lambda+\mu) + \lambda\sum_{k=0}^{N} r_1^k + \mu \sum_{k=0}^{N} r_2^k.\end{aligned}$$

Puisque $r_1 \in]-1,1[$ et $r_2 \in]-1,1[$ les séries géométriques $\sum_{k\in\mathbb{N}} r_1^k$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} r_2^k$ sont convergentes. On en déduit que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(Y_k)$ converge par linéarité et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_k) &= -(\lambda+\mu) + \lambda\sum_{k=0}^{+\infty} r_1^k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} r_2^k \\ &= -(\lambda+\mu) + \frac{\lambda}{1-r_1} + \frac{\mu}{1-r_2} \\ &= -\frac{p}{1-p} + \frac{\lambda(1-r_2)+\mu(1-r_1)}{(1-r_1)(1-r_2)} \\ &= -\frac{p}{1-p} + \frac{\lambda+\mu-(\lambda r_2+\mu r_1)}{1-(r_1+r_2)+r_1r_2} \\ &= -\frac{p}{1-p} + \frac{\frac{p}{1-p}-p}{1-(1-p)-p(1-p)} \\ &= -\frac{p}{1-p} + \frac{p-p(1-p)}{p^2(1-p)} \\ &= -\frac{p}{1-p} + \frac{1}{p^2(1-p)} \\ &= \boxed{1.}\end{aligned}$$

On en déduit qu'on obtient presque-sûrement la série "pile-pile".

7. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}(Y_k) = \lambda\sum_{k=1}^{N} kr_1^k + \mu \sum_{k=1}^{N} kr_2^k = \lambda r_1 \sum_{k=1}^{N} kr_1^{k-1} + \mu r_2 \sum_{k=1}^{N} kr_2^{k-1}.$$

Puisque $r_1 \in]-1,1[$ et $r_2 \in]-1,1[$ les séries géométriques dérivées $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kr_1^{k-1}$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} kr_2^{k-1}$ sont convergentes. On en déduit que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(Y_k)$ converge par linéarité, et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y_k) &= \lambda r_1 \sum_{k=1}^{N} kr_1^{k-1} + \mu r_2 \sum_{k=1}^{N} kr_2^{k-1} \\ &= \frac{\lambda r_1}{(1-r_1)^2} + \frac{\mu r_2}{(1-r_2)^2} \\ &= \frac{\lambda r_1(1-r_2)^2+\mu r_2(1-r_1)^2}{[(1-r_1)(1-r_2)]^2} \\ &= \frac{(\lambda r_1+\mu r_2)-2r_1r_2(\lambda+\mu)+r_1r_2(\lambda r_2+\mu r_1)}{p^4} \\ &= \frac{2p^2-p^2(1-p)}{p^4} \\ &= \boxed{\frac{1+p}{p^2}.}\end{aligned}$$

Exercice 4

1. Les fonctions cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$. Puisque :

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi,$$

la fonction $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. La fonction cot est dérivable sur $\mathcal{D}$ donc sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par théorèmes opératoires et :

$$\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \cot'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

La fonction cot est donc strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Puisque la fonction cot est aussi continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, le théorème de la bijection assure que la fonction cot réalise une bijection entre $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $]\lim_{\frac{\pi}{2}^-}\cot, \lim_{0^+}\cot[=]0,+\infty[$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la formule de Moivre, on a :

$$\begin{aligned}\sin((2n+1)\alpha) &= \operatorname{Im}\left(e^{i(2n+1)\alpha}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\left(e^{i\alpha}\right)^{2n+1}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left((\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n+1}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\sum_{\ell=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{\ell} i^\ell (\cos\alpha)^{2n+1-\ell}(\sin\alpha)^\ell\right).\end{aligned}$$

En séparant les termes de rangs pairs et impairs de la somme S de la question précédente, on trouve que :

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{\ell} i^\ell (\cos\alpha)^{2n+1-\ell}(\sin\alpha)^\ell\\ =\ &\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k} i^{2k}(\cos\alpha)^{2n+1-2k}(\sin\alpha)^{2k}\\ &+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1} i^{2k+1}(\cos\alpha)^{2n+1-(2k+1)}(\sin\alpha)^{2k+1}\\ =\ &\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^k(\cos\alpha)^{2n+1-2k}(\sin\alpha)^{2k}\\ &+i\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k(\cos\alpha)^{2n-2k}(\sin\alpha)^{2k+1}.\end{aligned}$$

Puisque ces deux dernières sommes sont à valeurs réelles, on peut identifier la partie imaginaire de S :

$$\boxed{\sin((2n+1)\alpha) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k(\cos\alpha)^{2n-2k}(\sin\alpha)^{2k+1}.}$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \neq 0\ [\pi]$. Remarquons que $\sin\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned}\sin((2n+1)\alpha) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k(\cos\alpha)^{2n-2k}(\sin\alpha)^{2k+1}.\\ &= (\sin\alpha)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}(\cos\alpha)^{2(n-k)}(\sin\alpha)^{-2(n-k)}\\ &= (\sin\alpha)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)^{n-k}\\ &= (\sin\alpha)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(\cot^2\alpha\right)^{n-k}\\ &= \boxed{(\sin\alpha)^{2n+1}P\left(\cot^2\alpha\right).}\end{aligned}$$

4. Posons, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\beta_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sin((2n+1)\beta_k) = 0$ et $\sin\beta_k \neq 0$. D'après la question précédente, on a : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(\cot^2\beta_k) = 0$.

On peut montrer que la fonction $\cot^2$ est strictement décroissante donc injective sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (intervalle auquel appartiennent tous les β_k). Ainsi, les réels $(\cot^2\beta_k)_{1\leq k\leq n}$ sont deux à deux distincts. On a donc trouvé n racines distinctes de P.

5. On a trouvé n racines distinctes du polynôme P. Puisque P est un polynôme de degré n, on a trouvé toutes les racines de P.

Le coefficient dominant de P étant égal à 1, on en déduit une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ (puisque toutes ses racines sont simples) :

$$\boxed{P = \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).}$$

Exercice 5

1. Remarquons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(a)\right)$. Puisque $e^x = 1 + x + o_{x\to 0}(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(a) = 0$, on trouve, par compositions de limites, que :

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\ln(a)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).}$$

2. Par le même argument, on trouve que :

$$b^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\ln(b)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n &= \left(1 + \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left(n\ln\left[1 + \frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n} = 0$ et $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$, on trouve que :

$$n\ln\left[1 + \frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{\ln\left(\sqrt{ab}\right)}{n}. \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\sqrt{ab}\right).$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}.}$$

* *
*