Exercice 1

Écrire une fonction `somme_cumul` qui prend en entrée une liste `L` d'entiers et qui renvoie une liste `M` des sommes cumulées, c'est-à-dire une liste de même longueur que `L` telle que $\texttt{M[k]} = \sum_{i=0}^{k} \texttt{L[i]}$ pour tout indice `k` de `L`.

Un bonus sera accordé si la liste n'est parcourue qu'une seule fois.

Exercice 2

On considère une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec probabilité $q = 1-p$. On considère n joueurs ($n \geqslant 1$) qui lancent chacun la pièce jusqu'à obtenir Pile. Le(s) gagnant(s) sont désignés comme ceux qui ont fait le moins de lancers. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose X_i le nombre de lancers du i-ème joueur, et on note N le nombre de gagnants.

1. Quelle est la loi de X_i, pour $i \in [\![1,n]\!]$? Rappeler son espérance et sa variance.

2. Calculer pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_i > j)$.

3. On note $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

   Calculer $\mathbb{P}(Y > j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de Y et son espérance.

4. Écrire une fonction Python `NbMin(L)` prenant en argument une liste `L` et renvoyant le nombre de fois où la valeur minimale apparaît dans la liste `L`.

   Un bonus sera accordé si la liste n'est parcourue qu'une seule fois.

5. En déduire une fonction Python `N(n,p)` qui, prenant en argument la valeur de n et p, simule l'expérience aléatoire décrite et renvoie la valeur de N.

6. Calculer $\mathbb{P}(N = n)$.

7. Après avoir justifié que :

$$[N = k] = \bigcup_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{card}(I) = k}} \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} \left[\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = \ell] \right) \bigcap \left(\bigcap_{j \in [\![1,n]\!] \setminus I} [X_j > \ell] \right) \right],$$

   montrer que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1 - q^n}.$$

8. En déduire l'espérance de N et montrer que $\mathbb{V}(N) = \dfrac{npq + n^2p^2}{1-q^n} - \left(\dfrac{np}{1-q^n} \right)^2$.

Exercice 3

Soient $p \in]0;1[$, $q = 1-p$ et $n \geqslant 1$ fixé. On considère $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires, indépendantes, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et définies sur un même espace probabilisé.

On note : $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Justifier que $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

2. Montrer que l'intervalle $\left[\overline{X_n} - \sqrt{\frac{5}{n}} ; \overline{X_n} + \sqrt{\frac{5}{n}} \right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 95%, c'est-à-dire que la probabilité que p appartient à cet intervalle est supérieure ou égale à $0,95$.

* *
*