Exercice 1

On parcourt la chaine (par élément ou par indice). L'idée est de stocker chaque nouveau caractère lu dans une liste (qu'on appelle ici `car_deja_vus`). La longueur de la liste en fin de parcours est donc le nombre de caractères différents de la chaine.

```python
def nb_car(chaine):
    nb = 0
    car_deja_vus = []
    # parcours par élément
    for car in chaine:
        if car not in car_deja_vus:
            car_deja_vus.append(car)
    return len(car_deja_vus)

def nb_car(chaine):
    nb = 0
    car_deja_vus = []
    # parcours par indice
    for k in range(len(chaine)):
        if chaine[k] not in car_deja_vus:
            car_deja_vus.append(chaine[k])
    return len(car_deja_vus)
```

On propose ci-dessous une autre solution, utilisant la structure de dictionnaire (on pouvait aussi utiliser le type `set` (*ensemble*) mais il n'est pas au programme) :

```python
def nb_car(chaine):
    dico = {}
    for car in chaine:
        dico[car] = True
    return len(dico)
```

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 2$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{nx^n}{2^{n-1}} - \frac{n^2x^{n+1}}{3^n}\right) &= x\sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{N}\frac{(n(n-1)+n)x^{n+1}}{3^n} \\ &= x\sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} - \frac{x^3}{9}\sum_{n=2}^{N} n(n-1)\left(\frac{x}{3}\right)^{n-2} - \frac{x^2}{3}\sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{x}{3}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Puisque $|x| < 2$, $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$. Ainsi les séries géométriques dérivées premières et secondes de raison $\frac{x}{2}$ et $\frac{x}{3}$ sont convergentes. On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{nx^n}{2^{n-1}} - \frac{n^2x^{n+1}}{3^n}\right)$ converge et :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{nx^n}{2^{n-1}} - \frac{n^2x^{n+1}}{3^n}\right) &= \frac{x}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{x^3}{9}\frac{2}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^3} - \frac{x^2}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= \boxed{\frac{4x}{(2-x)^2} - \frac{6x^3}{(3-x)^3} - \frac{3x^2}{(3-x)^2}.}\end{aligned}$$

Exercice 3

1. Soit $k \geqslant 3$. Une étude de fonction montre que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$ est décroissante sur $[k-1,k]$ (on remarque que $k-1>1$). Ainsi :

$$\forall t \in [k-1,k],\ f(t) \geqslant f(k) \text{ i.e. } \frac{1}{t(\ln t)^2} \geqslant \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

   On conclut par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\forall k \geqslant 3,\ \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} \geqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{k(\ln k)^2} = \frac{1}{k(\ln k)^2}.}$$

2. Fixons $n \geqslant 3$. En sommant les inégalités de la question précédente pour tout k entre 3 et n, on trouve :

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^2} \leqslant \sum_{k=3}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = \int_{2}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln 2}.$$

3. Puisque, pour tout $k \geqslant 3$, $\frac{1}{k(\ln k)^2} \geqslant 0$, la suite $\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^2}\right)_{n\geqslant 3}$ est croissante. Étant donné qu'elle est majorée d'après la question précédente, elle converge en vertu du théorème de la limite monotone. On en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 3}\frac{1}{k(\ln k)^2}$ converge et ainsi que la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

Exercice 4

1. D'après l'énoncé, la probabilité demandée est $\boxed{p_1 = \frac{2}{3}.}$

2. a. La réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} C_n$ n'est pas l'univers : son complémentaire est l'événement “le joueur obtient pile à chaque lancer”, qui n'est pas l'événement impossible. On en déduit que la famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas un système complet d'événements.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $C_n = \overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{n-1}} \cap F_n$. Il serait difficile d'invoquer l'indépendance des événements ici (à moins de reformuler l'expérience. On peut cependant invoquer la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\left(\overline{F_1}\right)\mathbb{P}_{\overline{F_1}}\left(\overline{F_2}\right)\cdots\mathbb{P}_{\overline{F_1}\cap\cdots\cap\overline{F_{n-2}}}\left(\overline{F_{n-1}}\right)\mathbb{P}_{\overline{F_1}\cap\cdots\cap\overline{F_{n-1}}}(F_n) = \frac{1}{2^n}.$$

   Puisque les événements de la famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux disjoints, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(C_n)$ converge par σ-additivité. En reconnaissant une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on trouve alors que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.}$$

   Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) = 1$ et puisque les événements de la famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux disjoints, la famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements.

3. On utilise la formule des probabilités totales avec le système quasi-complet $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(T) \quad \text{(la série converge par } \sigma\text{-additivité)} \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6^n} \\
&= 2\left[-1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n}\right] \\
&= 2\left[-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{6}}\right] \quad \left(\text{on reconnait une série géométrique de raison } \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

   La probabilité que le joueur trouve un trésor est $\frac{2}{5}$.

4. On cherche $\mathbb{P}_T(C_n)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}_T(C_n) = \frac{\mathbb{P}(T \cap C_n)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\frac{1}{2^n} \times \frac{2}{3^n}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{6^n}.$$

   Sachant qu'il a trouvé un trésor, la probabilité qu'il ait choisi la porte P_n est $\frac{5}{6^n}$.

5. On raisonne de la même manière pour trouver $\mathbb{P}_{\overline{T}}(C_n)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}_{\overline{T}}(C_n) = \frac{\mathbb{P}\left(\overline{T} \cap C_n\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)} = \frac{\mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}\left(\overline{T}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)} = \frac{\frac{1}{2^n} \times \left(1 - \frac{2}{3^n}\right)}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3 \times 2^n} \times \left(1 - \frac{2}{3^n}\right).$$

   Sachant que le joueur n'a pas trouvé de trésor, la probabilité qu'il ait choisi la porte P_n est $\frac{5}{3 \times 2^n} \times \left(1 - \frac{2}{3^n}\right)$.

* *
*