Exercice 1

```python
def somme_cumul(L):
    M = [L[0]]
    for i in range(1,len(L)):
        M.append(M[i-1] + L[i])
    return M
```

Exercice 2

1. La variable X_i est le rang du premier succès lors la répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Ainsi $\underline{X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p),\ \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbb{V}(X_i) = \frac{q}{p^2}}$.

2. Pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_i > j) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=j+1}^{+\infty} [X_i = k]\right) \quad \text{car } X \text{ est à valeurs entières} \\
&= \sum_{k=j+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_i = k) \quad \text{par } \sigma\text{-additivité (la réunion est disjointe)} \\
&= \sum_{k=j+1}^{+\infty} pq^{k-1} \\
&= p\sum_{k=j}^{+\infty} q^k \\
&= \boxed{q^j.}
\end{aligned}$$

3. Soit j un entier naturel. Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$, on a alors :

$$\mathbb{P}(Y > j) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > j]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > j) = q^{jn}.$$

Remarquons que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(Y = j) = \mathbb{P}(Y > j-1) - \mathbb{P}(Y > j) = q^{(j-1)n} - q^{jn} = (q^n)^{j-1}(1 - q^n).$$

On en déduit que $\underline{Y \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1 - q^n \text{, d'espérance } \frac{1}{1-q^n}}$.

4.

```python
def NbMin(L):
    m, nb = L[0], 1
    for elem in L[1:]:
        if elem < m:
            m, nb = elem, 1
        elif elem == m:
            nb = nb+1
    return nb
```

5.

```python
import random as rd

def geom(p):
    i = 1
    while rd.random()>p:
        i = i+1
    return i

def N(n,p):
    return NbMin([geom(p) for _ in range(n)])
```

6. Pour réaliser $[N = n]$, il faut et il suffit que tous les joueurs aient le même résultat :

$$[N = n] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{i=1}^{n} [X_i = k].$$

Cette réunion étant disjointe, on trouve, par σ-additivité, que :

$$\mathbb{P}(N = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = k]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = k) \quad = \sum_{k=1}^{+\infty} p^n q^{n(k-1)} = \boxed{\frac{p^n}{1-q^n}.}$$

7. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Remarquons que l'événement $[N = k]$ est réalisé si, et seulement si, il existe un groupe de k joueurs (donc un sous-ensemble $I \subset [\![1, n]\!]$ de cardinal k) et un entier ℓ non nul tel que tous les joueurs du groupe ont obtenu Pile en ℓ lancers tandis que les autres l'ont obtenu en plus de ℓ lancers. Ainsi :

$$[N = k] = \bigcup_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card}(I) = k}} \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} \left[\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = \ell]\right) \bigcap \left(\bigcap_{j \in [\![1,n]\!] \setminus I} [X_j > \ell]\right)\right]$$

Par σ-additivité (les réunions étant disjointes), on trouve que :

$$\mathbb{P}(N=k)=\sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \operatorname{card}(I)=k}}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i\in I}[X_i=\ell]\right)\bigcap\left(\bigcap_{j\in[\![1,n]\!]\setminus I}[X_j>\ell]\right)\right).$$

Fixons alors $I\subset[\![1,n]\!]$ tel que $\operatorname{card} I=k$. On a alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i\in I}[X_i=\ell]\right)\bigcap\left(\bigcap_{j\in[\![1,n]\!]\setminus I}[X_j>\ell]\right)\right)\\
&=\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i=\ell)\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus I}\mathbb{P}(X_j>\ell)\right)\text{ par indépendance de } X_1,\dots,X_n\\
&=\sum_{\ell=1}^{+\infty}p^kq^{k(\ell-1)}q^{(n-k)\ell}=\frac{p^k}{q^k}\frac{q^n}{1-q^n}=\frac{p^kq^{n-k}}{1-q^n}.
\end{aligned}$$

Comme il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ à k éléments, on retrouve bien le résultat :

$$\boxed{\forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(N=k)=\frac{\binom{n}{k}p^kq^{n-k}}{1-q^n}.}$$

8. La variable aléatoire N est finie ; elle admet donc espérance et variance. En notant Z une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n,p)$, on trouve :

$$\mathbb{E}(N)=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(N=k)=\frac{1}{1-q^n}\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\frac{\mathbb{E}(Z)}{1-q^n}=\boxed{\frac{np}{1-q^n}.}$$

De la même façon, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N^2)&=\sum_{k=1}^{n}k^2\mathbb{P}(N=k)\text{ d'après le théorème du transfert}\\
&=\frac{1}{1-q^n}\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\\
&=\frac{\mathbb{E}(Z^2)}{1-q^n}\text{ d'après le théorème du transfert}\\
&=\frac{\mathbb{V}(Z)+\mathbb{E}(Z)^2}{1-q^n}\text{ d'après la formule de König-Huygens}\\
&=\frac{npq+n^2p^2}{1-q^n}.
\end{aligned}$$

La formule de König-Huygens assure alors que :

$$\boxed{\mathbb{V}(N)=\mathbb{E}(N^2)-\mathbb{E}(N)^2=\frac{npq+n^2p^2}{1-q^n}-\left(\frac{np}{1-q^n}\right)^2.}$$

Exercice 3

1. On pouvait étudier la fonction $x\mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$, ou remarquer que :

$$\frac{1}{4}-p(1-p)=\frac{1}{4}-p+p^2=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0.$$

Dans tous les cas, on trouve que : $\boxed{p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}.}$

2. Par propriétés de l'espérance et la variance et indépendance de $X_1,\dots,X_n$, la variable $\overline{X_n}$ admet une espérance et une variance :

$$\mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)=p\text{ et }\mathbb{V}\left(\overline{X_n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k)=\frac{p(1-p)}{n}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que :

$$\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\leqslant\frac{1}{4\varepsilon^2}.$$

En choisissant ε tel que $\frac{1}{4\varepsilon^2}=0,05$, i.e. $\varepsilon=\sqrt{\frac{5}{n}}$, on trouve alors par passage au complémentaire que :

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n}-\sqrt{\frac{5}{n}}\leqslant p\leqslant\overline{X_n}+\sqrt{\frac{5}{n}}\right)\geqslant\mathbb{P}\left(\overline{X_n}-\sqrt{\frac{5}{n}}<p<\overline{X_n}+\sqrt{\frac{5}{n}}\right)\geqslant 0,95.$$

L'intervalle $\left[\overline{X_n}-\sqrt{\frac{5}{n}};\overline{X_n}+\sqrt{\frac{5}{n}}\right]$ est donc bien un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 95%.

* *
*