Exercice 1

1. Écrire une fonction en Python qui renvoie la liste des indices du maximum d'une liste de nombres passée en argument.

2. Écrire une fonction en Python qui prend en argument une liste de nombres et qui renvoie la deuxième plus petite valeur de cette liste, i.e. la plus petite valeur de cette liste différente de son minimum.

   Par exemple, la deuxième plus petite valeur de la liste `[3,1,5,1,6,2,6]` est 2.

Exercice 2

On considère les matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par la famille (I, J, L, K) et Id l'endomorphisme identité de $M_4(\mathbb{R})$.
On pose $A = J + K$.

1. Déterminer une base et la dimension de E.

2. a. Exprimer les produits JK, KL et LJ en fonction respectivement de L, J et K.
   b. Calculer J^2, K^2 et L^2. En déduire que $KJ = -L$, $LK = -J$ et $JL = -K$.
   c. En déduire que E est stable pour le produit matriciel, i.e. :
   $$\forall (M, N) \in E^2, \ MN \in E.$$

3. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

4. On considère désormais l'application φ_A qui, à toute matrice de M de E, associe :
   $$\varphi_A(M) = AMA^{-1}.$$
   a. Montrer que φ_A est un endomorphisme de E.
   b. Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi_A$. En déduire que φ_A est un automorphisme de E.
   c. (i) Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $M = aI + bJ + cK + dL \in E$.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) pour que $AM = MA$.
   (ii) En déduire que $\mathcal{B}_1 = (I, J + K)$ est une base de $\operatorname{Ker}(\varphi_A - \mathrm{Id})$.
   d. Reprendre les question précédentes pour montrer que $\mathcal{B}_2 = (J - K, L)$ est une base de $\operatorname{Ker}(\varphi_A + \mathrm{Id})$.
   e. Montrer que $\mathcal{B} = (I, J + K, J - K, L)$ est une base de E en calculant son rang.
   f. Déduire des questions 4.c et 4.d la matrice de φ_A dans la base $\mathcal{B}$ de E.
   g. En déduire que $\varphi_A(J) = K$ et $\varphi_A(K) = J$. Déterminer la matrice de φ_A dans la base (I, J, K, L) de E.

* *
*