Exercice 1

On propose ici deux solutions, l'une itérative (nécessitant de retourner la liste des décimales en fin de boucle) et l'autre récursive.

```
def liste_decimales(n):
    L = []
    if n == 0:
        return [0]
    while n > 0:
        L.append(n%10)
        n = n//10
    return L[::-1] # les décimales n'étaient pas dans le bon ordre

def liste_decimales_rec(n):
    if n < 10:
        return [n]
    else:
        return liste_decimales_rec(n//10) + [n%10]
```

Exercice 2

1. a. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   - On commence par remarquer que $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $0_3M = 0_3 = M0_3$.
   - Soient $(M,N) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

   $$(\lambda M + N)K = \lambda MK + NK = \lambda M + N = \lambda KM + KN = K(\lambda M + N)$$

   On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   b. Supposons qu'il existe une matrice inversible M dans E. Puisque $MK = M$, il vient que $M^{-1}MK = M^{-1}M$, i.e. $K = I_3$, ce qui est absurde.
   On en déduit qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2. a. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$. Calculons MK et KM. On trouve :

   $$MK = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad KM = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

   Ainsi :

   $$\boxed{M \in E \Leftrightarrow MK = KM = M \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = g = k \\ h = b \\ f = d. \end{cases}}$$

   b. La première et dernière colonne de toute matrice de E étant égales, leur rang est strictement inférieur à 3, i.e. aucune matrice de E n'est inversible.

   c. Grâce à la question 2.a, on peut écrire que :

   $$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix},\ (a,b,d,e) \in \mathbb{R}^4 \right\} = \mathrm{Vect}(A,B,D,E)$$

   où :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La famille (A,B,D,E) est donc génératrice de E. Il ne reste plus qu'à étudier sa liberté pour en extraire une base de E. Soit $(a,b,d,e) \in \mathbb{R}^4$ tel que $aA + bB + dD + eE = 0_3$. Alors :

   $$\begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} = 0_3, \quad \text{i.e. } a = b = d = e = 0.$$

   On en déduit que la famille (A,B,D,E) est libre ; (A,B,D,E) est donc une base de E, qui est donc un espace vectoriel de dimension 4.

3. a. Toute matrice de F est bien de la forme obtenue à la question 2.a ; ainsi $F \subset E$.
   La matrice 0_3 est bien de la forme voulue donc $0_3 \in F$.
   Soient $(M,N) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe alors $(x,y,z,x',y',z') \in \mathbb{R}^6$ tel que :

   $$M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} x' & y' & x' \\ y' & z' & y' \\ x' & y' & x' \end{pmatrix}.$$

   On trouve alors que

   $$\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda x + x' & \lambda y + y' & \lambda x + x' \\ \lambda y + y' & \lambda z + z' & \lambda y + y' \\ \lambda x + x' & \lambda y + y' & \lambda x + x' \end{pmatrix} \in F.$$

   On en déduit bien que F est un sous-espace vectoriel de E.

   b. Toutes les matrices de F sont symétriques à coefficients réelles donc diagonalisables.

c. On pourrait s'amuser à chercher les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, mais la lecture de la formule de diagonalisation assure que 0, 2 et 8 sont les valeurs propres de M. Il suffit donc de chercher les espaces propres de M associés à chaque valeur propre. Mieux : chaque espace propre étant de dimension 1, il suffit de chercher un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres d'après la condition suffisante de diagonalisabilité.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$MX = 0X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M, associé à la valeur propre 0.

$$MX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}.$$

On en déduit que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M, associé à la valeur propre 2.

$$MX = 8X \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

On en déduit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M, associé à la valeur propre 8.

Ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}. \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} |k\mathbb{P}(X = k)| &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{i!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda, \end{aligned}$$

en reconnaissant une somme partielle de série exponentielle. Puisque la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument, la variable X admet une espérance, égale à :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \lambda.}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left|k^2\mathbb{P}(X = k)\right| &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k-1)!} \lambda^k \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1+1}{(k-1)!} \lambda^k \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(k-1)!} \lambda^k + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} \lambda^k + \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\lambda^i}{i!} + \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \mathbb{E}(X) = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

en reconnaissant une somme partielle de série exponentielle et en réinvestissant le calcul réalisé à la question précédente. Puisque la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument, la variable X^2 admet une espérance d'après la formule du transfert, égale à :

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda.}$$

La variable X admet donc une variance, donnée par la formule de König-Huygens :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda.}$$

2. a. Montrons le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Puisque $\frac{b^0}{0!}\mathbb{P}(N=0) = \mathbb{P}(N=0)$, la propriété est bien initialisée.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(N=k) = \frac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N=0)$. D'après la relation de Panjer, on a :

$$\mathbb{P}(N=k+1) = \frac{b}{k+1}\mathbb{P}(N=k) = \frac{b}{k+1}\frac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N=0) = \frac{b^{k+1}}{(k+1)!}\mathbb{P}(N=0).$$

La propriété est donc bien héréditaire. On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N=k) = \frac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N=0).}$$

b. Puisque N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = 1,$$

(la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N=k)$ converge par σ-additivité).

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(N=0)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b^k}{k!} = 1,$$

c'est-à-dire que $\mathbb{P}(N=0) = e^{-b}$ en reconnaissant une somme de série exponentielle. La variable N suit alors la loi de Poisson de paramètre $b > 0$:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N=k) = \frac{b^k}{k!}e^{-b}.}$$

3. a. Montrons le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$.

D'après les hypothèses de cette question, $\mathbb{P}(N=2) = \left(a + \frac{-2a}{2}\right)\mathbb{P}(X=1) = 0$. La propriété est donc initialisée.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3 tel que $\mathbb{P}(N=k-1) = 0$. D'après la relation de Panjer, on a :

$$\mathbb{P}(N=k) = \left(a - \frac{2a}{k}\right)\mathbb{P}(N=k-1) = 0.$$

La propriété est donc héréditaire. On en déduit donc que : $\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(N=k) = 0.}$

b. On déduit de la question précédente que N est à valeurs dans $\{0;1\}$. On en déduit que N suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(N=1)$.

Puisque $\mathbb{P}(N=1) = -a\mathbb{P}(N=0)$ et puisque $\mathbb{P}(N=0) + \mathbb{P}(N=1) = 1$, il vient que $\mathbb{P}(N=0) = \frac{1}{1-a}$ et ainsi que $\mathbb{P}(N=1) = \frac{a}{a-1}$.

La variable N suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a-1}$.

4. a. Distinguons selon les valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$.

- Supposons que $k \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\frac{p}{1-p}\times\frac{n-k+1}{k}\mathbb{P}(Z=k-1) &= \frac{p}{1-p}\times\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} \\
&= \frac{n-k+1}{k}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \mathbb{P}(Z=k).
\end{aligned}$$

- Supposons que $k = n+1$.

  On a alors : $\frac{p}{1-p}\times\frac{n-k+1}{k}\mathbb{P}(Z=k-1) = 0 = \mathbb{P}(Z=k)$.
- Supposons que $k > n+1$. Puisque $\mathbb{P}(Z=n+1) = 0$, on peut montrer (par récurrence et de manière analogue à la question 3.a) que $\mathbb{P}(Z=k) = 0$. On a :

$$\forall k > n+1,\ \mathbb{P}(Z=k) = \frac{p}{1-p}\times\frac{n-k+1}{k}\mathbb{P}(Z=k-1).$$

On a donc bien prouvé que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k}\mathbb{P}(Z=k-1).}$$

b. Commençons par remarquer que $\mathbb{P}(Z=0) \neq 1$ puisque $p \neq 0$ et $n \neq 0$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} = \frac{p}{1-p}\left(-1+\frac{n+1}{k}\right) = a + \frac{b}{k}$$

en posant $a = \dfrac{p}{p-1}$ et $b = \dfrac{p(n+1)}{1-p}$. On remarque que $a < 1$ (puisque $a < 0$).
On en déduit que Z vérifie la relation de Panjer pour le couple :

$$\boxed{(a,b) = \left(\frac{p}{p-1}, \frac{\mathbb{P}(n+1)}{1-p}\right).}$$

5. a. D'après la relation de Panjer, on a : $\mathbb{P}(N=1) = (a+b)\mathbb{P}(N=0)$.
Si on avait $\mathbb{P}(N=0) = 0$, la suite $(\mathbb{P}(N=k))_{k\in\mathbb{N}}$ serait nulle, ce qui est absurde. On a donc $\mathbb{P}(N=0) > 0$. Puisque $\mathbb{P}(N=1) \geqslant 0$, on trouve bien $\boxed{a+b \geqslant 0.}$

b. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(N=k) &= \sum_{k=1}^{m} k\left(a+\frac{b}{k}\right)\mathbb{P}(N=k-1)\\ &= a\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k-1) + b\sum_{k=1}^{m}\mathbb{P}(N=k-1)\\ &= a\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)\mathbb{P}(N=i) + b\sum_{i=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=i) \quad \text{(en posant } i=k-1)\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\mathbb{P}(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=k).}$$

c. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que $a < 1$. On déduit de la question précédente que :

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k) = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=k)\right) - m\mathbb{P}(N=m)$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=k) = 1.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(N=k) \leqslant \frac{a+b}{1-a}.$$

La suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(N=k)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est donc majorée. Vérifions qu'elle est croissante :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{m+1} k\mathbb{P}(N=k) - \sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(N=k) = (m+1)\mathbb{P}(N=n+1) \geqslant 0.$$

D'après le théorème de la limite monotone, la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(N=k)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge, i.e. la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(N=k)$ converge (absolument puisqu'elle est à termes positifs). On en déduit que N admet une espérance. Par passage à la limite (lorsque $m \to +\infty$) de l'égalité de la question précédente, on trouve que $\mathbb{E}(N) = a\mathbb{E}(N) + a + b$, i.e. :

$$\boxed{\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a}.}$$

d. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En réinvestissant les calculs réalisés à la question 5.b, on trouve que :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m}\left|k^2\mathbb{P}(N=k)\right|\\ &= \sum_{k=1}^{m} k^2\left(a+\frac{b}{k}\right)\mathbb{P}(N=k-1)\\ &= a\sum_{k=1}^{m} k^2\mathbb{P}(N=k-1) + b\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k-1)\\ &= a\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)^2\mathbb{P}(N=i) + b\sum_{i=1}^{m-1}(i+1)\mathbb{P}(N=i)\\ &= a\sum_{i=0}^{m-1} i^2\mathbb{P}(N=i) + (2a+b)\sum_{i=1}^{m-1} i\mathbb{P}(N=i) + (a+b)\sum_{i=1}^{m-1}\mathbb{P}(N=i)\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{m} |k^2\mathbb{P}(N=k)| = \frac{2a+b}{1-a}\sum_{i=1}^{m-1} i\mathbb{P}(N=i) + \frac{a+b}{1-a}\sum_{i=1}^{m-1}\mathbb{P}(N=i).$$

Puisque les séries $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(N=k)$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(N=k)$ converge, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(N=k)$ converge absolument, i.e. N^2 admet un moment d'ordre 2 (d'après le théorème du transfert), égal à :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(N^2\right) = \frac{2a+b}{1-a}\mathbb{E}(N) + \frac{a+b}{1-a} = \frac{(a+b)}{1-a}\left(\frac{2a+b}{1-a}+1\right) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.}$$

e. On en déduit que <u>N admet une variance</u>, donnée par la formule de König-Huygens :

$$\boxed{\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}\left(N^2\right) - \mathbb{E}(N)^2 = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2} - \frac{(a+b)^2}{(1-a)^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}.}$$

f. D'après les questions 1.a et 1.b, si N suit une loi de Poisson, $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$.
Réciproquement, supposons que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$. D'après la question précédente, on a alors $\frac{a+b}{1-a} = \frac{a+b}{(1-a)^2}$. On en déduit que $a+b=0$ ou $1-a=1$. Si on avait $a+b=0$, alors $\mathbb{V}(N)=0$, i.e. la variable aléatoire N serait constante, égale à 0 puisque $\mathbb{E}(N)=0$. Cela est absurde puisque par hypothèse $\mathbb{P}(N=0)\neq 1$.
On en déduit donc que $1-a=1$, i.e. $a=0$. D'après la question 2.b, N suit une loi de Poisson (celle de paramètre b).
On a donc bien prouvé que <u>$\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si N suit une loi de Poisson</u>.

Exercice 4

1. a. La quantité $\mathbb{E}(X \mid Y=y)$ est l'espérance de la loi conditionnelle de X sachant $[Y=y]$. En effet, si Z est une variable suivant la loi conditionnelle de X sachant $[Y=y]$ (définies sur le même espace probabilisé que X), alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \mid Y=y) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}_{[Y=y]}(X=x)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(Z=x)\\ &= \sum_{x\in Z(\Omega)} x\mathbb{P}(Z=x) \quad \text{car } Z(\Omega)\subset X(\Omega)\\ &= \mathbb{E}(Z).\end{aligned}$$

b. Puisque X est une variable aléatoire finie, X admet une espérance, égale à :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)$$

Puisque $([Y=y])_{y\in Y(\Omega)}$ forme un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall x\in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y=y)\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(X)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y=y)\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} x\mathbb{P}(Y=y)\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)}\sum_{x\in Y(\Omega)} x\mathbb{P}(Y=y)\mathbb{P}(X=x \mid Y=y) \text{ (les sommes finies sont permutables)}\\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y=y) \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x \mid Y=y)\\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y=y)\mathbb{E}(X \mid Y=y) \quad \text{(par définition de l'espérance conditionnelle).}\end{aligned}$$

On en déduit donc la formule de l'espérance totale :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{E}(X \mid Y=y)\mathbb{P}(Y=y).}$$

2. a.

```
import random as rd

def simule_Y(b,c):
    nb_noires_tirees = 0
    while rd.random() < c/(b+c):
        c -= 1
        nb_noires_tirees += 1
    return nb_noires
```

b. On peut tirer entre 0 boules noires et $c = N - b$ boules noires avant de tirer la première boule blanches. Ainsi $\boxed{Y_N(\Omega) = [\![0, N-b]\!].}$

c. Sachant $X_1 = 1$, la variable aléatoire Y_N ne peut prendre qu'une seule valeur : 0. On en déduire alors que l'espérance conditionnelle de Y sachant $X_1 = 1$ est nulle :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_N \mid X_1 = 1) = 0.}$$

d. Supposons $N > b$. Soit $i \in [\![1, N-b]\!]$ (cet ensemble est non vide car $N > b$).

Réaliser l'événement $[Y_N = i]$ revient à tirer i boule noires puis une boule blanche. Si $[X_1 = 0]$ est réalisé, i.e. si on tire une boule noire au premier tirage, cela revient à tirer $i-1$ boules noires puis une blanche dans une urne contenant $N-1$ boules (dont toujours b boules blanches). Ainsi :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, N-b]\!],\ \mathbb{P}(Y_N = i \mid X_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_{N-1} = i-1).}$$

e. Supposons toujours que $N > b$. Puisque Y_N et X_1 sont des variables aléatoires finies, on a, par définition de l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_N \mid X_1 = 0) &= \sum_{i=0}^{N-b} i\mathbb{P}(Y_N = i \mid X_1 = 0) \\
&= \sum_{i=1}^{N-b} i\mathbb{P}(Y_{N-1} = i-1) \text{ d'après la question précédente} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1-b} (k+1)\mathbb{P}(Y_{N-1} = k) \quad \text{(en posant } k = i-1\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1-b} k\mathbb{P}(Y_{N-1} = k) + \sum_{k=0}^{N-1-b} \mathbb{P}(Y_{N-1} = k)
\end{aligned}$$

Puisque $Y_{N-1}(\Omega) = [\![0, N-1-b]\!]$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_N \mid X_1 = 0) = \mathbb{E}(Y_{N-1}) + 1 = 1 + u_{N-1}.}$$

f. Supposons que $N > b$. D'après la formule de l'espérance totale, il vient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_N) &= \mathbb{E}(Y_N \mid X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{E}(Y_N \mid X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\
&= \mathbb{E}(Y_N \mid X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) \text{ d'après la question 2.b.}
\end{aligned}$$

Puisque la probabilité de tirer une boule noire au premier tirage est égale à $\frac{N-b}{N}$ par équiprobabilité des tirages, on trouve :

$$\boxed{u_N = (1 + u_{N-1})\,\frac{N-b}{N}.}$$

g. Par définition $u_b = \mathbb{E}(Y_b)$. Or Y_b est le nombre de boules noires tirées avant la première boule blanche tirée dans une urne ne contenant que des boules blanches. La variable Y_b est donc constante égale à 0. Ainsi $\boxed{u_b = 0.}$

D'après l'égalité de la question précédente, on a :

$$\boxed{u_{b+1} = (1 + u_b)\frac{(b+1)-b}{b+1} = \frac{1}{b+1}.}$$

et :

$$\boxed{u_{b+2} = (1 + u_{b+1})\frac{(b+2)-b}{b+2} = \left(1 + \frac{1}{b+1}\right)\frac{2}{b+2} = \frac{2}{b+1}.}$$

h. Montrons par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_{b+k}) = \frac{k}{b+1}.$$

La propriété est initialisée d'après la question précédente.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{E}(Y_{b+k}) = \frac{k}{b+1}$. D'après la relation obtenue à la question 2.e, on trouve :

$$\mathbb{E}(Y_{b+k+1}) = (1 + \mathbb{E}(Y_{b+k}))\,\frac{k+1}{b+k+1} = \frac{b+k+1}{b+1} \times \frac{k+1}{b+k+1} = \frac{k+1}{b+1}.$$

La propriété est donc héréditaire. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_{b+k}) = \frac{k}{b+k}.}$$

* *
*