Questions de cours

1. Caractériser par leur rang les familles libres et génératrices d'un espace vectoriel de dimension finie.
2. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.

Exercice 1

Écrire une fonction `liste_decimales` qui détermine la listes des décimales d'un nombre entier naturel.
Par exemple, `liste_decimales(547)` *devra renvoyer* `[5,4,7]`*. On rappelle que les instructions* `a//b` *et* `a%b` *désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.*

Exercice 2

On considère la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MK = KM = M$.

1. a. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   b. Montrer qu'aucune matrice de E n'est inversible.
2. a. Montrer que $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à E si, et seulement si, $k = g = c = a$, $h = b$ et $d = f$.
   b. Retrouver que les matrices de E ne sont pas inversibles.
   c. Déterminer une base de E et donner la dimension de E.
3. On note F l'ensemble des matrices M de la forme $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$, où x, y et z désignent des réels.
   a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   b. **[5/2]** Les matrices de F sont-elles diagonalisables ?
   c. **[5/2]** Déterminer une matrice inversible P telle que $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exercice 3

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < 1$. On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifie la **relation de Panjer** pour le couple (a, b) si :

$$\mathbb{P}(N = 0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(N = k - 1).$$

On considère dans tout l'exercice une variable aléatoire N vérifiant la relation de Panjer pour un couple (a, b) de réels.

1. On considère une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   a. Redémontrer que X admet une espérance égale à $\mathbb{E}(X) = \lambda$.
   b. Redémontrer que X admet une variance égale à $\mathbb{V}(X) = \lambda$.
2. On suppose dans cette question que $a = 0$ et b est un réel strictement positif.
   a. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(N = k) = \dfrac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N = 0)$.
   b. En déduire que N suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
3. On suppose dans cette question que $a < 0$ et $b = -2a$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}(N = k) = 0$.
   b. En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

4. On suppose dans cette question que Z suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

   a. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Z=k) = \dfrac{p}{1-p} \times \dfrac{n-k+1}{k}\mathbb{P}(Z=k-1)$.

   b. En déduire que Z vérifie une relation de Panjer pour un couple (a,b) à déterminer en fonction de n et p.

5. On revient au cas général : N est une variable aléatoire vérifiant la relation de Panjer pour un couple (a,b) où $a<1$.

   a. Calculer $\mathbb{P}(N=1)$. En déduire que $a+b \geqslant 0$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel $m \geqslant 1$:
$$\sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\mathbb{P}(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=k).$$

   c. En déduire que N admet une espérance, égale à $\dfrac{a+b}{1-a}$.

   d. Montrer que N admet un moment d'ordre 2, égal à $\dfrac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$.

   e. En déduire que N admet une variance et préciser $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b.

   f. Montrer que $\mathbb{E}(N)=\mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies. On suppose que, pour tout $y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y=y) \neq 0$.
Pour tout $y \in Y(\Omega)$ appelle **espérance conditionnelle** de X sachant $[Y=y]$ la quantité :
$$\mathbb{E}(X \mid Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x \mid Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}_{[Y=y]}(X=x).$$

1. a. Comment peut-on interpréter la quantité $\mathbb{E}(X \mid Y=y)$?

   b. Avec les notations ci-dessus, montrer la **formule de l'espérance totale** :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{E}(X \mid Y=y)\mathbb{P}(Y=y).$$

2. Étant donné b un entier naturel non nul, on considère une urne contenant b boules blanches. Les autres boules, au nombre de c, sont noires. L'urne contient ainsi $N=b+c$ boules. On tire les boules une à une et sans remise. On s'intéresse au nombre Y_N de boules noires tirées avant d'obtenir la première blanche (l'indice N marque la dépendance de Y par rapport au nombre total de boules dans l'urne avant le premier tirage). On pose $u_N = \mathbb{E}(Y_N)$ et on raisonne par récurrence sur N pour une valeur de b fixée. X_1 désigne la variable de Bernoulli égale à 1 si la première boule tirée est blanche et 0 sinon.

   a. Écrire en Python une fonction prenant en argument deux entiers b et c et qui simule une réalisation de la variable aléatoire Y_{b+c}.

   b. Quelle est l'ensemble des valeurs prises par Y_N ?

   c. Que vaut $\mathbb{E}(Y_N \mid X_1=1)$?

   d. Lorsque $N>b$, justifier l'égalité $\mathbb{P}(Y_N=i \mid X_1=0) = \mathbb{P}(Y_{N-1}=i-1)$ pour tout $i \in [\![1, N-b]\!]$.

   e. En déduire que $\mathbb{E}(Y_N \mid X_1=0) = 1+u_{N-1}$ lorsque $N>b$.

   f. En déduire que, pour $N>b$, on a $u_N = (1+u_{N-1})\dfrac{N-b}{N}$.

   g. Que vaut u_b ? Déterminer u_{b+1} et u_{b+2} à l'aide de la question précédente.

   h. En déduire que $\mathbb{E}(Y_{b+k}) = \dfrac{k}{b+k}$ pour tout entier naturel k.

* *
*