Exercice 1

1.
```python
def indices_max(L):
    indices = []
    k_max = 0
    for k in range(1,len(L)):
        if L[k] > L[k_max]:
            indices = [k]
            k_max = k
        elif L[k] == L[k_max]:
            indices.append(k)
    return indices
```

2.
```python
def second_max(L):
    if L[0] > L[1]:
        max1, max2 = L[0], L[1]
    else:
        max1, max2 = L[1], L[0]
    for x in L[2:]:
        if x > max1:
            max1, max2 = x, max1
        elif max2 < x < max1:
            max2 = x
    return max2
```

Exercice 2

1. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $aI + bJ + cK + dL = 0_4$. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & c & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} = 0_4.$$

On en déduit que $a = b = c = d = 0$, puis que la famille (I, J, K, L) est libre. Puisque $E = \mathrm{Vect}(I, J, L, K)$, (I, J, L, K) est une base de E et $\dim E = 4$.

2. a. Après calculs, on trouve : $\boxed{JK = L,\ KL = J,\ LJ = K.}$

b. Après calculs, on trouve : $\boxed{J^2 = K^2 = L^2 = -I.}$ Ainsi :

$$\boxed{KJ = LJ^2 = -L,\ LK = L^2J = -I,\ JL = J^2K = -K.}$$

c. Soit $(M, N) \in E$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$M = aI + bJ + cK + dL \quad \text{et} \quad N = xI + yJ + zK + tL.$$

D'après les questions précédentes, le produit de deux matrices de la famille (I, J, K, L) est une matrice de E. Puisque E est un espace vectoriel, on en déduit que le produit (après l'avoir développé)

$$(aI + bJ + cK + dL)(xI + yJ + zK + tL)$$

appartient à E par linéarité.
On en déduit alors que, pour tout $(M, N) \in E^2$, $MN \in E$, i.e. E est stable pour le produit matriciel.

3. Attention, on ne pouvait utiliser la formule du binôme car J et K ne commutent pas !

$$A^2 = (J + K)^2 = J^2 + JK + KJ + K^2 = -2I.$$

Ainsi $-\dfrac{1}{2}A \times A = I$. La matrice A est donc inversible et :

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}A.}$$

4. a.
- Puisque $A = J + K$, $A \in E$. De même $A^{-1} \in E$ car $A^{-1} = \dfrac{-1}{2}A$. D'après la question précédente, pour tout $M \in E$, $AM \in E$, donc $\varphi_A(M) = (AM)A^{-1} \in E$.
- Soit $(M, N) \in E^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi_A(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N)A^{-1} = \lambda AMA^{-1} + \mu ANA^{-1} = \lambda\varphi_A(M) + \mu\varphi_A(N).$$

L'application φ_A est donc linéaire.

L'application φ_A est donc un endomorphisme de E.

b. Soit $M \in E$. Puisque A est inversible, on a :

$$M \in \mathrm{Ker}\,\varphi_A \Leftrightarrow AMA^{-1} = 0_4 \Leftrightarrow A^{-1}AMA^{-1}A = A^{-1} \times 0_4 \times A \Leftrightarrow M = 0_4.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}\,\varphi_A = \{0_4\}$. L'application linéaire φ_A est donc injective. Puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, φ_A est bijective.
φ_A est donc un automorphisme de E.

c. (i)

$$\begin{aligned} AM &= (J+K)(aI+bJ+cK+dL) \\ &= aJ - bI + cL - dK + aK - bL - cI + dJ \\ &= (-b-c)I + (a+d)J + (a-d)K + (c-b)L \\ MA &= (aI+bJ+cK+dL)(J+K) = \\ &= aJ + aK - bI + bL - cL - cI + dK - dJ \\ &= (-b-c)I + (a-d)J + (a+d)K + (b-c)L. \end{aligned}$$

Puisque (I,J,K,L) est une base de E, il vient :

$$AM = MA \Leftrightarrow \begin{cases} -b-c = -b-c \\ a+d = a-d \\ a-d = a+d \\ c-b = b-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = c. \end{cases}$$

On en déduit que $\underline{AM = MA \text{ si, et seulement si } b = c \text{ et } d = 0}$.

(ii) Soit $M \in E$. On a alors l'équivalence suivante :

$$M \in \operatorname{Ker}(\varphi_A - \operatorname{Id}) \Leftrightarrow \varphi_A(M) - M = 0_4 \Leftrightarrow AMA^{-1} = M \Leftrightarrow AM = MA.$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\varphi_A - \operatorname{Id}) &= \{M \in E,\ MA = AM\} \\ &= \{aI + bJ + bK \in E,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \operatorname{Vect}(I, J+K). \end{aligned}$$

Puisque les vecteurs I et $J+K$ ne sont pas colinéaires (on peut le voir en remarquant que $J+K$ n'est pas une matrice diagonale, contrairement à I), $(I, J+K)$ est libre. La famille $\mathcal{B}_1$ est donc une base de $\operatorname{Ker}(\varphi_A - \operatorname{Id})$.

d. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et $M = aI + bJ + cK + dL \in E$.

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker}(\varphi_A + \operatorname{Id}) \Leftrightarrow \varphi_A(M) + M = 0_4 &\Leftrightarrow AMA^{-1} = -M \\ &\Leftrightarrow AM = -MA \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -b-c = b+c \\ a+d = -a+d \\ a-d = -a-d \\ c-b = -b+c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\operatorname{Ker}(\varphi_A - \operatorname{Id}) = \{bJ - cK + dL \in E,\ (b,d) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}(J-K, L).$$

On remarque que la famille $(J-K, L)$ est libre (les coefficients non nuls de $J-K$ et L ne sont pas situés aux mêmes emplacements).
Ainsi, $\underline{\mathcal{B}_2 = (J-K, L) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(\varphi_A + \operatorname{Id})}$.

e. A l'aide des opérations élémentaires conservant le rang on obtient :

$$\operatorname{rg}(I, J+K, J-K, L) = \operatorname{rg}(I, 2J, J+K, L) = \operatorname{rg}(I, J, J+K, L) = \operatorname{rg}(I,J,K,L) = 4.$$

La dernière égalité est obtenue car (I,J,K,L) est une base de E.
La famille $(I, J+K, J-K, L)$ est donc libre. Puisque son rang est égal à la dimension de E, $\underline{\mathcal{B} = (I, J+K, J-K, L) \text{ est une base de } E}$.

f. Puisque les matrices I et $J+K$ appartiennent à $\operatorname{Ker}(\varphi_A - \operatorname{Id})$, $(\varphi_A - \operatorname{Id})(I) = 0_4$ et $(\varphi_A - \operatorname{Id})(J+K) = 0_4$, i.e. $\varphi_A(I) = I$ et $\varphi_A(J+K) = J+K$.
Puisque les matrices $J-K$ et L appartiennent à $\operatorname{Ker}(\varphi_A + \operatorname{Id})$, $(\varphi_A + \operatorname{Id})(J-K) = 0_4$ et $(\varphi_A - \operatorname{Id})(L) = 0_4$, i.e. $\varphi_A(J-K) = -(J-K)$ et $\varphi_A(L) = -L$. Ainsi la matrice de φ_A dans la base $\mathcal{B} = (I, J+K, J-K, L)$ est :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

g. On remarque que $\varphi_A(J+K) + \varphi_A(J-K) = \varphi_A(2J) = 2\varphi_A(J)$.
D'après la question précédente, $\varphi_A(J+K) + \varphi_A(J-K) = 2K$ donc $\varphi_A(J) = K$.
De la même manière, on remarque que $\varphi_A(J+K) - \varphi_A(J-K) = \varphi_A(2K) = 2\varphi_A(K)$.
D'après la question précédente, $\varphi_A(J+K) - \varphi_A(J-K) = 2J$ donc $\varphi_A(K) = J$.
De plus $\varphi_A(I) = I$ et $\varphi_A(L) = -L$.
Ainsi la matrice de φ_A dans la base (I,J,K,L) est :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

* *
*