1 Éléments propres d'un endomorphisme

Exercice 1. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles.
À toute suite $u \in E$, on associe la suite $v = f(u)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1}.$$

Déterminer les valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme f ainsi défini :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & f(u). \end{array}$$

Exercice 2. Exercice théorique ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}\left(u^2\right)$.

   Généraliser le résultat.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $0 \in \mathrm{Sp}\left(u^p\right)$, alors $0 \in \mathrm{Sp}(u)$.

3. Montrer que si a est un automorphisme de E, $\mathrm{Sp}\left(a^{-1}\right) = \left\{\dfrac{1}{\lambda} \in \mathbb{K} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\right\}$.

4. Soient a un automorphisme de E et $v = a \circ u \circ a^{-1}$.

   Comparer les spectres et les espaces propres de u et v.

Exercice 3. ♡ [Corrigé] ★★★

À tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on associe le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q = (X-1)(X-2)P' - 2XP.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que si P est un vecteur propre de f, alors $\deg(P) = 2$.

   Indication : on pourra considérer le monôme de plus haut degré de P.

3. Déterminer les valeurs propres et espaces propres associés de f.

   On pourra développer le polynôme $(X+2)(X+3)(X+4)$.

2 Éléments propres d'une matrice

Exercice 4. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer leurs éléments propres (valeurs propres et bases des espaces propres) et vérifier si elles sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Pour chaque matrice diagonalisable A, on déterminera une relation de similitude $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Étude de suites mutuellement récurrentes ♡ [Corrigé] ★★☆

1. Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. En déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$$

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

      Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_{n+1} en fonction de X_n.

   b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un expression de X_n en fonction de A et X_0.

   c. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Suite récurrente linéaire d'ordre 3 ♡ [Corrigé] ★★☆

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

1. Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.
   a. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation liant X_{n+1} et X_n.
   b. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de X_0.
   c. En déduire une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Réduction d'une matrice à paramètre [Corrigé] ★★☆

1. Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe fixé.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

3 Problèmes

Exercice 9. ♡ [Corrigé] ★★★

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose :

$$f(P) = (X^2 + 1)P'' - 2XP'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et écrire sa matrice dans la base canonique.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de f.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est contenu dans $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une base.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}_E)$. *On pourra montrer que* $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}_E) \subset \mathbb{R}_2[X]$.
5. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 10. Système différentiel ♡ [Corrigé] ★★☆

On cherche les couples (x, y) de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$$

Pour un tel couple de fonctions, on introduit la fonction X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$(x, y) \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t).$$
2. Montrer que A est diagonalisable et l'écrire sous la forme PDP^{-1} où D est une matrice diagonale.
3. En posant $Y = P^{-1}X$, montrer que :
$$X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY.$$
4. En déduire l'ensemble des solutions du système différentiel.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]
Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(u) = \lambda u &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lambda u_n \\ &\Leftrightarrow u \text{ est géométrique de raison } \lambda. \end{aligned}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison λ et non nulle.
On en déduit que :

- tout réel est valeur propre de f, i.e. $\mathrm{Sp}(f) = \mathbb{R}$;
- pour tout λ, l'espace propre E_λ de f associé à la valeur propre λ est l'ensemble des suites géométriques de raison λ.

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ (i.e. λ une valeur propre de u). Il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. On en déduit que $u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x$, i.e. $u^2(x) = \lambda^2 x$. Puisque $x \neq 0_E$, λ^2 est une valeur propre de u^2 (associé au vecteur propre x), i.e. $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}\left(u^2\right)$.
   On peut même montrer par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u^n(x) = \lambda^n x.$$
   Puisque $x \neq 0_E$, $\lambda^n \in \mathrm{Sp}(u^n)$. Ainsi :
   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda^n \in \mathrm{Sp}\left(u^n\right).$$
2. Supposons que $0 \in \mathrm{Sp}\left(u^p\right)$.
   Raisonnons par l'absurde et supposons que $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$. On en déduit que u est une application injective puis que u^p est injective (par composition d'applications injectives), ce qui contredit le fait que 0 est une valeur propre de u^p.
   On en déduit que $0 \in \mathrm{Sp}(u)$.
3. Montrons le résultat par double inclusion.
   Soit $\mu \in \mathrm{Sp}\left(a^{-1}\right)$. Il existe donc un vecteur non nul $x \in E$ tel que $a^{-1}(x) = \mu x$. Puisque a^{-1} est un automorphisme (puisque a l'est), $\mu \neq 0$. Ainsi, $a\left(a^{-1}(x)\right) = a(\mu x)$, i.e. $x = \mu a(x)$ ou encore $a(x) = \dfrac{1}{\mu}x$. Puisque $x \neq 0_E$, $\dfrac{1}{\mu} \in \mathrm{Sp}(a)$, i.e. $\mu \in \left\{\dfrac{1}{\lambda} \in \mathbb{K} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\right\}$.
   Ainsi :
   $$\mathrm{Sp}\left(a^{-1}\right) \subset \left\{\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{K} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\right\}$$
   Réciproquement, soit $\mu \in \left\{\dfrac{1}{\lambda} \in \mathbb{K} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\right\}$. Il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(a)$ tel que $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$. Il existe donc un vecteur $x \neq 0_E$ tel que $a(x) = \lambda x$. En composant par a^{-1} puis en divisant par λ ($\neq 0$ puisque a est un automorphisme), on trouve que $a^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda}x$. On en déduit que μ est une valeur propre de a^{-1}, i.e. $\mu \in \mathrm{Sp}\left(a^{-1}\right)$.
   On en déduit donc que l'inclusion réciproque et ainsi que :
   $$\mathrm{Sp}\left(a^{-1}\right) = \left\{\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{K} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\right\}.$$
4. Montrons que $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(v)$ par double inclusion.
   Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. On pose $y = a(x)$.
   $$v(y) = a \circ u \circ a^{-1}(y) = a \circ u(x) = a\left(\lambda x\right) = \lambda a(x) = \lambda y.$$
   Puisque a est un automorphisme et x est non nul, y est aussi non nul. On en déduit ainsi que λ est un vecteur propre de v et ainsi $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathrm{Sp}(v)$.
   Remarquons que $u = a^{-1} \circ v \circ a$. Ainsi par symétrie des rôles de u et v, on obtient $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et ainsi $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(v)$.
   En reprenant le raisonnement précédent, on montre de la même manière que :
   $$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(v),\ E_\lambda(v) = a\left(E_\lambda(u)\right).$$

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]
À tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on associe le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q = (X-1)(X-2)P' - 2XP.$$

1. La linéarité de f ne pose aucune difficulté. Puisque $f(P) \in \mathbb{R}[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$.
   $$f(P) = \lambda P \Leftrightarrow (X-1)(X-2)P' - 2XP = \lambda P \Leftrightarrow (X-1)(X-2)P' = (2X+\lambda)P. \quad (1)$$
   Notons $a_n X^n$ le monôme de plus haut degré de P ($a_n \neq 0$). Le monôme de plus haut degré de :
   - $(X-1)(X-2)P'$ est $na_n X_{n+1}$
   - $(2X+\lambda)P$ est $2a_n X^{n+1}$.

Ainsi, si P est un vecteur propre de f, $na_{n+1} = 2a_{n+1}$ d'après l'égalité (1), i.e. $n = 2$ car $a_{n+1} \neq 0$.

On en déduit que si P est un vecteur propre de f, $\deg(P) = 2$.

3. • **Première méthode**.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $P = aX^2 + bX + c$.

$$\begin{aligned} f(P) = \lambda P &\Leftrightarrow (X-1)(X-2)(2aX+b) = (2X+\lambda)(aX^2+bX+c) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b - 6a = 2b + a\lambda \\ 4a - 3b = 2c + \lambda b \\ 2b = \lambda c \end{cases} \qquad \text{(après développement et identification)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a - (3+\lambda)b - 2c = 0 \\ 2b - \lambda c = 0 \\ Q(\lambda)c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où $Q(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24 = (\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(f) = \{-2, -3, -4\}$, puis, après calculs, que $E_{-2}(f) = \mathrm{Vect}\left((X-2)^2\right)$, $E_{-3}(f) = \mathrm{Vect}\left((X-1)(X-2)\right)$ et $E_{-4}(f) = \mathrm{Vect}\left((X-1)^2\right)$.

• **Seconde méthode**. Soit P un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ.
Puisque $(X-1)(X-2)P' = (2X+\lambda)P$, distinguons les valeurs de λ :

- Si $\lambda = -2$, on a $(X-2)P' = 2P$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = (X-2)(aX+b)$ puisque $P(2) = 0$. On trouve après calculs que $f(P) = -2P \Leftrightarrow b = -2a$. Ainsi $P = a(X-2)^2$.
  On vérifie sans difficulté que $(X-2)^2$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2, garantissant ainsi que $E_{-2}(f) = \mathrm{Vect}\left((X-2)^2\right)$.
- Si $\lambda = -4$, on a $(X-1)P' = 2P$. Par un raisonnement analogue à ce qui précède, on trouve $E_{-4}(f) = \mathrm{Vect}\left((X-1)^2\right)$.
- Si $\lambda \notin \{-2, -4\}$, $P(1) = P(2) = 0$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a(X-1)(X-2)$. On vérifie sans difficulté que $(X-1)(X-2)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -3. On en déduit que $E_{-3}(f) = \mathrm{Vect}\left((X-1)(X-2)\right)$.

La distinction sur les valeurs de λ permet de conclure sur le spectre de f : $\mathrm{Sp}(f) = \{-2, -3, -4\}$.

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]
La matrice A étant triangulaire (supérieure), on peut lire son spectre sur sa diagonale : $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$. Supposons que A soit diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = 2I_2,$$

ce qui est absurde.
La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

1. On trouve $\mathrm{Sp}(A_1) = \{-2; 1\}$ et :

$$E_{-2}(A_1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_1(A_1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

La matrice A_1 est diagonalisable car déjà diagonale. On trouve $A_1 = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On trouve $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_2) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_2) = \{1+i; 1-i\}$. La matrice A_2 n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En tant que matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on trouve :

$$E_{1-i}(A_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{1+i}(A_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

La matrice $A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable car elle admet deux valeurs propres distinctes.
On trouve $A_2 = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On trouve $\mathrm{Sp}(A_3) = \{3; -4\}$ et :

$$E_3(A_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{-4}(A_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

La matrice $A_3 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable car elle admet deux valeurs propres distinctes.
On trouve $A_3 = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. On trouve $\mathrm{Sp}(A_4)=\{3\}$ et :

$$E_3(A_4)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Puisque $\dim E_3(A_4)=1\neq 2(\dim\mathbb{R}^2=\dim\mathbb{C}^2)$, la matrice $A_4\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5. On trouve $\mathrm{Sp}(A_5)=\{4;5\}$ et :

$$E_4(A_5)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)\text{ et }E_5(A_5)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

La matrice $A_5\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable car elle admet deux valeurs propres distinctes.

On trouve $A_5=PDP^{-1}$ où :

$$D=\begin{pmatrix}4&0\\0&5\end{pmatrix}\text{ et }P=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}.$$

6. On trouve $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A_6)=\emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_6)=\{i;-i\}$. La matrice A_2 n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En tant que matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on trouve :

$$E_i(A_6)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\i-1\end{pmatrix}\right)\text{ et }E_{-i}(A_6)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\i+1\end{pmatrix}\right).$$

La matrice $A_6\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable car elle admet deux valeurs propres distinctes.

On trouve $A_6=PDP^{-1}$ où :

$$D=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\text{ et }P=\begin{pmatrix}1&-1\\i-1&i+1\end{pmatrix}.$$

7. On trouve $\mathrm{Sp}(A_7)=\left\{1,j,j^2\right\}$, où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et :

$$E_1(A_7)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ E_j(A_7)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}j\\j^2\\1\end{pmatrix}\right),\ \text{ et }E_{j^2}(A_7)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}j^2\\j\\1\end{pmatrix}\right).$$

La matrice A_7 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car elle admet trois valeurs propres distinctes.

On trouve $A_7=PDP^{-1}$ où :

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}\text{ et }P=\begin{pmatrix}1&j&j^2\\1&j^2&j\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

8. On trouve $\mathrm{Sp}(A_8)=\{0;1;2\}$ et :

$$E_0(A_8)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right),\ E_1(A_8)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right),\ \text{ et }E_2(A_8)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

La matrice A_8 est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) car elle admet trois valeurs propres distinctes.

On trouve $A_8=PDP^{-1}$ où :

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\text{ et }P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

9. On trouve $\mathrm{Sp}(A_9)=\left\{1;2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right\}$ et $E_1(A_9)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$, ainsi que :

$$E_{2-\sqrt{2}}(A_9)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1-\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right)\text{ et }E_{2+\sqrt{2}}(A_9)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1+\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

La matrice A_9est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) car elle admet trois valeurs propres distinctes.

On trouve $A_9=PDP^{-1}$ où :

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2-\sqrt{2}&0\\0&0&2+\sqrt{2}\end{pmatrix}\text{ et }P=\begin{pmatrix}1&-1-\sqrt{2}&-1+\sqrt{2}\\-1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

10. On trouve $\mathrm{Sp}(A_{10})=\{1;2\}$ et :

$$E_1(A_{10})=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right)\text{ et }E_2(A_{10})=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Puisque $\dim E_1(A_{10})+\dim E_2(A_{10})=\dim\mathbb{R}^3$, la matrice A_{10} est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). On trouve $A_{10}=PDP^{-1}$ où :

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\text{ et }P=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\2&-1&0\end{pmatrix}.$$

11. On trouve $\mathrm{Sp}(A_{11}) = \{1; 3\}$ et :

$$E_1(A_{11}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_3(A_{11}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Puisque $\dim E_1(A_{11}) + \dim E_3(A_{11}) = \dim \mathbb{R}^3$, la matrice A_{11} est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). On trouve $A_{11} = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

12. On trouve $\mathrm{Sp}(A_{12}) = \{1; -1\}$ et :

$$E_1(A_{12}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{-1}(A_{12}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right).$$

Puisque $\dim E_1(A_{12}) + \dim E_{-1}(A_{12}) \neq \dim \mathbb{R}^3$, la matrice A_{12} n'est pas diagonalisable (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$).

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

1. On trouve $\mathrm{Sp}(A) = \{3; 5\}$ et :

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right) \text{ et } E_5(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right).$$

2. La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque A admet deux valeurs propres réelles distinctes. On peut alors écrire $A = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix}3&0\\0&5\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}.$$

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Puisque $PD^0P^{-1} = I_2 = A^0$, la propriété est initialisée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix}3^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}-3^n+2\times5^n & -3^n+5^n\\ 2\times3^n-2\times5^n & 2\times3^n-5^n\end{pmatrix}.$$

3. a. On trouve immédiatement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

   b. On peut montrer par récurrence (à faire !) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = X_n = A^nX_0 = \begin{pmatrix}-3^n+2\times5^n & -3^n+5^n\\ 2\times3^n-2\times5^n & 2\times3^n-5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\times5^n-2\times3^n\\4\times3^n-3\times5^n\end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On trouve :

$$\mathrm{rg}(A-\lambda I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}6&-11&6-\lambda\\0&6&-\lambda^2+6\lambda-11\\0&0&P(\lambda)\end{pmatrix},$$

où $P(\lambda) = -11\lambda^3 + 66\lambda^2 - 121\lambda + 66 = -11(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$.

On en déduit que les valeurs propres de A sont 1, 2 et 3.

2. La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. La détermination des espaces propres assure que :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}, \text{ où } P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$$

L'inversibilité de la matrice P est assurée par le fait que c'est une matrice de passage.

3. On trouve après calculs que $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-5&1\\-6&8&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}$.

On peut montrer par récurrence (à faire !) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Après calculs, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6-6.2^n+2.3^n & -5+8.2^n-3^{n+1} & 1-2^{n+1}+3^n\\ 6-6.2^{n+1}+2.3^{n+1} & -5+8.2^{n+1}-3^{n+2} & 1-2^{n+2}+3^{n+1}\\ 6-6.2^{n+2}+2.3^{n+2} & -5+8.2^{n+2}-3^{n+3} & 1-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}$$

4. a. Il vient immédiatement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

   b. On peut montrer par récurrence (à faire !) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

c. Puisque $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2}\left(2^{n+2} - 3^n - 3\right).$$

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On trouve que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a-\lambda \\ 0 & P_a(\lambda) \end{pmatrix}$, où

$$P_a(\lambda) = 1 - (a-\lambda)^2 = -[\lambda - (a-1)][\lambda - (a+1)].$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{a-1, a+1\}$.

On trouve après calculs : $E_{a-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{a+1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2. La matrice A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) car elle admet deux valeurs propres distinctes ($a-1 \neq a+1$). D'après ce qui précède, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un rapide calcul montre que $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut montrer, après un rapide raisonnement par récurrence (à faire !), que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$. Après calculs, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+1)^n + (a-1)^n & (a+1)^n - (a-1)^n \\ (a+1)^n - (a-1)^n & (a+1)^n + (a-1)^n \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

1. La linéarité de f ne pose aucune difficulté.

Soit $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$. On sait déjà que $f(P)$ est un polynôme. Puisque $\deg 2XP' \leqslant n$, $\deg(X^2+1)P'' \leqslant n$, on trouve que $\deg f(P) \in E = \mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que f est un endomorphisme de E.

Puisque $f(1) = 0,\ f(X) = -2X$ et $\forall k \in [\![2, n]\!],\ f\left(X^k\right) = k(k-3)X^k + k(k-1)X^{k-2}$, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 2 & & & & & & \\
 & -2 & 0 & \ddots & & & & & \\
 & & -2 & \ddots & \ddots & & & (0) & \\
 & & & \ddots & \ddots & k(k-1) & & & \\
 & & & & \ddots & 0 & \ddots & & \\
 & & & & & k(k-3) & \ddots & \ddots & \\
 & & (0) & & & & \ddots & \ddots & n(n-1) \\
 & & & & & & & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & & n(n-3)
\end{pmatrix}$$

2. La matrice A étant triangulaire supérieure, on peut lire son spectre sur la diagonale :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{k(k-3),\ k \in [\![0, n]\!]\} = \{k(k-3),\ k \in [\![2, n]\!]\}.$$

Remarquons que A admet $n-1$ valeurs propres distinctes puisque la suite $(k(k-3))_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang $k = 2$.

3. Remarquons que 0 n'apparait que deux fois sur la diagonale de A. Ainsi, $\mathrm{rg}(A) = (n+1) - 2$. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, A = 2.$$

Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. La lecture de la matrice A montre que $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ et les coordonnées de $f(P)$ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ sont données par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ -2b+6d \\ -2c \\ 0 \end{pmatrix},$$

i.e. $f(P) = 2c + (-2b+6d)X - 2cX^2$.

On en déduit que :

$$P \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ -2b + 6d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 3d \end{cases}.$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} f$ contient l'ensemble :

$$\begin{aligned}&\{a+bX+cX^2+dX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \mid c=0 \text{ et } b=3d\}\\ &=\{a+d(3X+X^3)\in\mathbb{R}_3[X],\ (a,d)\in\mathbb{R}^2\}\\ &=\operatorname{Vect}(1,3X+X^3).\end{aligned}$$

Puisque les polynômes 1 et $3X+X^3$ sont non nuls et de degrés distincts, ils forment une famille libre. L'ensemble $\operatorname{Vect}(1,3X+X^3)$ est donc de dimension 2. Puisque $\operatorname{Ker} f$ est aussi de dimension 2, $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(1,3X+X^3)$.

4. Soit $P=a+bX+cX^2\in\mathbb{R}_2[X]$. Puisque $f(P)=2c-2bX-2cX^2$,

$$P\in\operatorname{Ker}(f+2\operatorname{Id}_E)\Leftrightarrow a=-c.$$

On en déduit que :

$$\{bX+c(X^2-1)\in\mathbb{R}_2[X],\ (b,c)\in\mathbb{R}^2\}=\operatorname{Vect}(X,X^2-1)\subset\operatorname{Ker}(f+2\operatorname{Id}_E).$$

Puisque les polynômes X et X^2-1 sont non nuls et de degrés distincts, ils forment une famille libre et donc une base de $\operatorname{Vect}(X,X^2-1)$.

Remarquons que -2 n'apparait que deux fois sur la diagonale de A. Ainsi, $\operatorname{rg}(A+2I_{n+1})=(n+1)-2$. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim\operatorname{Ker}(f+2\operatorname{Id})=\dim\operatorname{Ker}(A+2I_{n+1}=2.$$

Puisque $\operatorname{Vect}(X,X^2-1)$ est aussi de dimension 2, $\operatorname{Ker}(f+2\operatorname{Id})=\operatorname{Vect}(X,X^2-1)$.

5. On sait que :

$$\sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f)}\dim\operatorname{Ker}(f-\lambda Id_{\mathbb{R}_n[X]})\leqslant\dim\mathbb{R}_n[X]=n+1.$$

L'endomorphisme f admet deux valeurs propres (0 et -2) sont associées à des espaces propres de dimension 2. Puisque f admet $n-3$ valeurs propres distinctes de 0 et -2, la somme des dimensions des espaces propres de f est supérieure ou égale à $2+2+(n-3)=n+1$.

On en déduit que la somme des dimensions des espaces propres de f est égale à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, et ainsi que f est diagonalisable.

On pourra remarquer que la démonstration ci-dessus assure que les espaces propres associés aux valeurs propres distinctes de 0 et -2 sont de dimension 1.

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

1.

$$\begin{aligned}(x,y)\text{ est solution de }(S)&\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x'(t)=x(t)-3y(t)\\ y'(t)=2x(t)-4y(t)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ X'(t)=AX(t)\text{ où }A=\begin{pmatrix}1&-3\\2&-4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. On trouve que A admet deux valeurs propres distinctes (-1 et -2) donc A est diagonalisable. L'étude des espaces propres permet d'écrire $A=PDP^{-1}$:

$$D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}\text{ et }P=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}.$$

3. Remarquons que $Y'=P^{-1}X'$ (par linéarité de la dérivation). Ainsi :

$$X'=AX\Leftrightarrow X'=PDP^{-1}X\Leftrightarrow P^{-1}X'=DP^{-1}X\Leftrightarrow Y'=DY.$$

4. Notons $Y:t\mapsto\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}Y'=DY\Leftrightarrow\begin{cases}u'=-u\\v'=-2v\end{cases}&\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}u(t)=ae^{-t}\\v(t)=be^{-2t}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in\mathbb{R},\ Y(t)=\begin{pmatrix}ae^{-t}\\be^{-2t}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Puisque pour tout $t\in\mathbb{R},\ X(t)=PY(t)$, on trouve que :

$$X'=AX\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in\mathbb{R},\ X(t)=P\begin{pmatrix}ae^{-t}\\be^{-2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3ae^{-t}+be^{-2t}\\2ae^{-t}+be^{-2t}\end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système différentiel est :

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}^2\\ t&\mapsto&(3ae^{-t}+be^{-2t},2ae^{-t}+be^{-2t})\end{array},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$