Exercice 1. [Corrigé] ★☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-1,1]$ et soit $Y = X^2$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
2. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice 2. [Corrigé] ★☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$.
2. Déterminer une densité de X^2.
3. Déterminer une densité de X^3.

Exercice 3. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soient $X_1,\ X_2, \dots,\ X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de $Y = \min(X_1,\ X_2, \dots,\ X_n)$ et en donner une densité.

Exercice 4. [Corrigé] ★☆☆

On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale de paramètres inconnus $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Au cours d'un entraînement, on constate que :

- 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
- 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.

Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type.
On utilisera une table de la loi normale centrée réduite.

Exercice 5. Loi log-normale [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$ est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(\ln X)$.

Exercice 6. [Corrigé] ★★☆

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Montrer que la fonction F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. Déterminer une densité de X.
2. Reconnaitre la loi de la variable $Y = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$.

   Préciser si la variable Y admet une espérance et une variance. Les calculer le cas échéant.

Exercice 7. Loi du χ^2 [Corrigé] ★★☆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et soit $Y = X^2$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
2. Montrer que Y admet une espérance et une variance qu'on calculera.
3. a. En posant $t = \dfrac{\lambda}{2}(1 + \sin\theta)$, montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(\lambda - t)}} = \pi$.

   b. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Montrer que $U^2 + V^2$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 8. Loi de Cauchy [Corrigé] ★★☆

1. Déterminer la valeur $a \in \mathbb{R}$ pour laquelle la fonction $f : t \mapsto \dfrac{a}{1+t^2}$ est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. On dit que X suit **la loi de Cauchy**.

   a. Déterminer la fonction de répartition de X.

   b. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$, $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$, $\mathbb{P}(X \leqslant -1)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.

   c. Étudier l'existence de l'espérance de X et la calculer le cas échéant.
3. Soit V une variable suivant la loi uniforme sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Montrer que $\tan V$ suit la loi de Cauchy.

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ est une densité de probabilité.
2. Trois personnes, qu'on notera A, B et C, arrivent devant deux guichets. La personne C laisse passer les personnes A et B, et attend que le premier guichet se libère pour passer.

   On note T_A et T_B les variables aléatoires égales aux temps de passage respectifs des personnes A et B. On suppose que T_A et T_B sont des variables aléatoires indépendantes de même loi, et admettant f pour densité.

   a. La variable aléatoire T_A admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

   b. Déterminer la loi du temps d'attente U de la personne C.

   c. Quelle est la probabilité que le guichet A se libère avant le B ? Retrouver le résultat par le calcul.

Exercice 10. Loi Gamma [Corrigé] ★★☆

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : z \mapsto \dfrac{\lambda e^{-\lambda z}(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$ est une densité de la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Exercice 11. [Corrigé] ★★☆

Soient X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et ε une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1;1\}$. On suppose que X et ε sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de $Y = \varepsilon X$.
2. Déterminer l'espérance et la variance - si elles existent - de la variable aléatoire $Y - 2X$.

Exercice 12. Produits de convolution [Corrigé] ★★☆

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{E}(1)$.
   a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = X + Y$.
   b. Déterminer la loi de la variable aléatoire $V = X - Y$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
   Montrer que la variable aléatoire $Z = X^2 - Y$ admet pour densité la fonction :
$$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1-\sqrt{z} & \text{si } 0 < z \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Soient $V_1, \dots, V_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
   a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $M_n = \max(V_1, \dots, V_n)$.
   b. Montrer que la variable aléatoire $M_n - V_{n+1}$ est à densité et déterminer une densité.
   c. En déduire $\mathbb{P}(V_{n+1} > M_n)$.

Exercice 13. [Corrigé] ★★☆

Roméo et une Juliette se donnent rendez-vous à minuit (sous un balcon). L'heure d'arrivée de la Juliette suit la loi normale d'espérance minuit et d'écart-type 4 minutes. L'heure d'arrivée de Roméo suit la loi normale d'espérance minuit et cinq minutes (il a envie de se faire attendre) et d'écart-type 3 minutes. Juliette est prête à attendre au plus 10 minutes, alors que Roméo n'est prêt qu'à attendre au plus 5 minutes. Quelle est la probabilité que cette grande histoire d'amour ne commence jamais ? *On utilisera une table de la loi normale centrée réduite.*

Exercice 14. Somme de lois normales indépendantes [Corrigé] ★★★

Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit encore une loi normale (dont on précisera les paramètres).

Exercice 15. Oral Agro 2008 [Corrigé] ★★★

1. Soit α un réel. Déterminer, en fonction de α, l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $x^2 + x + 1 - \alpha \leqslant 0$. Lorsque l'intervalle I des solutions est non vide, on précisera son intersection avec l'intervalle $[0,1]$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
   Déterminer la fonction de répartition de $Y = X^2 + X + 1$. En déduire une densité de Y.
3. Calculer l'espérance de Y en utilisant cette densité. Retrouver l'espérance en utilisant la définition de Y.

Exercice 16. Entropie [Corrigé] ★★★

Si une variable aléatoire X admet une densité f, on appelle entropie de X la quantité suivante (lorsqu'elle existe) :
$$h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} -f(x)\ln(f(x))\,\mathrm{d}x.$$
Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, *on convient que* $\ln(f(x))f(x) = 0$ *pour tout réel* x *tel que* $f(x) = 0$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1$.
2. Soit X une variable suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Montrer que $h(X) = \dfrac{1}{2}\left[1 + \ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right]$.
3. On souhaite prouver que, parmi toutes les variables aléatoires à densité, admettant une entropie de variance donnée σ^2, celles suivants les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale. On note φ une densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
   a. Soit Y une variable aléatoire d'espérance m, de variance σ^2 et de densité f telle que la fonction $x \mapsto f(x)\ln\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que :
$$h(Y) = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\varphi(x)\right)\mathrm{d}x.$$
   b. En déduire que $h(Y) \leqslant \dfrac{1}{2}\left[1 + \ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right]$. Conclure.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

1. $X(\Omega) = [-1,1]$ donc $Y(\Omega) = [0,1]$. Ainsi, pour tout $y < 0$, $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0$ et pour tout $y > 1$, $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = 1$. Soit $y \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leqslant y) &= \mathbb{P}(X^2 \leqslant y)\\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) \quad (\text{car } y \in [0,1])\\ &= \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt{y}) - \mathbb{P}(X \leqslant -\sqrt{y})\\ &= \frac{\sqrt{y}+1}{2} - \frac{-\sqrt{y}+1}{2} = \sqrt{y} \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1]).\end{aligned}$$

La fonction de répartition de Y est donc la fonction :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0\\ \sqrt{y} & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant 1\\ 1 & \text{si } y > 1.\end{cases}$$

La fonction F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$; étudions la continuité de F_Y en 0 et 1. Remarquons que :

$$\begin{cases}\lim\limits_{0^-} F_Y = \lim\limits_{y\to 0^-} 0 = 0\\ \lim\limits_{0^+} F_Y = \lim\limits_{y\to 0^+} \sqrt{y} = 0\\ F_Y(0) = 0\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\lim\limits_{1^-} F_Y = \lim\limits_{y\to 1^-} \sqrt{y} = 1\\ \lim\limits_{1^+} F_Y = \lim\limits_{y\to 1^+} 1 = 1\\ F_Y(1) = 1.\end{cases}$$

On en déduit que F_Y est continue en 0 et 1, et donc sur $\mathbb{R}$. Puisque F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1, Y est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_Y : y \mapsto \begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y \leqslant 1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2. **Première méthode** : via la loi de Y.

La fonction f_Y est à support borné (dans $[0,1]$), donc Y admet une espérance et un moment d'ordre 2.

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

De même :

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}y^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

La formule de König-Huygens assure que Y admet une variance et :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{4}{45}.$$

Seconde méthode : via le théorème du transfert.

La variable aléatoire X est bornée donc X admet un moment d'ordre 2 et d'ordre 4, i.e. $Y = X^2$ admet un moment d'ordre 1 et d'ordre 2. Le théorème du transfert assure que :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}.$$

et :

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \mathbb{E}\left(X^4\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}x^5\right]_{-1}^1 = \frac{1}{5}.$$

On conclut de la même manière pour obtenir la variance de Y.

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

1. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Pour tout $y < 0$, $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0$.

$$\forall y \geqslant 0,\ \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant y^2) = 1 - e^{-\lambda y^2} \text{ car } y^2 \geqslant 0.$$

La fonction de répartition de Y est donc :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0\\ 1 - e^{-\lambda y^2} & \text{si } y \geqslant 0.\end{cases}$$

La fonction F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0,+\infty[$. Étudions la continuité de F_Y en 0.

$$\begin{cases}\lim\limits_{0^-} F_Y = \lim\limits_{y\to 0^-} 0 = 0\\ \lim\limits_{0^+} F_Y = \lim\limits_{y\to 0^+} 1 - e^{-\lambda y^2} = 0\\ F_Y(0) = 0.\end{cases}$$

La fonction F_Y est donc continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$. Puisque F_Y est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, Y est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0\\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2} & \text{si } y \geqslant 0.\end{cases}$$

2. Des calculs analogues à ceux réalisés à la question précédente nous assurent que la fonction de répartition de X^2 est :

$$F_{X^2} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt{t}} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

La fonction F_{X^2} est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Étudions la continuité de F_{X^2} en 0.

$$\begin{cases} \lim\limits_{0^-} F_{X^2} = \lim\limits_{t \to 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{0^+} F_{X^2} = \lim\limits_{t \to 0^+} 1 - e^{-\lambda\sqrt{t}} = 0 \\ F_{X^2}(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction F_{X^2} est donc continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$. Puisque F_{X^2} est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, X^2 est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_{X^2} : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{t}} e^{-\lambda\sqrt{t}} & \text{si } y \geqslant 0. \end{cases}$$

3. Des calculs analogues à ceux réalisés à la question précédente nous assurent que la fonction de répartition de X^3 est :

$$F_{X^3} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{t}} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

La fonction F_{X^3} est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Étudions la continuité de F_{X^3} en 0.

$$\begin{cases} \lim\limits_{0^-} F_{X^3} = \lim\limits_{t \to 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{0^+} F_{X^3} = \lim\limits_{t \to 0^+} 1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{t}} = 0 \\ F_{X^3}(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction F_{X^3} est donc continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$. Puisque F_{X^3} est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, X^3 est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_{X^3} : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda}{3} t^{-\frac{2}{3}} e^{-\lambda\sqrt{t}} & \text{si } y \geqslant 0. \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

On trouve immédiatement que $Y(\Omega) = [0, 1]$. Ainsi :

$$\forall y < 0,\ \mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0 \text{ et } \forall y > 1,\ \mathbb{P}(Y \leqslant y) = 1.$$

Soit $y \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leqslant y) &= 1 - \mathbb{P}(Y > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > y,\ \ldots, X_n > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > y) \ldots \mathbb{P}(X_n > y) \quad \text{par indépendance de } X_1, \ldots, X_n \\ &= 1 - (1 - y)^n. \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Y est :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - (1 - y)^n & \text{si } y \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté que F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1. On vérifie aussi que F_Y est continue en 0 et 1, ce qui assure que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$. La variable aléatoire est donc à densité, dont une densité est donnée par :

$$f_Y : y \mapsto \begin{cases} n(1 - y)^{n-1} & \text{si } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

Notons X la distance (en mètres) parcoure par un javelot. Par hypothèse, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On en déduit que la variable $\tilde{X} = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(X \geqslant 75) = 0,1$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 50) = 0,25$. On en déduit que :

$$\mathbb{P}\left(\tilde{X} \geqslant \frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,1 \text{ et } \mathbb{P}\left(\tilde{X} \leqslant \frac{50 - m}{\sigma}\right) = 0,25,$$

i.e.

$$\mathbb{P}\left(\tilde{X} \leqslant \frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,9 \text{ et } \mathbb{P}\left(\tilde{X} \leqslant \frac{m - 50}{\sigma}\right) = 0,75.$$

Une table de la loi normale centrée réduite assure alors que :

$$\frac{75 - m}{\sigma} = 1,28 \text{ et } \frac{m - 50}{\sigma} = 0,67.$$

On en déduit après calculs qu'un javelot parcourt en moyenne environ 58,6 mètres, avec un écart-type de 12,8 mètres.

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Étudions la nature de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f$.

   - Puisque $f = 0$ sur $]-\infty, 0]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
   - Étudions l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
     La fonction ln est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En posant $t = \ln x$, on obtient $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Sous réserve de convergence, le théorème de changement de variables assure que :
     $$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$
     Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

   On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1, ce qui assure que f est une densité.

2. L'étude de l'existence (et le calcul) de $\mathbb{E}(X)$) amène à étudier la nature de l'intégrale :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x.$$
   Appliquons le même changement de variable qu'à la question précédente. Sous réserve de convergence, on obtient :
   $$\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}+t}\,\mathrm{d}t.$$
   Remarquons que :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ -\frac{t^2}{2} + t = -\frac{1}{2}\left[(t-1)^2 - 1\right].$$
   La fonction $(t \mapsto t-1)$ est strictement croissante et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $u = t-1$. Sous réserve de convergence, on a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}+t}\,\mathrm{d}t \underset{u=t-1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{e}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$
   Puisque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$ converge, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u$ converge aussi par linéarité. On en déduit donc que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}+t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$ aussi. Il vient alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, i.e. X admet une espérance et :
   $$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}+t}\,\mathrm{d}t\sqrt{e}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{e}.$$

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^{-x} \neq 0$, donc la fonction F est dérivable (et même $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ et :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \geqslant 0.$$
   La fonction F est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$, la fonction F est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.
   Puisque F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la variable X est à densité, de densité F'.

2. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{-\infty} g = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} g = 1$, $g(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. Ainsi : $\forall y \leqslant -1,\ \mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0$ et $\forall y \geqslant 1,\ \mathbb{P}(Y \leqslant y) = 1$.
   Soit $y \in]-1, 1[$.
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(Y \leqslant y) &= \mathbb{P}\left(\frac{e^X - 1}{e^X + 1} \leqslant y\right) \\
   &= \mathbb{P}\left(e^X - 1 \leqslant y(e^X + 1)\right) \text{ car } e^X + 1 > 0 \\
   &= \mathbb{P}(e^X(1-y) \leqslant 1 + y) \\
   &= \mathbb{P}\left(e^X \leqslant \frac{1+y}{1-y}\right) \text{ car } 1 - y > 0 \\
   &= \mathbb{P}\left(X \leqslant \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right) \text{ par croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R} \\
   &= F\left(\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right) \\
   &= \frac{1+y}{2} = \frac{y-(-1)}{1-(-1)}
   \end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi usuelle : Y suit la loi uniforme sur $]-1,1[$.

Ainsi, Y admet espérance et variance : $\mathbb{E}(Y)=0$ et $\mathbb{V}(Y)=\dfrac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

1. Notons F_X la fonction de répartition de X.

   On trouve après calculs que la fonction de répartition de la variable Y est la fonction :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y<0 \\ 2F_X(\sqrt{y})-1 & \text{si } y \geqslant 0. \end{cases}$$

   La fonction F_X étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

   Puisque $\lim\limits_{0^+} F_X = \dfrac{1}{2}$, il vient que F_Y est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

   La variable aléatoire Y est donc à densité et une densité de Y est donnée par la fonction

$$f : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} & \text{si } y>0. \end{cases}$$

2. La variable X admet une variance donc un moment d'ordre 2, i.e. $Y=X^2$ admet une espérance. D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}\left(X^2\right)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{E}(X)^2=1.$$

   Sous réserve de convergence (absolue), le théorème du transfert assure que :

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right)=\mathbb{E}\left(X^4\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

   Remarquons que l'intégrande est une fonction positive sur $\mathbb{R}$; il suffit donc de montrer que l'intégrale converge.

   Les fonction $u : t \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $v : t \mapsto t^3$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t)=\frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ et } v'(t)=3t^2.$$

   Puisque, par croissances comparées, on a :

$$\lim_{-\infty} uv = \lim_{t\to-\infty} -\frac{t^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} uv = \lim_{t\to+\infty} -\frac{t^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0,$$

   le théorème d'intégration par parties assure que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-3t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

   sont de même nature. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-3t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-3\mathbb{E}\left(X^2\right)$ (d'après le théorème du transfert), $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

   D'après le théorème d'intégration par parties, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 3\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

   Ainsi Y admet un moment d'ordre 2 d'après le théorème du transfert et :

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right)=3\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 3\mathbb{E}\left(X^2\right)=3.$$

   Le théorème de König-Huygens assure que Y admet une variance, égale à :

$$\mathbb{V}(Y)=\mathbb{E}\left(Y^2\right)-\mathbb{E}(Y)^2=2.$$

3. a. Soit λ un réel strictement positif.

   La fonction du second degré $(t \mapsto t(\lambda-t))$ est continue et strictement positive sur l'intervalle $]0,\lambda[$ (elle s'annule en 0 et λ). Par opérations sur les fonctions, il vient que la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(\lambda-t)}}\right)$ est continue sur $]0,\lambda[$.

   La fonction $\varphi : \theta \mapsto \dfrac{\lambda}{2}(1+\sin\theta)$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. En posant $t=\dfrac{\lambda}{2}(1+\sin\theta)$, on a $\mathrm{d}t=\dfrac{\lambda}{2}\cos\theta$. Remarquons que :

$$\lim_{-\frac{\pi}{2}} \varphi = 0 \text{ et } \lim_{\frac{\pi}{2}} \varphi = \lambda.$$

   D'après le théorème de changement de variable et sous réserve de convergence, on

trouve que :

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(\lambda-t)}} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\lambda}{2}\cos\theta}{\frac{\lambda}{2}(1+\sin\theta)\left(\lambda-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}\sin\theta\right)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\lambda}{2}\cos\theta}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}\cos^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \quad \text{car } \lambda>0 \text{ et } \forall\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \cos\theta>0. \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Puisque l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta$ converge (et vaut π), on peut lever la réserve ; l'intégrale $\int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(\lambda-t)}}$ converge et :

$$\lambda>0,\ \int_0^\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(\lambda-t)}} = \pi.$$

b. Puisque U et V sont indépendantes, U^2 et V^2 sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. D'après la question 1, U^2 et V^2 sont des variables à densité (suivant la loi du χ^2) de densité donnée par la fonction f (cf. question 1).
La variable aléatoire $Z=U^2+V^2$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité, elle est donc elle aussi à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$f_Z : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Or :

$$f(z-y)f(y)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-y>0 \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<y<z.$$

- Si $z\leqslant 0$, alors $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}y = 0$.
- Si $z>0$, alors :

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi(z-y)}}e^{-\frac{z-t}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi}\int_0^z \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y(z-y)}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}},$$

la dernière égalité étant obtenue via la question précédente.

On reconnait une densité usuelle : la variable aléatoire Z suit la loi exponentielle de paramètres $\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

1. On vérifie sans difficulté que la fonction $\left(t\mapsto \frac{1}{1+t^2}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. On vérifie rapidement que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut π.

   Ainsi, f est une densité de probabilité si, et seulement si, $a=\frac{1}{\pi}$.

2. a. Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculons $\mathbb{P}(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $A\in\mathbb{R}$.

$$\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\pi}\arctan t\right]_A^x = \frac{1}{\pi}(\arctan x-\arctan A) \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right).$$

   La fonction de répartition de X est donc la fonction $\left(x\mapsto\frac{1}{\pi}\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

   b. Il vient immédiatement que :

   - $\mathbb{P}(X\leqslant 0)=\mathbb{P}(X\geqslant 0)=\frac{1}{2}$ (on pouvait le retrouver sans connaitre la fonction de répartition de X grâce à la parité de la densité f) ;
   - $\mathbb{P}(X\leqslant -1)=\mathbb{P}(X\geqslant 1)=\frac{1}{4}$.

   c. Étudions la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t$. L'intégrande étant paire sur $\mathbb{R}$, cette intégrale est de même nature que $\int_0^{+\infty}\left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t$. Soit $A\in\mathbb{R}_+$.

$$\int_0^A\left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t = \int_0^A\frac{t}{\pi(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|\right]_0^A = \frac{1}{2}\ln\left(1+A^2\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

   L'intégrale $\int_0^{+\infty}\left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t$ diverge, donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right|\mathrm{d}t$ aussi.
   On en déduit que X n'admet pas d'espérance.

3. Notons $T = \tan V$. Puisque $V(\Omega) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $T(\Omega) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(T \leqslant t) &= \mathbb{P}(\tan V \leqslant t)\\ &= \mathbb{P}(V \leqslant \arctan t) \quad \text{(la fonction arctan étant croissante sur } \mathbb{R})\\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan t + \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

On reconnait cette fonction de répartition (cf. question 2.a) : $\tan V$ suit la loi de Cauchy.

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

   On sait qu'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1 admet une espérance égale à 1, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1.

   La fonction f est donc bien une densité de probabilité.

2. a. Étudions la convergence absolue de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

   On reconnait le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, i.e. T_A admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(T_A) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 2.$$

   b. Le temps d'attente de la personne C est le minimum des temps de passages des personnes A et B : $U = \min(T_A, T_B)$. Ainsi $U(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U \leqslant t) &= 1 - \mathbb{P}(U > t)\\ &= 1 - \mathbb{P}(T_A > t, T_B > t)\\ &= 1 - \mathbb{P}(T_A > t)\mathbb{P}(T_B > t) \quad \text{par indépendance de } T_A \text{ et } T_B.\end{aligned}$$

   Or, après intégration par parties, on trouve :

$$\mathbb{P}(T_A > t) = \mathbb{P}(T_B > t) = \int_t^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = (t+1)e^{-t}.$$

   La fonction de répartition de U est donc :

$$F_U : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\\ 1 - (t+1)^2 e^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0.\end{cases}$$

   On vérifie sans difficulté que U est une variable à densité, dont une densité est donné par la fonction :

$$f_U : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\\ 2(t^2+t)e^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0.\end{cases}$$

   c. Par symétrie des rôles des personnes A et B (les lois de T_A et T_B sont identique), le guichet A se libère avant le B avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

   On peut montrer sans difficulté que la fonction $g : x \mapsto -xe^x \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x)$ est une densité de $-T_A$.

   Puisque les variables aléatoires T_B et $-T_A$ sont à densité et indépendantes (par le lemme des coalitions), leur somme $T_B - T_A$ est une variable aléatoire à densité, de densité h donnée par le produit de convolution :

$$h : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

   Or :

$$f(t-x)g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t - x \geqslant 0\\ x \leqslant 0\end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant t\\ x \leqslant 0.\end{cases}$$

   Si $t \geqslant 0$, alors :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{0} -(t-x)e^{-(t-x)}xe^x\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} (x^2 - tx)e^{2x-t}\,\mathrm{d}x.$$

   Après deux intégration par parties successives, on trouve que :

$$\forall t \geqslant 0,\ h(t) = \frac{t+1}{4}e^{-t}.$$

   Il est inutile de déterminer h sur $\mathbb{R}_-$ car :

$$\mathbb{P}(T_A \leqslant T_B) = \mathbb{P}(T_B - T_A \geqslant 0) = \int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$$

   Puisque la loi $\mathcal{E}(1)$ admet une espérance, on peut appliquer la linéarité de l'intégrale :

$$\mathbb{P}(T_A \leqslant T_B) = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $f_1 : z \mapsto \dfrac{\lambda e^{-\lambda z}(\lambda z)^{1-1}}{(1-1)!}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z) = \lambda e^{-\lambda z}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$ est bien une densité de la variable aléatoire $S_1 = X_1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la fonction f_n soit une densité de la variable S_n. Remarquons que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. D'après le lemme des coalitions, S_n et X_{n+1} sont indépendantes. Puisque ces deux variables sont à densité, une densité g de leur somme S_{n+1} est donnée par le produit de convolution :

$$g : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)f_1(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

Or :

$$f_n(x)f_1(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ z - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant z.$$

Distinguons alors deux cas.

- **Premier cas** : si $z < 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)f_1(z-x) = 0$ et ainsi :

$$g(z) = 0 = f_{n+1}(z).$$

- **Second cas** : si $z \geqslant 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^z f_n(x)f_1(z-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^z \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda e^{-\lambda(z-x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda z}\int_0^z x^{n-1}\lambda\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda z}\frac{z^n}{n} \\ &= f_{n+1}(z). \end{aligned}$$

On en déduit que $g = f_{n+1}$ (sur $\mathbb{R}$), i.e. f_{n+1} est une densité de S_{n+1}.

On a donc prouvé par récurrence que la fonction $f_n : z \mapsto \dfrac{\lambda e^{-\lambda z}(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$ est une densité de la variable aléatoire S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé de l'exercice 11. [Énoncé]

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Puisque $([\varepsilon = -1], [\varepsilon = 1])$ forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leqslant y) &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1, Y \leqslant y) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1, Y \leqslant y) \\ &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1, -X \leqslant y) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1, X \leqslant y) \\ &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1)\mathbb{P}(-X \leqslant y) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1)\mathbb{P}(X \leqslant y) \text{ par indépendance de } X \text{ et } \varepsilon \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X \geqslant -y) + \mathbb{P}(X \leqslant y)\right) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant y) \text{ car } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

Les variables X et Y ont la même fonction de répartition donc Y suit la loi normale centrée réduite.

2. Par linéarité de l'espérance, $Y - 2X$ admet une espérance puisque X et Y admettent une espérance et $\mathbb{E}(Y - 2X) = 0$.

Remarquons que $(Y-2X)^2 = (\varepsilon-2)^2X^2$. Puisque $(\varepsilon-2)^2$ admet une espérance (c'est une variable aléatoire finie) et X^2 aussi, $(Y-2X)^2$ admet une espérance par indépendance de $(\varepsilon-2)^2$ et X^2 (lemme des coalitions) et :

$$\mathbb{E}\left((Y-2X)^2\right) = \mathbb{E}\left((\varepsilon-2)^2\right)\mathbb{E}\left(X^2\right) = 5.$$

On conclut via la formule de König-Hyugens : $Y - 2X$ admet une variance égale à 5.

Corrigé de l'exercice 12. [Énoncé]

1. a. Notons $f : x \mapsto e^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$ une densité de X et Y. La variable aléatoire $U = X + Y$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité, elle est donc à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$f_U : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

Or :

$$f(x)f(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \\ 0 \leqslant z - x \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant z$$

- Si $z < 0$, $f(x)f(z-x) = 0$ pour tout réel x et donc $f_U(z) = 0$.
- Si $z \geqslant 0$, alors :

$$f_U(z) = \int_0^z e^{-x}e^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x = e^{-z}\int_0^z \mathrm{d}x = ze^{-z}.$$

Une densité de la variable aléatoire $U = X + Y$ est donc donnée par la fonction :

$$f_U : z \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ ze^{-z} & \text{si } z \geqslant 0 \end{cases}$$

b. On montre sans difficulté que $-Y$ est à densité, de densité donnée par la fonction : $f_{-Y} : y \mapsto e^y \mathbf{1}_{]\infty,0]}(y)$. La variable aléatoire $V = X + (-Y)$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité, elle est donc à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$f_V : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y) f_{-Y}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Or :

$$f(z-y)f_{-Y}(y) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - y \geqslant 0 \\ y \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant z \\ y \leqslant 0. \end{cases}$$

- Si $z < 0$, alors :

$$f_V(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-(z-y)} e^y\,\mathrm{d}y = e^{-z} \int_{-\infty}^{z} e^{2y}\,\mathrm{d}y = e^{-z} \left[\frac{e^{2z}}{2}\right]_{-\infty}^{z} = \frac{e^z}{2}.$$

- Si $z \geqslant 0$, alors :

$$f_V(z) = \int_{-\infty}^{0} e^{-(z-y)} e^y\,\mathrm{d}y = e^{-z} \int_{-\infty}^{0} e^{2y}\,\mathrm{d}y = e^{-z} \left[\frac{e^{2z}}{2}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{e^{-z}}{2}.$$

Une densité de la variable aléatoire $V = X - Y$ est donc donnée par la fonction :

$$f_V : z \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^z}{2} & \text{si } z < 0 \\ \dfrac{e^{-z}}{2} & \text{si } z \geqslant 0. \end{cases}$$

2. Déterminons la fonction F_{X^2} de répartition de la variable aléatoire X^2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = 0$ car $X(\Omega) = [0,1]$.

Si $x \geqslant 0$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = P(X \leqslant \sqrt{x})$ car $X(\Omega) = [0,1]$.

La fonction de répartition de la variable X^2 est la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La fonction de répartition F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1, donc X^2 est une variable à densité et $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0,1]}(x)$ en est une densité.

La variable aléatoire $-Y$ suit la loi uniforme sur $[-1,0]$ (la vérification est immédiate). On en déduit que la fonction $g = \mathbf{1}_{[-1,0]}$ est une densité de $-Y$.

Puisque X et Y sont indépendantes, alors X^2 et $-Y$ le sont aussi par le lemme des coalitions. Ainsi X^2 et $-Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes à densité, donc leur somme U est une variable aléatoire à densité, dont une densité h est donnée par le produit de convolution des fonctions f et g :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

Or :

$$(S) : f(x)g(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant z - x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ z \leqslant x \leqslant z+1 \end{cases}$$

- Si $-1 \leqslant z \leqslant 0$, $(S) \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant z+1$ et :

$$h(z) = \int_0^{z+1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{z+1}.$$

- Si $0 \leqslant z \leqslant 1$, $(S) \Leftrightarrow z \leqslant x \leqslant 1$ et :

$$h(z) = \int_z^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 1 - \sqrt{z}.$$

- sinon, pour toute autre valeur de z, (S) n'admet pas de solution et $h(z) = 0$.

On en déduit qu'une densité de $X^2 - Y$ est donnée par la fonction :

$$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. a. Déterminons la fonction de répartition de M_n. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n \leqslant x) &= \mathbb{P}(V_1 \leqslant x, \ldots, V_n \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(V_1 \leqslant x) \ldots \mathbb{P}(V_n \leqslant x) \quad \text{par indépendance des variables } V_1, \ldots, V_n \\ &= \mathbb{P}(V_1 \leqslant x)^n \quad \text{puisque } V_1, \ldots, V_n \text{ suivent la même loi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que M_n est à densité, de densité donnée par :

$$f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b. Les variables aléatoires M_n et $-V_{n+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes par le lemme des coalitions puisque $V_1, \dots, V_{n+1}$ sont indépendantes.
La variable aléatoire $M_n - V_{n+1}$ est alors la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité ($-V_{n+1}$ suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$, de densité $g = \mathbf{1}_{[-1,0]}$), elle est donc à densité, de densité h donnée par le produit de convolution :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{M_n}(x) g(z-x)\,\mathrm{d}x$$

Or :

$$f_{M_n}(x)g(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant z - x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ z \leqslant x \leqslant z+1 \end{cases}$$

- Si $z < -1$ ou si $z > 1$, $f_{M_n}(x)g(z-x) = 0$ pour tout réel x et donc $h(z) = 0$.
- Si $z \in [-1, 0]$, alors :

$$h(z) = \int_0^{z+1} nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = (z+1)^n.$$

- Si $z \in [0, 1]$, alors :

$$h(z) = \int_z^1 nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = 1 - z^n.$$

Une densité de $M_n - V_{n+1}$ est donc donnée par la fonction :

$$h : z \mapsto \begin{cases} (z+1)^n & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1 - z^n & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c. Utilisons le fait qu'on connaisse une densité de $M_n - V_{n+1}$:

$$\mathbb{P}(V_{n+1} > M_n) = \mathbb{P}(M_n - V_{n+1} < 0) = \int_{-\infty}^0 h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^0 (z+1)^n\,\mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}.$$

Corrigé de l'exercice 13. [Énoncé]

Notons R et J les différences de temps (en minutes) entre les temps d'arrivée respectifs de Roméo et Juliette et minuit. D'après l'énoncé, $R \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 9)$ et $R \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 16)$

Par linéarité de l'espérance, $R - J$ admet une espérance, égale à 5. Par indépendance (supposée) de R et J, $R - J$ admet une variance égale à 25. Puisque R et J suivent des lois normales indépendantes, $R - J$ suit la loi normale d'espérance 5 et d'écart-type 5. Ainsi la variable $X = \dfrac{R - J - 5}{5}$ suit la loi normale centrée réduite.
Remarquons maintenant que leur histoire ne commencera pas ce soir-là si et seulement si les événements $[R > J + 10]$ ou $[J > R + 5]$ sont réalisés. Or, d'après une table de la loi normale centrée réduite, on a :

$$\mathbb{P}(R > J + 10) = \mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 1) = 0,1587$$
$$\text{et } \mathbb{P}(J > R + 5) = \mathbb{P}(X < -2) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 2) = 0,0228$$

Par incompatibilité des événements $[R > J + 10]$ ou $[J > R + 5]$, la probabilité que cette grande histoire d'amour ne commence jamais est égale à 0,1815.

Corrigé de l'exercice 14. [Énoncé]

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Notons f_1 et f_2 des densités respectives de X_1 et E_2, et $Y = X_1 + X_2$. Puisque X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes à densité, Y est une variable à densité, dont une densité g est donnée par le produit de convolution :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{R},\ g(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-x) f_2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2(x-m_1)^2 + (z-x-m_2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Exprimons le polynôme en x à l'intérieur de l'exponentielle sous forme canonique :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R},\ \sigma_2^2(x-m_1)^2 + (z-x-m_2)^2 \\ &\qquad = \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)\left[x - \frac{\sigma_2^2(z-m_1) + \sigma_1^2 m_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right]^2 + \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(z-m_1-m_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ g(z) = \frac{e^{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{2\sigma_1\sigma_2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x - \frac{\sigma_2^2(z-m_1) + \sigma_1^2 m_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2\right)\mathrm{d}x.$$

Réalisons le changement de variable $t = \dfrac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}\left(x - \dfrac{\sigma_2^2(z-m_1)+\sigma_1^2 m_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$ (possible car la fonction associée est strictement croissante et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). On trouve alors :

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{R},\ g(z) &= \frac{e^{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{2\sigma_1\sigma_2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}}e^{-\frac{(z-(m_1+m_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}}e^{-\frac{(z-(m_1+m_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}.\end{aligned}$$

On reconnait une densité connue : X_1+X_2 suit la loi normale d'espérance m_1+m_2 et de variance $\sigma_1^2+\sigma_2^2$.

Corrigé de l'exercice 15. [Énoncé]

1. Notons I l'ensemble des solutions de cette inéquation du second degré. Son discriminant est $\Delta = 4\alpha - 3$.

   - Si $\alpha < \dfrac{3}{4}$, $I = \emptyset$.
   - Si $\alpha = \dfrac{3}{4}$, $I = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. Remarquons que $I \cap [0,1] = \emptyset$.
   - Si $\alpha > \dfrac{3}{4}$, $I = \left[\dfrac{-1-\sqrt{4\alpha-3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{4\alpha-3}}{2}\right]$.

     Remarquons que $\dfrac{-1-\sqrt{4\alpha-3}}{2} < 0$. De plus, on trouve après calculs que :

     $$\frac{-1+\sqrt{4\alpha-3}}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{-1+\sqrt{4\alpha-3}}{2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \alpha \leqslant 3.$$

     Ainsi :

     $$I \cap [0,1] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \dfrac{3}{4} < \alpha < 1 \\ \left[0, \dfrac{-1+\sqrt{4\alpha-3}}{2}\right] & \text{si } 1 \leqslant \alpha \leqslant 3 \\ [0,1] & \text{si } \alpha > 3. \end{cases}$$

2. D'après la question précédente, la fonction de répartition de Y est :

   $$F_Y : \alpha \mapsto \mathbb{P}(Y \leqslant \alpha) = \mathbb{P}(X^2+X+1-\alpha \leqslant 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \leqslant 1 \\ \dfrac{-1+\sqrt{4\alpha-3}}{2} & \text{si } 1 \leqslant \alpha \leqslant 3 \\ 1 & \text{si } \alpha > 3. \end{cases}$$

   On vérifie facilement que F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1 et 3, et continue en 1 et 3, donc sur $\mathbb{R}$. Ainsi, Y est une variable à densité, dont une densité est donnée par :

   $$f_Y : \alpha \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\alpha-3}} & \text{si } 1 \leqslant \alpha \leqslant 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. La variable Y admet une espérance car la densité f_Y est à support borné ($[1,3]$) et :

   $$\mathbb{E}(Y) = \int_1^3 \frac{\alpha}{\sqrt{4\alpha-3}}\,\mathrm{d}\alpha.$$

   La fonction $\left(\alpha \mapsto \sqrt{4\alpha-3}\right)$ étant strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,3]$, on pose le changement de variables $x = \sqrt{4\alpha-3}$. On a alors $\alpha = \dfrac{1}{4}\left(x^2+3\right)$ et $\mathrm{d}\alpha = \dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

   Ainsi :

   $$\mathbb{E}(Y) = \int_1^3 \frac{\alpha}{\sqrt{4\alpha-3}}\,\mathrm{d}\alpha = \int_1^3 \frac{x^2+3}{4x}\times\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{x^2+3}{8}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{24}+\frac{3}{8}x\right]_1^3 = \frac{11}{6}.$$

   On retrouve ce résultat en utilisant la linéarité de l'espérance (X est bornée donc admet des moments d'ordre 1 et 2) :

   $$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(X^2\right)+\mathbb{E}(X)+1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1 = \frac{11}{6}.$$

Corrigé de l'exercice 16. [Énoncé]

Si une variable aléatoire X admet une densité f, on appelle entropie de X la quantité suivante (lorsqu'elle existe) :

$$h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\ln(f(x))f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, *on convient que* $\ln(f(x))f(x) = 0$ *pour tout réel* x *tel que* $f(x) = 0$.

1. L'étude de la fonction $(x \mapsto \ln x - (x-1))$ montre qu'elle est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$, admettant ainsi un maximum atteint en 1. Ainsi :

   $$\forall x > 0,\ \ln x - (x-1) \leqslant 0,\ \text{i.e.}\ \ln x \leqslant x-1.$$

2. Sous réserve de convergence, on a :

$$\begin{aligned} h(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{(t-m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$ convergent et valent respectivement 1 et $\mathbb{V}(X)$ (par définition de la variance), donc $h(X)$ converge par linéarité et vaut :

$$\begin{aligned} h(X) &= \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) + \frac{\mathbb{V}(X)}{2\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[1+\ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right]. \end{aligned}$$

3. a. Avec la convention $0\ln 0 = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -f(x)\ln\left(f(x)\right) &= -f(x)\ln\left(f(x)\right) + f(x)\ln\left(\varphi(x)\right) - f(x)\ln\left(\varphi(x)\right) \\ &= -f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) - f(x)\ln\left(\varphi(x)\right) \\ &= -f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)f(x) + \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}f(x). \end{aligned}$$

Puisque f est une densité de probabilité et puisque Y admet pour espérance m et pour variance σ^2, les intégrales $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}f(x)\,\mathrm{d}x$ converge par linéarité.

On en déduit que $h(Y)$ converge par linéarité, et :

$$\begin{aligned} h(Y) &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\varphi(x)\right)\mathrm{d}x \\ \Big(&= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) + \frac{1}{2}\Big). \end{aligned}$$

b. La question 1 nous assure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$:

$$-f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = f(x)\ln\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right) \leqslant \varphi(x) - f(x).$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient que $\displaystyle -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

On déduit de l'égalité de la question précédente que $h(Y) \leqslant \dfrac{1}{2}\left[1+\ln\left(2\pi\sigma^2\right)\right]$.

Concluons désormais. Remarquons que pour tout variable Y admettant espérance et variance, son entropie existe si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)\mathrm{d}x$ converge. On a donc prouvé que, parmi toutes les variables aléatoires à densité, admettant une entropie de variance donnée σ^2, celles suivants les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale.