

Exercice 1.

[Corrigé] ★☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$ et soit $Y = X^2$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
2. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ? Si oui, les calculer.

Exercice 2.

[Corrigé] ★☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$.
2. Déterminer une densité de X^2 .
3. Déterminer une densité de X^3 .

Exercice 3. ♡

[Corrigé] ★☆☆

Soient X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et en donner une densité.

Exercice 4.

[Corrigé] ★☆☆

On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale de paramètres inconnus $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Au cours d'un entraînement, on constate que :

- 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
- 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.

Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type.

On utilisera une table de la loi normale centrée réduite.

Exercice 5. Loi log-normale

[Corrigé] ★★★

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x)$ est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(\ln X)$.

Exercice 6.

[Corrigé] ★★★

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

1. Montrer que la fonction F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. Déterminer une densité de X .

2. Reconnaître la loi de la variable $Y = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}$.

Préciser si la variable Y admet une espérance et une variance. Les calculer le cas échéant.

Exercice 7. Loi du χ^2

[Corrigé] ★★★

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et soit $Y = X^2$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
2. Montrer que Y admet une espérance et une variance qu'on calculera.
3. a. En posant $t = \frac{\lambda}{2}(1 + \sin \theta)$, montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\int_0^\lambda \frac{dt}{\sqrt{t(\lambda - t)}} = \pi$.
b. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Montrer que $U^2 + V^2$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

Exercice 8. Loi de Cauchy

[Corrigé] ★★★

1. Déterminer la valeur $a \in \mathbb{R}$ pour laquelle la fonction $f : t \mapsto \frac{a}{1 + t^2}$ est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . On dit que X suit **la loi de Cauchy**.
a. Déterminer la fonction de répartition de X .
b. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X \leq 0)$, $\mathbb{P}(X \geq 0)$, $\mathbb{P}(X \leq -1)$ et $\mathbb{P}(X \geq 1)$.
c. Étudier l'existence de l'espérance de X et la calculer le cas échéant.
3. Soit V une variable suivant la loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Montrer que $\tan V$ suit la loi de Cauchy.

Exercice 9.

[Corrigé] ★★★

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto xe^{-x} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x)$ est une densité de probabilité.
2. Trois personnes, qu'on notera A, B et C, arrivent devant deux guichets. La personne C laisse passer les personnes A et B, et attend que le premier guichet se libère pour passer. On note T_A et T_B les variables aléatoires égales aux temps de passage respectifs des personnes A et B. On suppose que T_A et T_B sont des variables aléatoires indépendantes de même loi, et admettant f pour densité.
a. La variable aléatoire T_A admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
b. Déterminer la loi du temps d'attente U de la personne C.
c. Quelle est la probabilité que le guichet A se libère avant le B ? Retrouver le résultat par le calcul.

Exercice 10. Loi Gamma

[Corrigé] ★★☆☆

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : z \mapsto \frac{\lambda e^{-\lambda z} (\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(z)$ est une densité

de la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Exercice 11.

[Corrigé] ★★☆☆

Soient X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et ε une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1; 1\}$. On suppose que X et ε sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de $Y = \varepsilon X$.
2. Déterminer l'espérance et la variance - si elles existent - de la variable aléatoire $Y - 2X$.

Exercice 12. Produits de convolution

[Corrigé] ★★☆☆

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{E}(1)$.
 - a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = X + Y$.
 - b. Déterminer la loi de la variable aléatoire $V = X - Y$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Montrer que la variable aléatoire $Z = X^2 - Y$ admet pour densité la fonction :

$$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leq z \leq 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 < z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Soient V_1, \dots, V_{n+1} des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
 - a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $M_n = \max(V_1, \dots, V_n)$.
 - b. Montrer que la variable aléatoire $M_n - V_{n+1}$ est à densité et déterminer une densité.
 - c. En déduire $\mathbb{P}(V_{n+1} > M_n)$.

Exercice 13.

[Corrigé] ★★☆☆

Roméo et une Juliette se donnent rendez-vous à minuit (sous un balcon). L'heure d'arrivée de la Juliette suit la loi normale d'espérance minuit et d'écart-type 4 minutes. L'heure d'arrivée de Roméo suit la loi normale d'espérance minuit et cinq minutes (il a envie de se faire attendre) et d'écart-type 3 minutes. Juliette est prête à attendre au plus 10 minutes,

alors que Roméo n'est prêt qu'à attendre au plus 5 minutes. Quelle est la probabilité que cette grande histoire d'amour ne commence jamais ? *On utilisera une table de la loi normale centrée réduite.*

Exercice 14. Somme de lois normales indépendantes

[Corrigé] ★★☆☆

Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit encore une loi normale (dont on précisera les paramètres).

Exercice 15. Oral Agro 2008

[Corrigé] ★★☆☆

1. Soit α un réel. Déterminer, en fonction de α , l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $x^2 + x + 1 - \alpha \leq 0$. Lorsque l'intervalle I des solutions est non vide, on précisera son intersection avec l'intervalle $[0, 1]$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la fonction de répartition de $Y = X^2 + X + 1$. En déduire une densité de Y .
3. Calculer l'espérance de Y en utilisant cette densité. Retrouver l'espérance en utilisant la définition de Y .

Exercice 16. Entropie

[Corrigé] ★★☆☆

Si une variable aléatoire X admet une densité f , on appelle entropie de X la quantité suivante (lorsqu'elle existe) :

$$h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} -f(x) \ln(f(x)) dx.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, on convient que $\ln(f(x))f(x) = 0$ pour tout réel x tel que $f(x) = 0$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
2. Soit X une variable suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Montrer que $h(X) = \frac{1}{2} [1 + \ln(2\pi\sigma^2)]$.
3. On souhaite prouver que, parmi toutes les variables aléatoires à densité, admettant une entropie de variance donnée σ^2 , celles suivant les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale. On note φ une densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

- a. Soit Y une variable aléatoire d'espérance m , de variance σ^2 et de densité f telle que la fonction $x \mapsto f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)$ soit intégrable sur \mathbb{R} . Vérifier que :

$$h(Y) = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln(\varphi(x)) dx.$$

- b. En déduire que $h(Y) \leq \frac{1}{2} [1 + \ln(2\pi\sigma^2)]$. Conclure.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

1. $X(\Omega) = [-1, 1]$ donc $Y(\Omega) = [0, 1]$. Ainsi, pour tout $y < 0$, $\mathbb{P}(Y \leq y) = 0$ et pour tout $y > 1$, $\mathbb{P}(Y \leq y) = 1$. Soit $y \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(X^2 \leq y) \\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \quad (\text{car } y \in [0, 1]) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) - \mathbb{P}(X \leq -\sqrt{y}) \\ &= \frac{\sqrt{y} + 1}{2} - \frac{-\sqrt{y} + 1}{2} = \sqrt{y} \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])).\end{aligned}$$

La fonction de répartition de Y est donc la fonction :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

La fonction F_Y est \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$; étudions la continuité de F_Y en 0 et 1. Remarquons que :

$$\begin{cases} \lim_{0^-} F_Y = \lim_{y \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{0^+} F_Y = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{y} = 0 \\ F_Y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lim_{1^-} F_Y = \lim_{y \rightarrow 1^-} \sqrt{y} = 1 \\ \lim_{1^+} F_Y = \lim_{y \rightarrow 1^+} 1 = 1 \\ F_Y(1) = 1. \end{cases}$$

On en déduit que F_Y est continue en 0 et 1, et donc sur \mathbb{R} . Puisque F_Y est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et 1, Y est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_Y : y \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Première méthode : via la loi de Y .

La fonction f_Y est à support borné (dans $[0, 1]$), donc Y admet une espérance et un moment d'ordre 2.

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{y} dy = \left[\frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

De même :

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} y^{\frac{3}{2}} dy = \left[\frac{1}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

La formule de König-Huygens assure que Y admet une variance et :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{4}{45}.$$

Seconde méthode : via le théorème du transfert.

La variable aléatoire X est bornée donc X admet un moment d'ordre 2 et d'ordre 4, i.e. $Y = X^2$ admet un moment d'ordre 1 et d'ordre 2. Le théorème du transfert assure que :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 dx = \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}.$$

et :

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f_X(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^4 dx = \left[\frac{1}{10} x^5 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{5}.$$

On conclut de la même manière pour obtenir la variance de Y .

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

1. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Pour tout $y < 0$, $\mathbb{P}(Y \leq y) = 0$.

$$\forall y \geq 0, \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y^2) = 1 - e^{-\lambda y^2} \text{ car } y^2 \geq 0.$$

La fonction de répartition de Y est donc :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y^2} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

La fonction F_Y est \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Étudions la continuité de F_Y en 0.

$$\begin{cases} \lim_{0^-} F_Y = \lim_{y \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{0^+} F_Y = \lim_{y \rightarrow 0^+} 1 - e^{-\lambda y^2} = 0 \\ F_Y(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction F_Y est donc continue en 0, et donc sur \mathbb{R} . Puisque F_Y est aussi \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0, Y est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

2. Des calculs analogues à ceux réalisés à la question précédente nous assurent que la fonction de répartition de X^2 est :

$$F_{X^2} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt{t}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

La fonction F_{X^2} est \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Étudions la continuité de F_{X^2} en 0.

$$\begin{cases} \lim_{0^-} F_{X^2} = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{0^+} F_{X^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} 1 - e^{-\lambda\sqrt{t}} = 0 \\ F_{X^2}(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction F_{X^2} est donc continue en 0, et donc sur \mathbb{R} . Puisque F_{X^2} est aussi \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0, X^2 est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_{X^2} : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} e^{-\lambda\sqrt{t}} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

3. Des calculs analogues à ceux réalisés à la question précédente nous assurent que la fonction de répartition de X^3 est :

$$F_{X^3} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{t}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

La fonction F_{X^3} est \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Étudions la continuité de F_{X^3} en 0.

$$\begin{cases} \lim_{0^-} F_{X^3} = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{0^+} F_{X^3} = \lim_{t \rightarrow 0^+} 1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{t}} = 0 \\ F_{X^3}(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction F_{X^3} est donc continue en 0, et donc sur \mathbb{R} . Puisque F_{X^3} est aussi \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0, X^3 est une variable à densité, dont une densité est :

$$f_{X^3} : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda}{3} t^{-\frac{2}{3}} e^{-\lambda\sqrt[3]{t}} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

On trouve immédiatement que $Y(\Omega) = [0, 1]$. Ainsi :

$$\forall y < 0, \mathbb{P}(Y \leq y) = 0 \text{ et } \forall y > 1, \mathbb{P}(Y \leq y) = 1.$$

Soit $y \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= 1 - \mathbb{P}(Y > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > y, \dots, X_n > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > y) \dots \mathbb{P}(X_n > y) \quad \text{par indépendance de } X_1, \dots, X_n \\ &= 1 - (1 - y)^n. \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Y est :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - (1 - y)^n & \text{si } y \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté que F_Y est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et 1. On vérifie aussi que F_Y est continue en 0 et 1, ce qui assure que F_Y est continue sur \mathbb{R} . La variable aléatoire est donc à densité, dont une densité est donnée par :

$$f_Y : y \mapsto \begin{cases} n(1 - y)^{n-1} & \text{si } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

Notons X la distance (en mètres) parcourue par un javelot. Par hypothèse, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

On en déduit que la variable $\tilde{X} = \frac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(X \geq 75) = 0,1$ et $\mathbb{P}(X \leq 50) = 0,25$. On en déduit que :

$$\mathbb{P}\left(\tilde{X} \geq \frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,1 \text{ et } \mathbb{P}\left(\tilde{X} \leq \frac{50 - m}{\sigma}\right) = 0,25,$$

i.e.

$$\mathbb{P}\left(\tilde{X} \leq \frac{75 - m}{\sigma}\right) = 0,9 \text{ et } \mathbb{P}\left(\tilde{X} \leq \frac{m - 50}{\sigma}\right) = 0,75.$$

Une table de la loi normale centrée réduite assure alors que :

$$\frac{75 - m}{\sigma} = 1,28 \text{ et } \frac{m - 50}{\sigma} = 0,67.$$

On en déduit après calculs qu'un javelot parcourt en moyenne environ 58,6 mètres, avec un écart-type de 12,8 mètres.

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

1. La fonction f est positive sur \mathbb{R} et continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0. Étudions la nature de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f$.

- Puisque $f = 0$ sur $]-\infty, 0]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ converge et vaut 0.

- Étudions l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

La fonction \ln est \mathcal{C}^1 et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* . En posant $t = \ln x$, on obtient $dt = \frac{dx}{x}$. Sous réserve de convergence, le théorème de changement de variables assure que :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} dx \stackrel{t=\ln x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et vaut 1, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.

On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut 1, ce qui assure que f est une densité.

2. L'étude de l'existence (et le calcul) de $\mathbb{E}(X)$ amène à étudier la nature de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} dx.$$

Appliquons le même changement de variable qu'à la question précédente. Sous réserve de convergence, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} dx \stackrel{t=\ln x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}+t} dt.$$

Remarquons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, -\frac{t^2}{2} + t = -\frac{1}{2}[(t-1)^2 - 1].$$

La fonction $(t \mapsto t-1)$ est strictement croissante et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On pose $u = t-1$. Sous réserve de convergence, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}+t} dt \stackrel{u=t-1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}} du = \sqrt{e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Puisque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}} du$ converge aussi par linéarité. On en déduit donc que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}+t} dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} dx$ aussi. Il vient alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$ converge absolument, i.e. X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}+t} dt \sqrt{e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{e}.$$

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^{-x} \neq 0$, donc la fonction F est dérivable (et même \mathcal{C}^1) sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \geq 0.$$

La fonction F est donc croissante sur \mathbb{R} . Puisque $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$, la fonction F est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X .

Puisque F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , la variable X est à densité, de densité F' .

2. La fonction $g : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est strictement croissante sur \mathbb{R} . Puisque $\lim_{-\infty} g = -1$ et $\lim_{+\infty} g = 1$, $g(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. Ainsi : $\forall y \leq -1$, $\mathbb{P}(Y \leq y) = 0$ et $\forall y \geq 1$, $\mathbb{P}(Y \leq y) = 1$.

Soit $y \in]-1, 1[$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}\left(\frac{e^X - 1}{e^X + 1} \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}(e^X - 1 \leq y(e^X + 1)) \text{ car } e^X + 1 > 0 \\ &= \mathbb{P}(e^X(1 - y) \leq 1 + y) \\ &= \mathbb{P}\left(e^X \leq \frac{1 + y}{1 - y}\right) \text{ car } 1 - y > 0 \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)\right) \text{ par croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R} \\ &= F\left(\ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)\right) \\ &= \frac{1 + y}{2} = \frac{y - (-1)}{1 - (-1)} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi usuelle : Y suit la loi uniforme sur $] -1, 1[$.

Ainsi, Y admet espérance et variance : $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{V}(Y) = \frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

1. Notons F_X la fonction de répartition de X .

On trouve après calculs que la fonction de répartition de la variable Y est la fonction :

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 2F_X(\sqrt{y}) - 1 & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

La fonction F_X étant \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , F_Y est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.

Puisque $\lim_{0^+} F_X = \frac{1}{2}$, il vient que F_Y est continue en 0 et donc sur \mathbb{R} .

La variable aléatoire Y est donc à densité et une densité de Y est donnée par la fonction

$$f : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

2. La variable X admet une variance donc un moment d'ordre 2, i.e. $Y = X^2$ admet une espérance. D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 1.$$

Sous réserve de convergence (absolue), le théorème du transfert assure que :

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Remarquons que l'intégrande est une fonction positive sur \mathbb{R} ; il suffit donc de montrer que l'intégrale converge.

Les fonction $u : t \mapsto -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $v : t \mapsto t^3$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ et } v'(t) = 3t^2.$$

Puisque, par croissances comparées, on a :

$$\lim_{-\infty} uv = \lim_{t \rightarrow -\infty} -\frac{t^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} uv = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0,$$

le théorème d'intégration par parties assure que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-3t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

sont de même nature. Puisque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-3t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et vaut $-3\mathbb{E}(X^2)$

(d'après le théorème du transfert), $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge.

D'après le théorème d'intégration par parties, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[-\frac{t^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Ainsi Y admet un moment d'ordre 2 d'après le théorème du transfert et :

$$\mathbb{E}(Y^2) = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 3\mathbb{E}(X^2) = 3.$$

Le théorème de König-Huygens assure que Y admet une variance, égale à :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 2.$$

3. a. Soit λ un réel strictement positif.

La fonction du second degré ($t \mapsto t(\lambda - t)$) est continue et strictement positive sur l'intervalle $]0, \lambda[$ (elle s'annule en 0 et λ). Par opérations sur les fonctions, il vient que

la fonction $\left(t \mapsto \frac{dt}{\sqrt{t(\lambda - t)}} \right)$ est continue sur $]0, \lambda[$.

La fonction $\varphi : \theta \mapsto \frac{\lambda}{2}(1 + \sin \theta)$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. En posant $t = \frac{\lambda}{2}(1 + \sin \theta)$, on a $dt = \frac{\lambda}{2} \cos \theta$. Remarquons que :

$$\lim_{-\frac{\pi}{2}} \varphi = 0 \text{ et } \lim_{\frac{\pi}{2}} \varphi = \lambda.$$

D'après le théorème de changement de variable et sous réserve de convergence, on

trouve que :

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)}} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\lambda}{2} \cos \theta}{\frac{\lambda}{2}(1+\sin \theta)\left(\lambda-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2} \sin \theta\right)} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\lambda}{2} \cos \theta}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} \cos^2 \theta}} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \quad \text{car } \lambda > 0 \text{ et } \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \cos \theta > 0. \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Puisque l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$ converge (et vaut π), on peut lever la réserve ; l'intégrale

$\int_0^\lambda \frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)}}$ converge et :

$$\lambda > 0, \int_0^\lambda \frac{dt}{\sqrt{t(\lambda-t)}} = \pi.$$

b. Puisque U et V sont indépendantes, U^2 et V^2 sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. D'après la question 1, U^2 et V^2 sont des variables à densité (suivant la loi du χ^2) de densité donnée par la fonction f (cf. question 1).

La variable aléatoire $Z = U^2 + V^2$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité, elle est donc elle aussi à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$f_Z : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)f(y) dy.$$

Or :

$$f(z-y)f(y) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-y > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < y < z.$$

- Si $z \leq 0$, alors $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy = 0$.

- Si $z > 0$, alors :

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi(z-y)}} e^{-\frac{z-y}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} dy = \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{2\pi} \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{y(z-y)}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}},$$

la dernière égalité étant obtenue via la question précédente.

On reconnaît une densité usuelle : la variable aléatoire Z suit la loi exponentielle de paramètres $\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

1. On vérifie sans difficulté que la fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\right)$ est continue et positive sur \mathbb{R} . On vérifie rapidement que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et vaut π .

Ainsi, f est une densité de probabilité si, et seulement si, $a = \frac{1}{\pi}$.

2. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons $\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Soit $A \in \mathbb{R}$.

$$\int_A^x f(t) dt = \left[\frac{1}{\pi} \arctan t\right]_A^x = \frac{1}{\pi} (\arctan x - \arctan A) \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right).$$

La fonction de répartition de X est donc la fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

b. Il vient immédiatement que :

- $\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2}$ (on pouvait le retrouver sans connaître la fonction de répartition de X grâce à la parité de la densité f) ;
- $\mathbb{P}(X \leq -1) = \mathbb{P}(X \geq 1) = \frac{1}{4}$.

c. Étudions la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right| dt$. L'intégrande étant paire sur \mathbb{R} , cette intégrale est de même nature que $\int_0^{+\infty} \left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right| dt$. Soit $A \in \mathbb{R}_+$.

$$\int_0^A \left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right| dt = \int_0^A \frac{t}{\pi(1+t^2)} dt = \left[\frac{1}{2} \ln |1+t^2|\right]_0^A = \frac{1}{2} \ln(1+A^2) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right| dt$ diverge, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{t}{\pi(1+t^2)}\right| dt$ aussi.

On en déduit que X n'admet pas d'espérance.

3. Notons $T = \tan V$. Puisque $V(\Omega) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $T(\Omega) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(T \leq t) &= \mathbb{P}(\tan V \leq t) \\ &= \mathbb{P}(V \leq \arctan t) \quad (\text{la fonction arctan étant croissante sur } \mathbb{R}) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

On reconnaît cette fonction de répartition (cf. question 2.a) : $\tan V$ suit la loi de Cauchy.

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

1. La fonction f est positive sur \mathbb{R} et continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.

On sait qu'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1 admet une espérance égale à 1, donc l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1.

La fonction f est donc bien une densité de probabilité.

2. a. Étudions la convergence absolue de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

On reconnaît le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument, i.e. T_A admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(T_A) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 2.$$

b. Le temps d'attente de la personne C est le minimum des temps de passages des personnes A et B : $U = \min(T_A, T_B)$. Ainsi $U(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U \leq t) &= 1 - \mathbb{P}(U > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_A > t, T_B > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_A > t)\mathbb{P}(T_B > t) \quad \text{par indépendance de } T_A \text{ et } T_B. \end{aligned}$$

Or, après intégration par parties, on trouve :

$$\mathbb{P}(T_A > t) = \mathbb{P}(T_B > t) = \int_t^{+\infty} x e^{-x} dx = (t+1)e^{-t}.$$

La fonction de répartition de U est donc :

$$F_U : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (t+1)^2 e^{-2t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté que U est une variable à densité, dont une densité est donné par la fonction :

$$f_U : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2(t^2 + t)e^{-2t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $f_1 : z \mapsto \frac{\lambda e^{-\lambda z} (\lambda z)^{1-1}}{(1-1)!} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(z) = \lambda e^{-\lambda z} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(z)$ est bien une densité de la variable aléatoire $S_1 = X_1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la fonction f_n soit une densité de la variable S_n . Remarquons que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. D'après le lemme des coalitions, S_n et X_{n+1} sont indépendantes. Puisque ces deux variables sont à densité, une densité g de leur somme S_{n+1} est donnée par le produit de convolution :

$$g : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) f_1(z-x) dx.$$

Or :

$$f_n(x) f_1(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ z-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq z.$$

Distinguons alors deux cas.

- **Premier cas** : si $z < 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) f_1(z-x) = 0$ et ainsi :

$$g(z) = 0 = f_{n+1}(z).$$

– **Second cas** : si $z \geq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^z f_n(x) f_1(z-x) dx \\ &= \int_0^z \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} \int_0^z x^{n-1} \lambda dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} \frac{z^n}{n} \\ &= f_{n+1}(z). \end{aligned}$$

On en déduit que $g = f_{n+1}$ (sur \mathbb{R}), i.e. f_{n+1} est une densité de S_{n+1} .

On a donc prouvé par récurrence que la fonction $f_n : z \mapsto \frac{\lambda e^{-\lambda z} (\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(z)$ est une densité de la variable aléatoire S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé de l'exercice 11. [Énoncé]

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Puisque $([\varepsilon = -1], [\varepsilon = 1])$ forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1, Y \leq y) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1, Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1, -X \leq y) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1, X \leq y) \\ &= \mathbb{P}(\varepsilon = -1) \mathbb{P}(-X \leq y) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1) \mathbb{P}(X \leq y) \text{ par indépendance de } X \text{ et } \varepsilon \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{P}(X \geq -y) + \mathbb{P}(X \leq y)) \\ &= \mathbb{P}(X \leq y) \text{ car } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

Les variables X et Y ont la même fonction de répartition donc Y suit la loi normale centrée réduite.

2. Par linéarité de l'espérance, $Y - 2X$ admet une espérance puisque X et Y admettent une espérance et $\mathbb{E}(Y - 2X) = 0$.

Remarquons que $(Y - 2X)^2 = (\varepsilon - 2)^2 X^2$. Puisque $(\varepsilon - 2)^2$ admet une espérance (c'est une variable aléatoire finie) et X^2 aussi, $(Y - 2X)^2$ admet une espérance par indépendance de $(\varepsilon - 2)^2$ et X^2 (lemme des coalitions) et :

$$\mathbb{E}((Y - 2X)^2) = \mathbb{E}((\varepsilon - 2)^2) \mathbb{E}(X^2) = 5.$$

On conclut via la formule de König-Huygens : $Y - 2X$ admet une variance égale à 5.

Corrigé de l'exercice 12. [Énoncé]

1. a. Notons $f : x \mapsto e^{-x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$ une densité de X et Y . La variable aléatoire $U = X + Y$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité, elle est donc à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$f_U : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(z-x) dx.$$

Or :

$$f(x) f(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \\ 0 \leq z-x \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq z$$

- Si $z < 0$, $f(x) f(z-x) = 0$ pour tout réel x et donc $f_U(z) = 0$.
- Si $z \geq 0$, alors :

$$f_U(z) = \int_0^z e^{-x} e^{-(z-x)} dx = e^{-z} \int_0^z dx = z e^{-z}.$$

Une densité de la variable aléatoire $U = X + Y$ est donc donnée par la fonction :

$$f_U : z \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ z e^{-z} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

b. On montre sans difficulté que $-Y$ est à densité, de densité donnée par la fonction : $f_{-Y} : y \mapsto e^y \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y)$. La variable aléatoire $V = X + (-Y)$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité, elle est donc à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$f_V : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y) f_{-Y}(y) dy.$$

Or :

$$f(z-y) f_{-Y}(y) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-y \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq z \\ y \leq 0. \end{cases}$$

- Si $z < 0$, alors :

$$f_V(z) = \int_{-\infty}^z e^{-(z-y)} e^y dy = e^{-z} \int_{-\infty}^z e^{2y} dy = e^{-z} \left[\frac{e^{2z}}{2} \right]_{-\infty}^z = \frac{e^z}{2}.$$

- Si $z \geq 0$, alors :

$$f_V(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-(z-y)} e^y dy = e^{-z} \int_{-\infty}^0 e^{2y} dy = e^{-z} \left[\frac{e^{2z}}{2} \right]_{-\infty}^0 = \frac{e^{-z}}{2}.$$

Une densité de la variable aléatoire $V = X - Y$ est donc donnée par la fonction :

$$f_V : z \mapsto \begin{cases} \frac{e^z}{2} & \text{si } z < 0 \\ \frac{e^{-z}}{2} & \text{si } z \geq 0. \end{cases}$$

2. Déterminons la fonction F_{X^2} de répartition de la variable aléatoire X^2 . Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = 0$ car $X(\Omega) = [0, 1]$.

Si $x \geq 0$, $F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x) = P(X \leq \sqrt{x})$ car $X(\Omega) = [0, 1]$.

La fonction de répartition de la variable X^2 est la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La fonction de répartition F_{X^2} est continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et 1, donc X^2 est une variable à densité et $f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0,1]}(x)$ en est une densité.

La variable aléatoire $-Y$ suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$ (la vérification est immédiate). On en déduit que la fonction $g = \mathbf{1}_{[-1,0]}$ est une densité de $-Y$.

Puisque X et Y sont indépendantes, alors X^2 et $-Y$ le sont aussi par le lemme des coalitions. Ainsi X^2 et $-Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes à densité, donc leur somme U est une variable aléatoire à densité, dont une densité h est donnée par le produit de convolution des fonctions f et g :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x) dx.$$

Or :

$$(S) : f(x)g(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq z-x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ z \leq x \leq z+1 \end{cases}$$

- Si $-1 \leq z \leq 0$, $(S) \Leftrightarrow 0 \leq x \leq z+1$ et :

$$h(z) = \int_0^{z+1} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{z+1}.$$

- Si $0 \leq z \leq 1$, $(S) \Leftrightarrow z \leq x \leq 1$ et :

$$h(z) = \int_z^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 1 - \sqrt{z}.$$

- sinon, pour toute autre valeur de z , (S) n'admet pas de solution et $h(z) = 0$.

On en déduit qu'une densité de $X^2 - Y$ est donnée par la fonction :

$$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leq z \leq 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. a. Déterminons la fonction de répartition de M_n . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n \leq x) &= \mathbb{P}(V_1 \leq x, \dots, V_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}(V_1 \leq x) \dots \mathbb{P}(V_n \leq x) \quad \text{par indépendance des variables } V_1, \dots, V_n \\ &= \mathbb{P}(V_1 \leq x)^n \quad \text{puisque } V_1, \dots, V_n \text{ suivent la même loi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que M_n est à densité, de densité donnée par :

$$f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b. Les variables aléatoires M_n et $-V_{n+1}$ sont des variables aléatoires indépendantes par le lemme des coalitions puisque V_1, \dots, V_{n+1} sont indépendantes.

La variable aléatoire $M_n - V_{n+1}$ est alors la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité ($-V_{n+1}$ suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$, de densité $g = \mathbf{1}_{[-1,0]}$), elle est donc à densité, de densité h donnée par le produit de convolution :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{M_n}(x)g(z-x) dx$$

Or :

$$f_{M_n}(x)g(z-x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq z-x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ z \leq x \leq z+1 \end{cases}$$

- Si $z < -1$ ou si $z > 1$, $f_{M_n}(x)g(z-x) = 0$ pour tout réel x et donc $h(z) = 0$.

- Si $z \in [-1, 0]$, alors :

$$h(z) = \int_0^{z+1} nx^{n-1} dx = (z+1)^n.$$

- Si $z \in [0, 1]$, alors :

$$h(z) = \int_z^1 nx^{n-1} dx = 1 - z^n.$$

Une densité de $M_n - V_{n+1}$ est donc donnée par la fonction :

$$h : z \mapsto \begin{cases} (z+1)^n & \text{si } -1 \leq z \leq 0 \\ 1 - z^n & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- c. Utilisons le fait qu'on connaisse une densité de $M_n - V_{n+1}$:

$$\mathbb{P}(V_{n+1} > M_n) = \mathbb{P}(M_n - V_{n+1} < 0) = \int_{-\infty}^0 h(z) dz = \int_{-1}^0 (z+1)^n dz = \frac{1}{n+1}.$$

Corrigé de l'exercice 13. [\[Énoncé\]](#)

Notons R et J les différences de temps (en minutes) entre les temps d'arrivée respectifs de Roméo et Juliette et minuit. D'après l'énoncé, $R \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 9)$ et $R \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 16)$

Par linéarité de l'espérance, $R - J$ admet une espérance, égale à 5. Par indépendance (supposée) de R et J , $R - J$ admet une variance égale à 25. Puisque R et J suivent des lois normales indépendantes, $R - J$ suit la loi normale d'espérance 5 et d'écart-type 5. Ainsi la variable $X = \frac{R - J - 5}{5}$ suit la loi normale centrée réduite.

Remarquons maintenant que leur histoire ne commencera pas ce soir-là si et seulement si les événements $[R > J + 10]$ ou $[J > R + 5]$ sont réalisés. Or, d'après une table de la loi normale centrée réduite, on a :

$$\mathbb{P}(R > J + 10) = \mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 0,1587$$

$$\text{et } \mathbb{P}(J > R + 5) = \mathbb{P}(X < -2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 0,0228$$

Par incompatibilité des événements $[R > J + 10]$ ou $[J > R + 5]$, la probabilité que cette grande histoire d'amour ne commence jamais est égale à 0,1815.

Corrigé de l'exercice 14. [\[Énoncé\]](#)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Notons f_1 et f_2 des densités respectives de X_1 et E_2 , et

$Y = X_1 + X_2$. Puisque X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes à densité, Y est une variable à densité, dont une densité g est donnée par le produit de convolution :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{R}, g(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-x)f_2(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} dx \\ &= \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2(x-m_1)^2 + (z-x-m_2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right) dx. \end{aligned}$$

Exprimons le polynôme en x à l'intérieure de l'exponentielle sous forme canonique :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \sigma_2^2(x-m_1)^2 + (z-x-m_2)^2 \\ = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left[x - \frac{\sigma_2^2(z-m_1) + \sigma_1^2 m_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right]^2 + \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(z-m_1-m_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall z \in \mathbb{R}, g(z) = \frac{e^{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{2\sigma_1\sigma_2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(x - \frac{\sigma_2^2(z-m_1) + \sigma_1^2 m_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2\right) dx.$$

Réalisons le changement de variable $t = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2} \left(x - \frac{\sigma_2^2(z-m_1) + \sigma_1^2 m_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$ (possible car la fonction associée est strictement croissante et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}). On trouve alors :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{R}, g(z) &= \frac{e^{-\frac{(z-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{2\sigma_1\sigma_2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} e^{-\frac{(z-(m_1+m_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} e^{-\frac{(z-(m_1+m_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}. \end{aligned}$$

On reconnaît une densité connue : $X_1 + X_2$ suit la loi normale d'espérance $m_1 + m_2$ et de variance $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Corrigé de l'exercice 15. [\[Énoncé\]](#)

1. Notons I l'ensemble des solutions de cette inéquation du second degré. Son discriminant est $\Delta = 4\alpha - 3$.

- Si $\alpha < \frac{3}{4}$, $I = \emptyset$.
- Si $\alpha = \frac{3}{4}$, $I = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Remarquons que $I \cap [0, 1] = \emptyset$.
- Si $\alpha > \frac{3}{4}$, $I = \left[\frac{-1 - \sqrt{4\alpha - 3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{4\alpha - 3}}{2}\right]$.

Remarquons que $\frac{-1 - \sqrt{4\alpha - 3}}{2} < 0$. De plus, on trouve après calculs que :

$$\frac{-1 + \sqrt{4\alpha - 3}}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1 \quad \text{et} \quad \frac{-1 + \sqrt{4\alpha - 3}}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq 3.$$

Ainsi :

$$I \cap [0, 1] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \frac{3}{4} < \alpha < 1 \\ \left[0, \frac{-1 + \sqrt{4\alpha - 3}}{2}\right] & \text{si } 1 \leq \alpha \leq 3 \\ [0, 1] & \text{si } \alpha > 3. \end{cases}$$

2. D'après la question précédente, la fonction de répartition de Y est :

$$F_Y : \alpha \mapsto \mathbb{P}(Y \leq \alpha) = \mathbb{P}(X^2 + X + 1 - \alpha \leq 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{-1 + \sqrt{4\alpha - 3}}{2} & \text{si } 1 \leq \alpha \leq 3 \\ 1 & \text{si } \alpha > 3. \end{cases}$$

On vérifie facilement que F_Y est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 1 et 3, et continue en 1 et 3, donc sur \mathbb{R} . Ainsi, Y est une variable à densité, dont une densité est donnée par :

$$f_Y : \alpha \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\alpha - 3}} & \text{si } 1 \leq \alpha \leq 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. La variable Y admet une espérance car la densité f_Y est à support borné ($[1, 3]$) et :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_1^3 \frac{\alpha}{\sqrt{4\alpha - 3}} d\alpha.$$

La fonction ($\alpha \mapsto \sqrt{4\alpha - 3}$) étant strictement croissante et de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, 3]$, on pose le changement de variables $x = \sqrt{4\alpha - 3}$. On a alors $\alpha = \frac{1}{4}(x^2 + 3)$ et $d\alpha = \frac{x}{2} dx$.

Ainsi :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_1^3 \frac{\alpha}{\sqrt{4\alpha - 3}} d\alpha = \int_1^3 \frac{x^2 + 3}{4x} \times \frac{x}{2} dx = \int_1^3 \frac{x^2 + 3}{8} dx = \left[\frac{x^3}{24} + \frac{3}{8}x\right]_1^3 = \frac{11}{6}.$$

On retrouve ce résultat en utilisant la linéarité de l'espérance (X est bornée donc admet des moments d'ordre 1 et 2) :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X) + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}.$$

Corrigé de l'exercice 16. [Énoncé]

Si une variable aléatoire X admet une densité f , on appelle entropie de X la quantité suivante (lorsqu'elle existe) :

$$h(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\ln(f(x))f(x) dx.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, on convient que $\ln(f(x))f(x) = 0$ pour tout réel x tel que $f(x) = 0$.

1. L'étude de la fonction ($x \mapsto \ln x - (x - 1)$) montre qu'elle est croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$, admettant ainsi un maximum atteint en 1. Ainsi :

$$\forall x > 0, \ln x - (x - 1) \leq 0, \text{ i.e. } \ln x \leq x - 1.$$

2. Sous réserve de convergence, on a :

$$\begin{aligned} h(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right] dt. \end{aligned}$$

Or les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$ convergent et valent respectivement 1 et $\mathbb{V}(X)$ (par définition de la variance), donc $h(X)$ converge par linéarité et vaut :

$$\begin{aligned} h(X) &= \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{\mathbb{V}(X)}{2\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2} [1 + \ln(2\pi\sigma^2)]. \end{aligned}$$

3. a. Avec la convention $0 \ln 0 = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -f(x) \ln(f(x)) &= -f(x) \ln(f(x)) + f(x) \ln(\varphi(x)) - f(x) \ln(\varphi(x)) \\ &= -f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) - f(x) \ln(\varphi(x)) \\ &= -f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) + \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) f(x) + \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} f(x). \end{aligned}$$

Puisque f est une densité de probabilité et puisque Y admet pour espérance m et pour variance σ^2 , les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) f(x) dx$ et $\int_{\mathbb{R}} \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} f(x) dx$ convergent par linéarité.

On en déduit que $h(Y)$ converge par linéarité, et :

$$\begin{aligned} h(Y) &= - \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln(\varphi(x)) dx \\ &= \left(- \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx + \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

b. La question 1 nous assure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$:

$$-f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = f(x) \ln\left(\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right) \leq \varphi(x) - f(x).$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient que $-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx \leq 0$.

On déduit de l'égalité de la question précédente que $h(Y) \leq \frac{1}{2} [1 + \ln(2\pi\sigma^2)]$.

Concluons désormais. Remarquons que pour toute variable Y admettant espérance et variance, son entropie existe si, et seulement si, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x) \ln\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) dx$ converge. On a donc prouvé que, parmi toutes les variables aléatoires à densité, admettant une entropie de variance donnée σ^2 , celles suivant les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale.