Exercice 1

Cf. TP 2 d'info.

Exercice 2

I. 1. Soit $t=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$t\in \mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x+2y+z=0\\2x-2y-z=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\z=-2y\end{cases}\quad.$$

On en déduit alors que :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(u)\quad \text{où } u=(0,1,-2).}$$

Le vecteur u étant non nul, la famille (u) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
Puisque $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))$ où (e_1,e_2,e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f)&=\mathrm{Vect}\left((1,1,2),(0,2,-2),(0,1,-1)\right)\\&=\mathrm{Vect}\left((1,1,2),(0,1,-1)\right)\ \text{ car } (0,2,-2),=2(0,1,-1).\end{aligned}$$

Les vecteurs $a=(1,1,2)$ et $b=(0,1,-1)$ n'étant pas colinéaires, la famille (a,b) forme donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Puisque $\mathrm{Ker}(f)\neq\{(0,0,0)\}$, f n'est pas injectif et donc non bijectif.
L'endomorphisme f n'est donc pas un automorphisme.

3. a. Puisque $f(u)=0=0u$, le vecteur u est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda=0$. Déterminons l'image de v par f :

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $f(v)=1v$ et v est un vecteur propre associé à la valeur propre $\mu=1$.

b. On sait déjà que (u) est une base de $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
Déterminons une base de $\mathrm{Ker}(f-\mu\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Ker}\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$.

$$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}\left(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)\Leftrightarrow(A-I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\2&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\2x-2y-2z=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\z=-y\end{cases}$$

On en déduit alors que $\mathrm{Ker}(f-\mu\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Vect}(v)$ où $v=(0,1,-1)$. Puisque $v\neq0$, (v) est une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f-\mu\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

4. Soit $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ et soit $w=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$f(w)=\lambda w\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x&=\lambda x\\x+2y+z&=\lambda y\\2x-2y-z&=\lambda z\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1-\lambda)x&=0\\x+(2-\lambda)y+z&=0\\2x-2y-(1+\lambda)z&=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x&=0\quad(\text{car }\lambda\neq1)\\(2-\lambda)y+z&=0\\-2y-(1+\lambda)z&=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x&=0\\(2-\lambda)y+z&=0\\\left[-2+(1+\lambda)(2-\lambda)\right]y&=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x&=0\\(2-\lambda)y+z&=0\\-\lambda(\lambda-1)y&=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\z=0\\y=0\quad(\text{car }\lambda\neq0\text{ et }\lambda\neq1)\end{cases}$$

On en déduit que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, l'équation $f(w)=\lambda w$, d'inconnue $w\in\mathbb{R}^3$, n'admet aucune solution non nulle.

5. Calculons $f(w)$:

$$A\begin{pmatrix}\frac14\\\frac34\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac14\\\frac34\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac14\\\frac74\\-1\end{pmatrix}.=\begin{pmatrix}\frac14\\\frac34\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Il vient alors que $\boxed{f(w)=w+v.}$

6. Vérifions que $\mathcal{C}=(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(u,v,w)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}0&0&1/4\\1&1&3/4\\-2&-1&0\end{pmatrix}&=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&3/4\\-2&-1&0\\0&0&1/4\end{pmatrix}\\&=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&3/4\\0&1&3/2\\0&0&1/4\end{pmatrix}(L_2)\leftarrow(L_2)+2(L_1)\\&=3.\end{aligned}$$

On en déduit alors que la famille $\mathcal{C}$ est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (qui est de dimension 3). La famille $\mathcal{C}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Puisque $f(u)=0,\ f(v)=v$ et $f(w)=v+w$ la matrice T de f dans $\mathcal{C}=(u,v,w)$ est :

$$\boxed{T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

II. 1. D'après l'hypothèse de l'énoncé :

$$f\circ g=(g\circ g)\circ g=g\circ(g\circ g)=g\circ f.$$

On en déduit donc que $\boxed{f\circ g=g\circ f}$.
Ainsi $f(g(u))=g(f(u))=g(0)=0$ et $f(g(v))=g(f(v))=g(v)$.
On a alors $\boxed{f(g(u))=0}$ et $\boxed{f(g(v))=g(v).}$

2.
- D'après la question précédente, $f(g(u))=0$, i.e. $g(u)\in\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}(u)$. $\boxed{\text{Il existe donc } a\in\mathbb{R} \text{ tel que } g(u)=au.}$
- De la même manière, $f(g(v))=g(v)$, i.e. $g(v)\in\operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})=E_1(f)=\operatorname{Vect}(v)$. $\boxed{\text{Il existe donc } b\in\mathbb{R} \text{ tel que } g(v)=bv.}$

3. On note N la matrice de g dans la base $\mathcal{C}=(u,v,w)$ définie dans la partie précédente.
Puisque $\mathcal{C}=(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il existe trois réels c, d et e tels que $g(w)=cu+dv+ew$. Puisque $g(u)=au,\ g(v)=bv$ et $g(w)=cu+dv+ew$, la matrice N de g dans la base $\mathcal{C}=(u,v,w)$ est :

$$\boxed{N=\begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&d\\0&0&e\end{pmatrix}}$$

4. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $g\circ g=f$. D'après les questions précédentes, sa matrice N dans $\mathcal{C}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&d\\0&0&e\end{pmatrix}\quad\text{où } (a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5.$$

Ainsi, après calculs de N^2, on trouve que :

$$\begin{aligned}g\circ g=f&\Leftrightarrow N^2=T\\&\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=0\\b^2=1\\e^2=1\\ac+ce=0\\bd+de=1\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b^2=1\\e^2=1\\c=0\\d(b+e)=1\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=1\\e=1\\c=0\\d=\dfrac12\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}a=0\\b=-1\\e=-1\\c=0\\d=-\dfrac12.\end{cases}\end{aligned}$$

Autrement dit, la matrice de g dans la base $\mathcal{C}$ est :

$$\boxed{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1/2\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{ou}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1/2\\0&0&-1\end{pmatrix}.}$$

Réciproquement, si g a pour matrice N dans la base $\mathcal{C}$ l'une des deux matrices ci-dessus, on a immédiatement $N^2=T$ et ainsi que $g\circ g=f$.
Autrement dit, les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g\circ g=f$ sont les endomorphismes dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est l'une des deux matrices obtenues.

Exercice 3

1.

```python
def simule_Y(n):
    p = 1/n # on se place dans l'urne U par défaut
    if  rd.random() <0.5: # choix de l'urne V avec la probabilité 1/2
        p = (n-1)/n
    y = 1
    while rd.random() > p:
            y += 1
            p = 1 -p # changement d'urne
    return y
```

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Puisque :

$$[X = k] = B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k},$$

la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet (U, V), garantit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(U \cap [X = k]) + \mathbb{P}(V \cap [X = k]) \\ &= \mathbb{P}(U \cap B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) + \mathbb{P}(V \cap B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}).\end{aligned}$$

D'après la formule des probabilités composées, on trouve :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(U \cap B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) \\ &= \mathbb{P}(U)\mathbb{P}_U(B_1)\dots\mathbb{P}_{U\cap B_1\cap\dots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\mathbb{P}_{U\cap B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(\overline{B_k}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} \\ &= \frac{n-1}{2n^k}\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve que :

$$\mathbb{P}(V \cap B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n} = \frac{(n-1)^{k-1}}{2n^k}$$

On en déduit donc le résultat attendu :

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{(n-1)^{k-1} + n - 1}{2n^k}.}$$

3. On commence par remarquer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} |k\mathbb{P}(X = k)| &= \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2}\left(\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\right) \\ &= \frac{n-1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\right) + \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\right)\end{aligned}$$

Puisque les séries géométriques dérivées $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$ convergent (car $-1 < \frac{1}{n} < 1$ et $-1 < \frac{n-1}{n} < 1$) et ont pour sommes respectives :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{n^2}{(n-1)^2} \text{ et } \frac{1}{\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^2} = n^2,$$

<u>la variable aléatoire X admet une espérance</u> et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n-1}{2n} \times \frac{n^2}{(n-1)^2} + \frac{1}{2n} \times n^2 = \frac{n}{2(n-1)} + \frac{n}{2} = \boxed{\frac{n^2}{2(n-1)}.}$$

4. a. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Puisque :

$$[Y = 2i] = \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{2i-1}} \cap B_{2i},$$

on trouve via la formule des probabilités totales avec le système complet (U, V) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 2i) &= \mathbb{P}(U \cap [Y = 2i]) + \mathbb{P}(V \cap [Y = 2i]) \\ &= \mathbb{P}(U \cap \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{2i-1}} \cap B_{2i}) + \mathbb{P}(V \cap \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{2i-1}} \cap B_{2i}).\end{aligned}$$

Remarquons que, lorsque l'événement $[Y = 2i]$ est réalisé, on change d'urne à chaque tirage, n'ayant tiré tiré que des boules noires au $(2i - 1)$ premiers tirages.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons U_k (resp. V_k) l'événement "le k-ème tirage a lieu dans l'urne U (resp. V)". Puisqu'à un tirage donné, la couleur de la boule tirée ne dépend que de l'urne dans laquelle on tire, on trouve, en appliquant la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U \cap \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{2i-1}} \cap B_{2i}) &= \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{V_2}(\overline{B_2})\dots\mathbb{P}_{U_{2i-1}}(\overline{B_{2i-1}})\mathbb{P}_{V_2}(B_{2i}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n}\right)^{i-1} \times \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{(n-1)^{i+1}}{2n^{2i}}.\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V\cap\overline{B_1}\cap\dots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i}) &= \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{U_2}(\overline{B_2})\dots\mathbb{P}_{V_{2i-1}}(\overline{B_{2i-1}})\mathbb{P}_{U_{2i}}(B_{2i})\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\times\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{(n-1)^{i-1}}{2n^{2i}}.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(Y=2i)=\frac{(n-1)^{i+1}}{2n^{2i}}+\frac{(n-1)^{i-1}}{2n^{2i}}=\frac{n^2-2n+2}{2n^2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}.$$

On obtient bien le résultat attendu :

$$\boxed{\forall i\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y=2i)=\frac{n^2-2n+2}{2n^2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}.}$$

b. Soit $i\in\mathbb{N}^*$. Puisque $[Y=2i+1]=\overline{B_1}\cap\dots\cap\overline{B_{2i}}\cap B_{2i+i}$, on trouve via la formule des probabilités totales avec le système complet (U,V) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=2i+1) &= \mathbb{P}(U\cap[Y=2i+1])+\mathbb{P}(V\cap[Y=2i+1]])\\ &= \mathbb{P}(U\cap\overline{B_1}\cap\dots\cap\overline{B_{2i}}\cap B_{2i+i})+\mathbb{P}(V\cap\overline{B_1}\cap\dots\cap\overline{B_{2i}}\cap B_{2i+1}).\end{aligned}$$

En réutilisant les calculs précédents, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U\cap\overline{B_1}\cap\dots\cap\overline{B_{2i}}\cap B_{2i+1}) &= \mathbb{P}(U)\mathbb{P}_U(\overline{B_1})\mathbb{P}_V(\overline{B_2})\dots\mathbb{P}_U(\overline{B_{2i-1}})\mathbb{P}_V(\overline{B_{2i}})\mathbb{P}_U(B_{2i+1})\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}\right)^i\times\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V\cap\overline{B_1}\cap\dots\cap\overline{B_{2i}}\cap B_{2i+1}) &= \mathbb{P}(V)\mathbb{P}_V(\overline{B_1})\mathbb{P}_U(\overline{B_2})\dots\mathbb{P}_V(\overline{B_{2i-1}})\mathbb{P}_U(\overline{B_{2i}})\mathbb{P}_V(B_{2i+1})\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}\right)^i\times\frac{n-1}{n}\\ &= \frac{n-1}{2n}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i,\end{aligned}$$

On en déduit que : $\boxed{\forall i\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y=2i+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i.}$

En reprenant les calculs de la question 2.a de la partie I, il vient rapidement que $\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{2}$, assurant ainsi que <u>la formule ci-dessus est encore vraie pour $i=0$</u>.

c. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. En séparant la somme selon ses termes de rangs pairs et impairs, on a :

$$\begin{aligned}E_{2p} &= \sum_{k=1}^{2p}k\mathbb{P}(Y=k)\\ &= \sum_{i=1}^{p}2i\mathbb{P}(Y=2i)+\sum_{i=0}^{p-1}(2i+1)\mathbb{P}(Y=2i+1)\\ &= \sum_{i=1}^{p}2i\frac{n^2-2n+2}{2n^2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}+\sum_{i=0}^{p-1}(2i+1)\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i\\ &= \frac{n^2-2n+2}{n^2}\sum_{i=1}^{p}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}+\sum_{i=0}^{p-1}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i\\ &= \frac{n^2-2n+2}{n^2}\sum_{i=1}^{p}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}+\frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{p-1}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i\end{aligned}$$

Puisque $\left|\frac{n-1}{n^2}\right|<1$, on reconnait des sommes partielles de séries géométriques et séries géométriques dérivées. Or :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i=\frac{1}{1-\frac{n-1}{n^2}}=\frac{n^2}{n^2-n+1}$$

et

$$\sum_{i=1}^{+\infty}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)^2}=\frac{n^4}{(n^2-n+1)^2}$$

Ainsi, la suite $(E_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge par linéarité et :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to+\infty}E_{2p} &= \frac{n^2-2n+2}{n^2}\times\frac{n^4}{(n^2-n+1)^2}+\frac{n-1}{n^2}\times\frac{n^4}{(n^2-n+1)^2}+\frac{n^2}{2(n^2-n+1)}\\ &= \boxed{\frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}.}\end{aligned}$$

d. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Il était possible d'adapter la démonstration précédente, mais on propose ici une autre méthode. Elle est basée sur la remarque suivante, liant E_{2p+1} et E_{2p} :

$$\begin{aligned} E_{2p+1} &= \sum_{k=1}^{2p+1} k\mathbb{P}(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{2p} k\mathbb{P}(Y=k) + (2p+1)\mathbb{P}(Y=2p+1) \\ &= E_{2p} + (2p+1)\mathbb{P}(Y=2p+1). \quad (*) \end{aligned}$$

Or :

$$(2p+1)\mathbb{P}(Y=2p+1) = \frac{2p+1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{2p+1} = \frac{2p+1}{2}\exp\left((2p+1)\ln\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\right)$$

Puisque $0 < \dfrac{n-1}{n^2} < 1$, on trouve, par croissances comparées :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{2p+1}{2}\exp\left((2p+1)\ln\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\right) = 0$$

L'égalité $(*)$ nous assure alors que la suite $(E_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge et a la même limite que la suite $(E_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$.

e. Puisque les suites $(E_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(E_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent le même réel, la suite

$$(E_p)_{p\in\mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^{p} k\mathbb{P}(Y=k)\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$$

converge, i.e. la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(Y=k)$ converge (absolument car tous ses termes sont positifs), i.e. la variable aléatoire Y admet une espérance. On trouve alors :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}}.$$

5. a. Si $n=2$, la loi de X est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^k}$$

De plus :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y=2i) = \frac{1}{2^{2i}} \text{ et } \forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=2i+1) = \frac{1}{2^{2i+1}}.$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{2^k} = \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^{k-1}} \times \frac{1}{2}.$$

Les variables aléatoires X et Y suivent la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

b. Si $n=2$, le contenu des urnes U et V est identique : elles contiennent chacune une boule blanche et une boule noire. Le changement éventuel d'urne n'a aucun effet : tout se passe comme si on tirait dans la même urne.
X (resp. Y) est alors le temps d'attente respectifs, lors d'une suite d'épreuves indépendantes de la première boule noire (resp. blanche). La probabilité de succès étant $\frac{1}{2}$ dans les deux cas, X et Y suivent toutes les deux la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

De plus, on retrouve bien que $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 2 = \dfrac{3n^2}{2(n^2-n+1)}}$ lorsque $n=2$.

6.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) &= \frac{n^2}{2(n-1)} - \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)} \\ &= \frac{n^2(n^2-n+1-3(n-1))}{2(n-1)(n^2-n+1)} \\ &= \frac{n^2(n^2-4n+4)}{2(n-1)(n^2-n+1)} \\ &= \frac{n^2(n-2)^2}{2(n-1)(n^2-n+1)} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)}$ et :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) \Leftrightarrow n = 2.}$$

* *
*