Questions de cours

1. Donner une caractérisation d'une application linéaire respectivement injective, surjective et d'un isomorphisme par son rang puis par l'image d'une base.

2. Énoncer le théorème du rang pour une matrice.

Exercice 1

Écrire en Python un algorithme de tri de votre choix.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note u et v les vecteurs $u = (0, 1, -2)$ et $v = (0, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

Partie I : réduction de l'endomorphisme f

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

2. Justifier que f n'est pas un automorphisme.

3. a. Prouver que u et v sont deux **vecteurs propres** de f, c'est-à-dire deux vecteurs non nuls vérifiant qu'il existe deux réels λ et μ tels que $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = \mu v$. Préciser la valeur de λ et μ, appelés **valeurs propres** de f.
   b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\operatorname{Ker}(f - \mu \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

4. Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, l'équation $f(w) = \lambda w$, d'inconnue $w \in \mathbb{R}^3$, n'admet aucune solution non nulle.

5. Vérifier que le vecteur $w = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$ vérifie $f(w) = w + v$.

6. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$

Partie II : résolution d'une équation d'inconnue f

Dans les questions 1, 2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g \circ g = f.$$

1. Montrer que $f \circ g = g \circ f$. En déduire que $f(g(u)) = 0$ et $f(g(v)) = g(v)$.

2. En déduire qu'il existe deux réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$. *On pourra utiliser la question I.3.b.*

3. On note N la matrice de g dans la base $\mathcal{C} = (u, v, w)$ définie dans la partie précédente.
   Justifier qu'il existe trois réels c, d et e tels que :

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

4. Montrer que les endomorphismes vérifiant $g \circ g = f$ sont les endomorphismes dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Indication : on pourra résoudre l'équation $N^2 = T$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On dispose de deux urnes U et V, l'urne U contenant $n-1$ boules noires et une boule blanche et l'urne V contenant $n-1$ boules blanches et une boule noire. Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage, puis il effectue un tirage d'une boule avec remise de cette boule dans l'urne dont elle provient. Chaque tirage suivant a lieu dans la même urne que le tirage qui le précède si ce dernier a donné une boule blanche, et dans l'autre urne dans le cas contraire.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement "on obtient une boule blanche au i-ème tirage". On note X le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule noire et Y le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule blanche. On note enfin U (resp. V) l'événement "le premier tirage a lieu dans l'urne U (resp. V)".

1. Écrire en `Python` une fonction `simule_Y` prenant en arguments un entier n simulant la réalisation de la variable Y selon le protocole décrit dans cette partie. *On indiquera en commentaire la ligne correspondant au choix de l'urne.*

2. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, écrire l'événement $[X = k]$ à l'aide de certains événements de la suite $(B_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

   En déduire, à l'aide du système complet (U, V), que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{(n-1)^{k-1} + n - 1}{2n^k}.$$

3. Montrer que X admet une espérance et déterminer sa valeur.

4. a. Montrer que :
$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = 2i) = \frac{n^2 - 2n + 2}{2n^2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}.$$

   b. Montrer également que :
$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = 2i+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i}.$$

   c. On pose :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ E_{2p} = \sum_{k=1}^{2p} k\mathbb{P}(Y = k) \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N},\ E_{2p+1} = \sum_{k=1}^{2p+1} k\mathbb{P}(Y = k)$$

   Montrer que la suite $(E_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{3n^2}{2(n^2 - n + 1)}$. *On pourra séparer les termes de rangs pairs et impairs.*

   d. Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} (2p+1)\mathbb{P}(Y = 2p+1)$. En déduire que $(E_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge et a la même limite que $(E_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$.

   e. En déduire que Y admet une espérance qu'on déterminera.

5. On se place ici dans le cas particulier où $n = 2$.

   a. Montrer que X et Y suivent la même loi. Reconnaitre cette loi.

   b. Comment pouvait-on retrouver **sans calculs** le résultat des deux questions précédentes (5.a et 4.e) ?

6. Montrer que $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$, avec égalité si, et seulement si, $n = 2$.

*   *
*