

Semaines 15 et 16
du lundi 20 au 31 janvier 2025

Chapitre : Variables aléatoires à densité

Mots-clé du cours :

- notion de densité,
- moments d'une variable aléatoire,
- lois usuelles :
 - loi uniforme sur $[a, b]$
 - lois exponentielles
 - lois normales : densité et fonction de répartition (avec représentations graphiques), espérance et variance), simulation informatique (par outil intégré à **Python** que les étudiants ne doivent pas connaître par cœur), propriétés de régularité et de symétrie de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, loi de $aX+b$ lorsque X suit une loi normale
 - indépendance de variables aléatoires (**non nécessairement à densité**) :
 - * définition et caractérisation,
 - * espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes admettant une espérance,
 - * variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes admettant une variance,
 - * méthode pour étudier le max/min d'une famille finie de variables aléatoires indépendantes à densité,
 - * loi d'une somme de variables aléatoires à densité indépendantes et densité obtenue par produit de convolution des densités (la formule est à rappeler aux étudiants lors des exercices),
 - * somme de variables aléatoires indépendantes gaussiennes

Chaque étudiant devra déterminer lors d'un exercice la loi de la somme de deux variables aléatoires à densité via un produit de convolution.

S'il reste du temps, un petit exercice de révision d'analyse pourra être proposé (ou intégré dans l'exercice sur les variables à densité.

Résultats à connaître :

- ☐ caractérisation de variables aléatoires à densité (par leur fonction de répartition),
- ☐ Si X admet une espérance, $aX + b$ admet une espérance pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- ☐ linéarité de l'espérance
- ☐ théorème du transfert pour les variables aléatoires à densité,
- ☐ loi uniforme sur $[a, b]$:
 - densité,
 - fonction de répartition (**démonstration exigible**),
 - espérance (**démonstration exigibles**,
 - variance (**démonstration exigible**)
 - simulation en Python
- ☐ loi exponentielle de paramètre λ :
 - densité,
 - fonction de répartition (**démonstration exigible**),
 - espérance (**démonstration exigible**),

- variance (**démonstration exigible**)
 - lien avec la loi uniforme sur $[0, 1[$ (**démonstration exigible**)
 - simulation en Python
 - absence de mémoire
- lois normales :
- densité,
 - espérance (**démonstration exigible** en retrouvant l'espérance de la loi normale centrée réduite) ,
 - variance (**démonstration exigible** en retrouvant la variance de la loi normale centrée réduite),
- loi de $aX + b$ lorsque X suit une loi normale et $a \neq 0$,
- loi de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes,
- loi de la somme de deux variables aléatoires normales indépendantes (+ généralisation à une somme finie),