Semaines 17 et 18
du lundi 3 février au vendredi 7 mars 2025

Rappel : la semaine du lundi 10 février est banalisée : il n'y aura pas de colle à cette période.

Le chapitre de **géométrie euclidienne** sera être évalué par **une question de cours** (avec ou sans démonstration) et **un exercice**.
Les autres chapitres d'algèbre devront aussi évalués par une question de cours (sans démonstration) et un exercice court (si vous choisissez un exercice sur les polynômes, soyez sympa et limitez-vous à des exercices d'application du cours).

Révisions d'algèbre : espaces vectoriels, applications linéaires, réduction, polynômes, nombres complexes

Chapitres : Géométrie euclidienne

- **Mots-clé du cours :**
  - produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$: définition, propriétés usuelles ;
  - produit scalaire dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\langle X, Y\rangle = X^T Y$;
  - norme euclidienne : définition, propriétés usuelles, inégalité de Cauchy-Schwarz (avec cas d'égalité), inégalité triangulaire ;
  - orthogonalité : orthogonalité de deux vecteurs, famille orthogonale, famille orthonormée, théorème de Pythagore ;
  - bases orthonormées : écriture matricielle d'un produit scalaire, coordonnées d'un vecteur dans un base orthonormée, caractérisation des matrices de passage entre bases orthonormées (définition des matrices orthogonales) ;
  - théorème spectral (version BCPST) : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres ;
  - projection orthogonale : définition du projeté orthogonale sur un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbb{R}^n$, expression du projeté dans une base orthonormée, propriété de la projection orthogonale ; caractérisation d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel ; $\dim F + \dim F^\perp = n$;
  - distance entre deux vecteurs, d'un vecteur à un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbb{R}^n$ (calcul par son projeté orthogonal).
- **Résultats à connaitre :**
  - ☐ propriétés usuelles du produit scalaire,
  - ☐ propriétés usuelles de la norme euclidienne,
  - ☐ liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls ;
  - ☐ théorème de Pythagore ;
  - ☐ inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité (**la démonstration est exigible**) ;
  - ☐ expression d'un vecteur dans une base orthonormée (**la démonstration est exigible**) ;
  - ☐ orthogonalité de deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle (**la démonstration est exigible**) ;
  - ☐ orthodiagonalisation des matrices symétriques réelles ;
  - ☐ définition et caractérisation du projeté orthogonal (**la démonstration est exigible**) ;
  - ☐ caractérisation de la projection orthogonale p sur F : p est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés : $p \circ p = p$, $\operatorname{Im} p = F$ $(= \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}))$ et $\operatorname{Ker} p = F^\perp$ (**la démonstration est exigible**) ;
  - ☐ distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathbb{R}^n$ (**la démonstration est exigible**).