Exercice 1

On définit une variable booléenne `nouveau_bloc` qui indique si un bloc de 1 est en cours de lecture. Cette variable prend la valeur `False` à chaque 0 lu et prend la valeur `True` au premier 1 lu (après un 0).

```
def nbBlocs(L):
    nouveau_bloc = False
    nb = 0
    for x in L:
        if x == 0:
            nouveau_bloc = False
        elif x == 1 and not nouveau_bloc:
            nb += 1
            nouveau_bloc = True
    return nb
```

On propose aussi une version plus compacte utilisant un parcours par indice et sans variable “drapeau” :

```
def nbBlocs(L):
    nb = 0
    for k in range(len(L)):
        if L[k] == 1 and (k == 0 or L[k-1] == 0):
            nb += 1
    return nb
```

Exercice 2

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par théorèmes opératoires et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) &= 2xe^{-\frac{(x-1)^2}{2}} - x^2(x-1)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\\ &= -x\left(-2+(x^2-x)\right)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\\ &= -x(x+1)(x-2)e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\end{aligned}$$

Puisque $g'(x)$ est de même signe que $-x(x+1)(x-2)$, on trouve que g est croissante sur $]-\infty,-1]$, décroissante sur $[-1,0]$, croissante sur $[0,2]$ et décroissante sur $[2,+\infty[$.

2. On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Puisque la fonction $\left(t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$ est paire sur $\mathbb{R}$, il vient que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

3. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. En posant $x = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$, on a $t = \sqrt{2}x$ et $\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$. Puisque $\varphi(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty}\varphi = +\infty$, on peut appliquer le théorème de changement de variable (la convergence de la seconde intégrale est assurée par la convergence de la première) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sqrt{2}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

4. Remarquons que la fonction $\left(t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$\int_0^{A} te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

5. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Remarquons que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} -te^{-\frac{t^2}{2}} = 0$ par croissances comparées.

Par intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Puisque la seconde intégrale converge, la première aussi et on peut alors écrire :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

6. Pour tout $t \in [0,+\infty[$, $(t+1)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} = t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} + 2te^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}}$. Puisque les intégrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,\ \int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

convergent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t+1)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge par linéarité et :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (t+1)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boxed{\sqrt{2\pi}+2.}\end{aligned}$$

7. La fonction $(x \mapsto x-1)$ est strictement croissante et $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.
En posant $t = x-1$, on a $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Le théorème de changement de variable assure que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge (puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t+1)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge) et :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (t+1)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 2+\sqrt{2\pi}.}$$

Exercice 3

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ est continue sur $]0,1]$.
Puisque $\lim\limits_{x\to 0} ax = 0$ et $e^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+o(u)$, on trouve que $e^{-ax} \underset{x\to 0}{=} 1-ax+o(x)$, et de la même manière, $e^{-bx} \underset{x\to 0}{=} 1-bx+o(x)$ et donc $e^{-ax}-e^{-bx} \underset{x\to 0}{=} (b-a)x+o(x)$. Ainsi :

$$f(x) = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \underset{x\to 0}{=} (b-a)+o(1).$$

On en déduit que la fonction f est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[0,1]$ en posant $f(0) = b-a$.
<u>L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ est donc convergente</u> car faussement impropre.

2. Soit $\lambda > 0$. La fonction $g_\lambda : x \mapsto e^{-\lambda x}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda}.$$

<u>On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ converge pour tout réel $\lambda > 0$ et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$.</u>

3. Pour tout $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$. Ainsi :

$$\forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant \frac{e^{-ax}}{x} \leqslant e^{-ax}$$

D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-ax}\,\mathrm{d}x$ converge.
En appliquant le critère de comparaison de fonctions positives, il vient que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x$ converge. Le même résultat s'applique à l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$. Par linéarité, <u>l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.</u>

4. Puisque les deux généralisées $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ convergent, <u>l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.</u>

* *
*