

Exercice 1

Écrire une fonction `nbBlocs` en Python qui prend en argument une liste de 0 et de 1 et qui renvoie le nombre de blocs de 1 consécutifs. Par exemple `nbBlocs([0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1])` devra renvoyer 3.

Exercice 2

1. Étudier la monotonie de la fonction $g : x \mapsto x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$ définie sur \mathbb{R} .
2. Rappeler sans justification la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
3. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
4. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et calculer sa valeur.
5. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
6. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (t+1)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et calculer sa valeur.
7. En déduire que $\int_1^{+\infty} g(x) dx = 2 + \sqrt{2\pi}$.

Exercice 3

Soient a et b deux réels strictement positifs. On cherche à étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ converge pour tout réel $\lambda > 0$ et calculer sa valeur.
3. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ converge.
4. Conclure.

* *
*