Exercice 1

1.

```python
def somme(L):
    if len(L) == 0:
        return 0
    else:
        return L[0] + somme(L[1:])
```

```python
def palindrome(chaine):
    n = len(chaine)
    if  n <= 1:
        return True
    return chaine[0] == chaine[n-1] and palindrome(chaine[1:n-1])
```

3.

```python
def permutations(n):
    if n == 1:
        return [[1]]
    L = []
    for p in permutations(n-1):
        for k in range(n):
            L.append(p[:k] + [n] + p[k:])
    return L
```

Exercice 2

1. a. $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ donc $-X(\Omega) = \mathbb{R}^-$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(-X \leqslant x) = \mathbb{P}(X \geqslant -x) = 1 - F_X(-x) = \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Puisque la fonction F_X de répartition de X est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, celle de $-X$ l'est aussi par théorème opératoires.

On en déduit que $-X$ est une variable à densité, de densité donnée par la fonction :

$$\boxed{g : t \mapsto \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}}$$

b. Remarquons que $Z(\Omega) = \mathbb{R}$ car $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

Notons $f_Y : y \mapsto \mu e^{-\mu y} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ une densité de Y.

Puisque les variables X et Y sont indépendantes, $-X$ et Y le sont aussi par le lemme des coalitions. Puisque $-X$ et Y sont à densité, $Z = Y + (-X)$ est une variable à densité, de densité h donnée par le produit de convolution suivant (les intégrales convergent) :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Or :

$$f_Y(t)g(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant 0 \\ x - t \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant 0 \\ t \geqslant x \end{cases}$$

- Pour tout $x < 0$, $f_Y(t)g(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0$ et ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x < 0,\ h(x) &= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu t} \lambda e^{\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\mu e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\mu e^{\lambda x} \left[\frac{-1}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

- Pour tout $x \geqslant 0$, $f(t)g(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow t \geqslant x$ et ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x \geqslant 0,\ h(x) &= \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu t} \lambda e^{\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\mu e^{\lambda x} \int_x^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\mu e^{\lambda x} \left[\frac{-1}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \right]_x^{+\infty} \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{\lambda x - (\lambda+\mu)x} \\ &= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\mu x}. \end{aligned}$$

La fonction ci-dessous est donc une densité de Z.

$$\boxed{h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\mu x}. & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}}$$

c. Puisque les variables aléatoires X et Y admettent une espérance, la variable $Z = Y - X$ admet une espérance par linéarité et :

$$\boxed{E(Z) = E(Y) - E(X) = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}.}$$

Puisque les variables aléatoire X et Y admettent une variance et sont indépendantes, $Z = Y - X$ admet une variance et :

$$\boxed{V(Z) = V(Y) + V(X) = \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda^2}.}$$

d. Il suffit de simuler la réalisation de deux variables aléatoires suivant les loi exponentielles de paramètres respectifs λ et μ puis de renvoyer la valeur absolue de leur différence.

```
import random as rd, numpy as np

def simuleabsZ(l, m):
    x = - np.log(1 - rd.random())/l
    y = - np.log(1 - rd.random())/m
    return abs(y - x)
```

e. On commence par remarquer que $|Z|(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

Pour tout $x < 0$, $\mathbb{P}(|Z| \leqslant x) = 0$.

Soit $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Z| \leqslant x) &= \mathbb{P}(-x \leqslant Z \leqslant x) \\ &= \int_{-x}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-x}^{0} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\mu t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-x}^{0} \frac{\lambda}{2}e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda t} \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{\lambda t}\right]_{-x}^{0} + \left[-\frac{1}{2}e^{-\lambda t}\right]_{0}^{x} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\lambda x}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{-\lambda x} - 1\right) \\ &= 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

On reconnait une fonction de répartition usuelle : $|Z|$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

f. Puisque Z admet pour densité la fonction h, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(X \leqslant Y) = \mathbb{P}(Z \geqslant 0) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\mu t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-\mu t}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Pour tout $x < 0$, $P_{[X \leqslant Y]}(|Z| \leqslant x) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$P_{[X \leqslant Y]}(|Z| \leqslant x) = \frac{\mathbb{P}([|Z| \leqslant x] \cap [X \leqslant Y])}{\mathbb{P}(X \leqslant Y)} = \frac{\mathbb{P}([|Z| \leqslant x] \cap [Z \geqslant 0])}{\mathbb{P}(Z \geqslant 0)} = \frac{\mathbb{P}(0 \leqslant Z \leqslant x)}{\mathbb{P}(Z \geqslant 0)}.$$

Puisque h est une densité de Z, on a :

$$\mathbb{P}(0 \leqslant Z \leqslant x) = \int_0^x \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\mu t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-\mu t}\right]_0^x = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-\mu x}\right).$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{[Z \geqslant 0]}(|Z| \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\mu x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

On en déduit que la loi conditionnelle de la variable aléatoire $|Z|$ sachant $[Y \geqslant X]$ est la loi exponentielle de paramètre μ.

* *
*