Pour tout entier r non nul, on considère sur $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire usuel. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$ alors leur produit scalaire $\langle X, Y \rangle$ est égal à $\sum_{k=1}^{r} x_k y_k$. On identifiera $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en notant $\langle X, Y \rangle = X^T Y$. De même manière, la norme euclidienne de X sera définie par $\|X\| = \sqrt{X^T X}$.
On se donne trois entiers naturels non nuls n, p et q.

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Justifier que $(AB)^T = B^T A^T$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que si M est inversible, alors M^T aussi et que l'on a :
$$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T.$$
3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Prouver que le noyau de A est égal au noyau de $A^T A$.
Indication : on pourra étudier la quantité $X^T A^T A X$ lorsque $X \in \mathrm{Ker}(A^T A)$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Justifier que $A^T A$ est diagonalisable.
5. Dans cette question, on considère
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telles que $A^T A = PDP^{-1}$.
On fera en sorte que la première ligne de P ne soit constituée que de 1.

On considère pour toute la suite une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On suppose que les colonnes de A, que l'on notera $C_1, C_2, \ldots, C_p$, forment une famille libre.

6. Donner la définition de la liberté de la famille $(C_1, \ldots, C_p)$ et en déduire que le noyau de A est réduit au vecteur nul, puis que la matrice $A^T A$ est inversible.
7. On considère la matrice $H = A(A^T A)^{-1} A^T$.
   a. Prouver que $H^2 = H$ et $H^T = H$.
   b. Prouver que $\mathrm{Ker}(H) = (\mathrm{Im}(H))^\perp$.
   c. Prouver que $\mathrm{Ker}(H) = \mathrm{Ker}(A^T)$ puis que $\mathrm{Im}(H) = \mathrm{Im}(A)$.

   On admet que cela prouve que l'application $p : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \mapsto HX$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $g : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $X \mapsto \|B - AX\|^2$.
8. Montrer que la fonction g admet un minimum global atteint en un unique point :
$$\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T B.$$
9. Simplifier $\hat{X}$ lorsque $n = p$. Le résultat est-il cohérent ?
10. Que vaut $\hat{X}$ lorsque
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ?$$