Exercice 1. ♡ [Corrigé] ★☆☆

On lance deux dés équilibrés. On note X la variable aléatoire égale un plus petit des deux nombres obtenus et Y la variable aléatoire égale au plus grand de deux nombres obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.

Exercice 2. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soit $m \in \mathbb{N}^\star$ et soit X une variable aléatoire réelle de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $Y = \min(X,m)$.

Exercice 3. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1,\dots,X_n)$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Exercice 4. ♡ [Corrigé] ★☆☆

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de loi $\mathcal{B}(p)$. Soient $U = X+Y$ et $V = X-Y$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V) ainsi que la covariance de U et V.
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 5. ♡ [Corrigé] ★☆☆

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/6$

1. Déterminer la loi de $Y = X^2$ ainsi que celle du couple (X,Y).
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. ♡ [Corrigé] ★★☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telles que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la loi conditionnelle de X sachant $[Y=k]$ soit la loi uniforme sur $[\![0,k]\!]$. On note, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $p_k = \mathbb{P}(Y=k)$.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y), puis la loi de X.
2. En déduire $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$.
3. Montrer que X et $Y-X$ ont même loi.

Exercice 7. ♡ [Corrigé] ★★☆

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de (X,Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{a}{i!j!},\ a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur du réel a.
2. Reconnaitre les lois marginales de X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. ♡ [Corrigé] ★★☆

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de (X,Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X=i, Y=j) = a\frac{i+j}{2^{i+j}},\ a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur du réel a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.

Exercice 9. [Corrigé] ★★☆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. a. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(X \geqslant k)$.
   b. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$, $\mathbb{P}(X \geqslant Y)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 2Y)$.
2. Soient $V = \min(X,Y)$ et $W = X - Y$.
   a. Donner la loi du couple (V,W).
   b. En déduire les lois de V et W.
   c. Montrer que V et W sont indépendantes.

Exercice 10. [Corrigé] ★★☆

Le nombre de visiteurs quotidiens à Disneyland Paris suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque visiteur entre dans le parc par une des m entrées $E_1, \ldots, E_m$, qu'il choisit de manière équiprobable et indépendamment des autres visiteurs.
On désigne par N le nombre de visiteurs en une journée et X_1 le nombre de visiteurs entrant par E_1 durant cette journée.

1. Déterminer le nombre moyen de visiteurs en une journée.
2. a. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X_1 sachant $[N = n]$.
   b. En déduire la loi conjointe de N et X_1, puis la loi de X_1.
   c. En déduire l'espérance et la variance de X_1.
3. Sachant qu'un visiteur sur dix se débrouille pour rentrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs hebdomadaires qui entrent sans payer par l'entrée E_1.

Exercice 11. [Corrigé] ★★☆

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Déterminer, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_i.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Exercice 12. ♡ [Corrigé] ★★☆

On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et soit Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y et puis calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 13. [Corrigé] ★★☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n personnes se répartissant au hasard dans trois hôtels numérotés 1, 2 et 3. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note X_k le nombre de personnes ayant choisi l'hôtel k.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3.
2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$, ainsi que son espérance et sa variance.
3. Déterminer la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 14. ♡ [Corrigé] ★★★

On considère un dé équilibré dont l'une des faces est blanche et les cinq autres sont rouges.
On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs successives de B et R : par exemple si les neufs premiers lancers donnent les résultats $BBRRRRRRB$ alors la première série (BB) est de longueur 2 et la seconde ($RRRRRR$) est de longueur 6. Soient X_1 et X_2 les longueurs respectives de la première et de la deuxième série.

1. Déterminer la loi de X_1. Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
3. En considérant $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$, montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 15. ♡ [Corrigé] ★★★

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise dans cette urne. On note X le rang de sortie de la première boule blanche et Z celui de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Z).
2. En déduire la loi de Z.

Exercice 16. [Corrigé] ★★★

On dit qu'une variables aléatoire X suit la **loi binomiale négative** de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$ si :

$$X(\Omega) = [\![n, +\infty[\![\text{ et } \forall k \geqslant n,\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale négative de paramètres n et p.
2. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative.

Exercice 17. ♡ [Corrigé] ★★★

Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geqslant 2$). On admet que les n appels constituent n expériences aléatoires indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Déterminer la loi de X.

2. Après ses n recherches, le secrétaire demande une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus la seconde fois et soit $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.

   a. Quelles sont les valeurs prises par Z ?

   b. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

   c. Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k + \ell \leqslant n$. Montrer que :

$$\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{n}{k+\ell}\binom{k+\ell}{k} p^{k+\ell} q^{2n-2k-\ell}.$$

   d. En déduire que Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

3. Retrouver le résultat de la question précédent sans réaliser de calcul (en réinterprétant l'expérience).

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

1. Remarquons que $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
   Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, par indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$, on a :
$$\mathbb{P}(Y \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k, \dots, X_n \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k) \dots \mathbb{P}(X_n \leqslant k) = \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$
   Puisque $[Y = k] = [Y \leqslant k] \setminus [Y \leqslant k-1]$, la loi de Y est donnée par :
$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(Y \leqslant k) - \mathbb{P}(Y \leqslant k-1) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n & \text{si } k > 1 \\ \left(\frac{k}{n}\right)^n & \text{si } k = 1 \end{cases} \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$
2. La variable aléatoire Y est finie, elle admet donc une espérance.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k}{n}\right)^n - k\left(\frac{k-1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{\mathbf{k=2}}^{n} k\left(\frac{k-1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\left(\frac{k}{n}\right)^n \\ &= n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

1. Fixons $i \in \mathbb{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N} \mathbb{P}(X = i, Y = j) &= a\sum_{j=0}^{N} \frac{i+j}{2^{i+j}} \\ &= a\frac{i}{2^i}\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{2^j}\right) + a\frac{1}{2^i}\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{j}{2^i}\right) \\ &= a\frac{i}{2^i}\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{2^j}\right) + a\frac{1}{2^{i+1}}\left(\sum_{j=1}^{N} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}\right) \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} a\frac{i}{2^{i-1}} + a\frac{1}{2^{i-1}}.\end{aligned}$$
   (On reconnait des sommes partielles de séries géométriques et séries géométriques dérivées, convergentes car de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$).
   D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([Y = j])_{j\in\mathbb{N}}$, on a (la série converge par σ-additivité) :
$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = a\frac{i}{2^{i-1}} + a\frac{1}{2^{i-1}}.$$
   Soit $M \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{i=0}^{M} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^{M}\left(a\frac{i}{2^{i-1}} + a\frac{1}{2^{i-1}}\right) = a\sum_{i=0}^{M} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} + 2a\sum_{i=0}^{M}\frac{1}{2^i} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 8a.$$
   (On reconnait des sommes partielles de séries géométriques et séries géométriques dérivées, convergentes car de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$).
   Or $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = 1$, donc $a = \dfrac{1}{8}$.
2. D'après le résultat de la question précédente, on a :
$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = i) = \frac{i+1}{2^{i+2}}.$$
   Par symétrie de la loi du couple (X, Y), X et Y suivent la même loi donnée par :
$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = i) = \frac{i+1}{2^{i+2}}.$$
3. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes : $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$.

4. Puisque $([X=i])_{i\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales (la série ci-dessous converge par σ-additivité):

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=Y,X=i)=\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=i)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{2i}{2^{2i+3}}=\frac{1}{9},$$

(en reconnaissant une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{4}$).

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]
Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

1. Le nombre moyen de visiteurs en une journée est $\mathbb{E}(N)$, i.e. λ.

2. a. Soit $n\in\mathbb{N}$. Sachant $[N=n]$, X_1 est le nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès ("un visiteur entre par l'entrée E_1) est égale à $\dfrac{1}{m}$. On en déduit que la loi conditionnelle de X_1 sachant $[N=n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ où $p=\dfrac{1}{m}$.

   b. Notons $q=1-p$. Remarquons que $N(\Omega)=X_1(\Omega)=\mathbb{N}$. La loi conjointe de (N,X_1) est donnée par :

$$\begin{aligned}\forall(n,k)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(N=n,X_1=k)&=\mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{N=n}(X_1=k)\\&=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} & \text{si } k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\\&=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{k!(n-k)!}e^{-\lambda}p^kq^{n-k} & \text{si } k\leqslant n\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

   Puisque $([N=n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_1 :

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n,X_1=k)\quad\text{(la série converge par }\sigma\text{-additivité)}\\&=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{k!(n-k)!}e^{-\lambda}p^kq^{n-k}\\&=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}q^{n-k}\\&=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^i}{i!}\\&=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda+\lambda q}\\&=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}.\end{aligned}$$

   La variable aléatoire X_1 suit donc la loi de Poisson de paramètre $\lambda p=\dfrac{\lambda}{m}$.

   c. On en déduit que X_1 admet espérance et variance, égales à $\mathbb{E}(X_1)=\mathbb{V}(X_1)=\dfrac{\lambda}{m}$.

3. Notons Y_1 le nombre de visiteurs qui entrent sans payer par l'entrée E_1.
   En reprenant le même raisonnement qu'à la question 2.a, on trouve que la loi conditionnelle de Y_1 sachant $[N=n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\tilde{p})$ où $\tilde{p}=\dfrac{p}{10}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   En reprenant le raisonnement de la question 2.b, on trouve que Y_1 suit la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{10m}$.
   Le nombre moyen de visiteurs qui entrent sans payer chaque jour par l'entrée E_1 est donc égal à $\dfrac{\lambda}{10m}$.