1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
   Par définition du produit matriciel, on a :
   $$\left((AB)^T\right)_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} A_{j,k}B_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} (B^T)_{i,k}(A^T)_{k,j} = (B^TA^T)_{i,j}.$$
   Par conséquent, on a bien :
   $$\boxed{(AB)^T = B^TA^T.}$$

2. Si M est inversible, alors $MM^{-1} = I_n$. En transposant et en utilisant la question précédente, on obtient :
   $$(M^{-1})^TM^T = I_n.$$
   Ainsi, $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$, ce qui montre que M^T est également inversible.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrons que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^TA)$.
   - Si $X \in \mathrm{Ker}(A)$, alors $AX = 0$. En multipliant à gauche par A^T, on obtient :
     $$A^TAX = 0.$$
     Donc $X \in \mathrm{Ker}(A^TA)$.
   - Réciproquement, si $X \in \mathrm{Ker}(A^TA)$, alors $A^TAX = 0$ et ainsi :
     $$0 = X^TA^TAX = (AX)^T(AX) = \|AX\|^2.$$
     On en déduit que $AX = 0$, i.e. $X \in \mathrm{Ker}(A)$.

   Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^TA).}$

4. La matrice A^TA est symétrique : $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$. Puisqu'elle est à coefficients réels, la matrice A^TA est diagonalisable en vertu du théorème spectral.

5. On commence par déterminer A^TA:
   $$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
   Après calculs, on trouve que $\mathrm{Sp}(A^TA) = \{0; 3\}$ et :
   $$\mathrm{Ker}(A^TA) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(A^TA - 3I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \right).$$
   Ainsi $A^TA = PDP^{-1}$ où :
   $$\boxed{D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.}$$

6. Par définition, la famille $(C_1, \ldots, C_p)$ est libre si, pour $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on a l'implication :
   $$\boxed{\sum_{k=1}^{p} x_kC_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ x_k = 0.}$$
   Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$. Ainsi $AX = 0$, i.e. :
   $$\sum_{k=1}^{p} x_kC_k = 0$$
   Par liberté des colonnes de A, $X = 0$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \{0\}.}$
   Ainsi $\mathrm{Ker}(A^TA) = \{0\}$ d'après le résultat de la question 3. D'après le théorème du rang, et puisque $A^TA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on a :
   $$\mathrm{rg}(A^TA) = p - \dim \mathrm{Ker}(A^TA) = p.$$
   On en déduit donc que A^TA est inversible.

7. a. Puisque $H = A(A^TA)^{-1}A^T$,
   $$H^2 = A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = H.$$
   On a également (par symétrie et inversibilité de A^TA) :
   $$H^T = (A(A^TA)^{-1}A^T)^T = A(A^TA)^{-1}A^T = H.$$
   b.
   - Montrons tout d'abord que $\mathrm{Ker}(H) \subset (\mathrm{Im}(H))^{\perp}$.
     Remarquons que $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $X \in \mathrm{Ker}(H)$ et $Y \in \mathrm{Im}(H)$. Il existe alors $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = HZ$.
     $$\langle X, Y\rangle = \langle X, HZ\rangle = X^THZ = X^TH^TZ = (HX)^TZ = 0.$$
     On en déduit que X est orthogonal à tout vecteur de $(\mathrm{Im}(H))^{\perp}$ donc à $(\mathrm{Im}(H))^{\perp}$. Ainsi $\mathrm{Ker}(H) \subset (\mathrm{Im}(H))^{\perp}$.

- D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(H) = n - \dim \operatorname{Im}(H)$. Or on sait que $\dim(\operatorname{Im}(H))^\perp = n - \dim \operatorname{Im}(H)$. On en déduit donc que $\operatorname{Ker}(H)$ et $(\operatorname{Im}(H))^\perp$ sont de même dimension.

On a donc prouvé l'égalité : $\boxed{\operatorname{Ker}(H) = (\operatorname{Im}(H))^\perp.}$

c. - L'inclusion $\operatorname{Ker}(A^T) \subset \operatorname{Ker}(H)$ est évidente :

$$X \in \operatorname{Ker}(A^T) \Rightarrow A^T X = 0 \Rightarrow A(A^T A)^{-1} A^T X = 0 \Rightarrow HX = 0.$$

Soit $X \in \operatorname{Ker}(H)$, i.e. $A(A^T A)^{-1} A^T X = 0$. En multipliant à gauche par A^T, on trouve que $(A^T A)(A^T A)^{-1} A^T X = 0$, i.e. $A^T X = 0$, i.e. $X \in \operatorname{Ker}(A^T)$. On a donc bien $\operatorname{Ker}(H) = \operatorname{Ker}(A^T)$.

- L'inclusion $\operatorname{Im}(H) \subset \operatorname{Im}(A)$ est évidente : si $Y \in \operatorname{Im}(H)$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = HX = A(A^T A)^{-1} A^T X = AZ \in \operatorname{Im}(A)$ où $Z = (A^T A)^{-1} A^T X$.
On obtient l'égalité de ces espaces vectoriels par argument de dimension. En effet, d'après le théorème du rang, on a :

$$n = \dim \operatorname{Ker}(H) + \dim \operatorname{Im}(H) = \dim \operatorname{Ker}(A^T) + \operatorname{rg}(A^T).$$

Puisque $\operatorname{Ker}(H) = \operatorname{Ker}(A^T)$, on obtient :

$$\dim \operatorname{Im}(H) = \operatorname{rg}(A^T) = \operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im}(A).$$

On en déduit que $\boxed{\operatorname{Im}(H) = \operatorname{Im}(A).}$

8. La distance de B à $\operatorname{Im}(A)$ est définie par

$$d(B, \operatorname{Im}(A)) = \inf_{Y \in \operatorname{Im}(A)} \|B - Y\| = \inf_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|B - AX\| = \inf_{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \sqrt{g(X)}.$$

Puisque p est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im}(A)$,

$$d(B, \operatorname{Im}(A))^2 = \|B - p(B)\|^2 = \|B - HB\|^2 = \|B - A\hat{X}\|^2 = g(\hat{X}),$$

en posant $\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T B$.

On en déduit que la fonction g admet un minimum global en $\hat{X}$.

Supposons que g admette un minimum global en un autre point $\overline{X}$. En particulier $g(\hat{X}) = g(\overline{X})$. Or :

$$\begin{aligned} g(\overline{X}) &= \|B - A\overline{X}\|^2 \\ &= \|(B - A\hat{X}) + A(\hat{X} - \overline{X})\|^2 \\ &= \|(B - p(B)) + A(\hat{X} - \overline{X})\|^2 \\ &= \|B - p(B)\|^2 + \|A(\hat{X} - \overline{X})\|^2, \end{aligned}$$

la dernière ligne étant obtenue par le théorème de Pythagore car $B - p(B) \in \operatorname{Im}(A)^\perp$ et $A(\hat{X} - \overline{X}) \in \operatorname{Im}(A)$. On en déduit que $g(\hat{X}) = g(\overline{X}) = g(\hat{X}) + \|A(\hat{X} - \overline{X})\|^2$ puis que $A(\hat{X} - \overline{X}) = 0$. Puisque $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$, $\overline{X} = \hat{X}$, prouvant l'unicité de $\hat{X}$.

La fonction g admet donc un minimum global atteint en un unique point $\hat{X}$.

9. Si $n = p$, alors A est carrée et inversible (car $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\operatorname{rg}(A) = n$). La matrice A^T est donc elle aussi inversible et :

$$\boxed{\hat{X} = A^{-1}(A^T)^{-1} A^T = A^{-1} B,}$$

ce qui est bien cohérent avec l'idée que la solution est donnée par la résolution du système $AX = B$: $g(\hat{X}) = 0 \leqslant g(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

10. On trouve :

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } (A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

On obtient :

$$\hat{X} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

* *
*