Questions de cours

- Théorème de Moivre-Laplace
- Somme de lois de Poisson

Exercice 1.

Un vol Marseille - Paris est assuré par un Airbus de 150 places; pour ce vol des estimations ont montré que la probabilité pour qu'une personne confirme son billet est $p = 0,75$. La compagnie vend n billets, $n > 150$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes parmi les n possibles, ayant confirmé leur réservation pour ce vol.

1. Quelle est la loi exacte suivie par X ?
2. Quel est le nombre maximum de places que la compagnie peut vendre pour qu'elle soit sûre à (au moins) 95% que tout le monde puisse monter dans l'avion.

Exercice 2.

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A et le serveur B.

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants.

Un jour donné, appelé jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\dots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3, 4 et 5 le serveur B et le jour 6 le serveur A Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième de longueur 3 (ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\dots$).

On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

1. Déterminer la loi de L_1.
2. Déterminer l'espérance de L_1.
3. Déterminer la loi de (L_1, L_2). En déduire celle de L_2.

Questions de cours

- Théorème central limite
- Théorème du transfert (version au choix à préciser !)

Exercice 1.

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses.

1. Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2. Majorer, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$.
3. En déduire une condition sur n pour que $\dfrac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.
4. Répondre à la question précédente en utilisant cette fois une loi approchant la loi de X_n. Qu'en pensez-vous?

Exercice 2.

1. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ est une densité de probabilité.

   Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant pour densité f.
2. Montrer que $\varphi : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et déterminer sa fonction réciproque.
3. Déterminer la fonction de répartition de $Y = \varphi(X)$.

   Reconnaître la loi de Y.

Questions de cours

- Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev
- Caractérisation des variables aléatoires à densité

Exercice 1.

On suppose que l'intervalle de temps entre deux voitures successives à un passage à niveau (peu fréquenté) suit une loi exponentielle de moyenne 30 minutes. On suppose de plus qu'il y a indépendance entre les intervalles de temps séparant les instants de passage de voitures. Calculer (une valeur approchée) de la probabilité qu'il y ait plus de 50 voitures qui empruntent le passage à niveau une journée donnée.

Exercice 2.

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi uniforme sur $[0, a]$ $(a > 0)$. On pose $U = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $V = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. a. Montrer que U est à densité et déterminer une densité f_U de U.

   b. La variable aléatoire U admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.
2. a. Montrer que V est à densité et déterminer une densité f_V de V.

   b. La variable aléatoire V admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.

Questions de cours

- Approximation d'une loi binomiale
- Formule des probabilités totales

Exercice 1.
Le taux moyen de personnes à soigner pour un problème de cholestérol élevé est de 7,5% dans la population française. Un échantillon de 10000 personnes sur une population étant donné, donner un intervalle de confiance à 95% du nombre de personnes à soigner.

Exercice 2.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Montrer que X^2 est une variable aléatoire à densité. Donner une densité de X^2.
2. Montrer que $-Y$ est une variable aléatoire à densité. Donner une densité de $-Y$.
3. En déduire que X^2-Y est une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction
$$h : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-\sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est une densité de $X^2 - Y$.
4. Calculer $P(X^2 \geqslant Y)$.

Questions de cours

- Approximation d'une loi hypergéométrique
- Caractérisation des variables aléatoires à densité

Exercice 1.
Sur 12000 individus d'une espèce, on a dénombré 13 albinos. Estimer la proportion d'albinos dans l'espèce.

Exercice 2.
On a une urne avec une boule noire et une boule blanche.
À chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne, en ajoutant de plus une boule noire.
On note Y la variable aléatoire donnant le rang de la première boule noire tirée.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer la probabilité de ne jamais tirer de boule noire.
3. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?
   Si oui, la calculer.
4. La variable aléatoire Y admet-elle une variance ?
   Si oui, la calculer.

Questions de cours

- Loi faible des grands nombres
- Loi de la somme de deux variables aléatoires à densité

Exercice 1.
Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et admettant un moment d'ordre 2. On suppose que leur loi a la propriété suivante : $X_1 + X_2$ a même loi que $\sqrt{2}X_1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1 + X_2 + \cdots + X_{2^n}$ et $\sqrt{2}^n X_1$ ont même loi.
2. Montrer que l'espérance de toutes les variables de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est nulle.
3. À l'aide du théorème central limite, déterminer la loi commune à toutes les variables de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 2.
Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Déterminer la loi de $X+Y$.
2. En déduire la probabilité de l'événement $(X+Y=Z)$.
3. Soit $T = n+1-Z$.
   1. Reconnaitre la loi de T.
   2. En déduire $P(X+Y+Z=n+1)$.