

Concours BCPST 2024 : Épreuve Modélisation Mathématique et Informatique, Rapport du jury.

1 Cadre du sujet

Le sujet proposait d'étudier des modèles de dynamique des population de différentes natures. L'objectif était, dans chacun des modèles, de trouver des conditions d'extinction.

Une premier problème traitait de modèles discrets déterministes, c'était à dire l'étude de suites numériques réelles définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Après des question préliminaires on étudiait un cas particulier de modèle logistique, puis on introduisait l'effet Allee : la population s'éteint si la densité initiale de population est trop faible. Il était attendu de bien comprendre que la survie de l'espèce dépendait de la population initiale. Le problème terminait par l'étude de l'équation différentielle analogue.

Le deuxième problème traitait du modèle déterministe de Galton-Watson (un nombre de descendant aléatoire). Il était étudié dans le cas d'une loi de reproduction simple (disparition ou division), puis géométrique. La dernière partie était dédiée à l'étude dans le cas d'une loi de reproduction de Poisson, à l'aide de l'outil informatique.

2 Remarques générales

Le jury est satisfait de la façon dont l'épreuve a classé les candidats, aussi bien dans le haut que dans le bas du classement. On retrouve d'excellentes copies qui ont traité le sujet presque dans son intégralité.

Un quart des candidats rend des copies très faibles et loin du niveau attendu à la fin de deux années de préparation. Ces candidats semblent avoir des lacunes antérieures au programme de BCPST et qui n'ont jamais été comblées. Le jury a été surpris que les points suivants posent problème :

- L'étude du signe d'un polynôme factorisé (de nombreux candidat développent l'expression) ;
- La résolution d'une équation de degré 2 à paramètres.

Il semble que le programme de BCPST1 soit moins bien maîtrisé que celui de deuxième année. Par exemple :

- Le théorème des suites monotones est souvent mal appliqué : on ne peut pas dire « la suite est croissante et majorée par S donc elle converge vers S » ;
- La résolution complète d'une équation différentielle linéaire avec second membre constant a été peu réussie complètement ;

- Trop de candidats affirment qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 2\}$ peut suivre une loi de Bernoulli.

Pour ce qui est de l'approche de l'épreuve, le jury note en particulier :

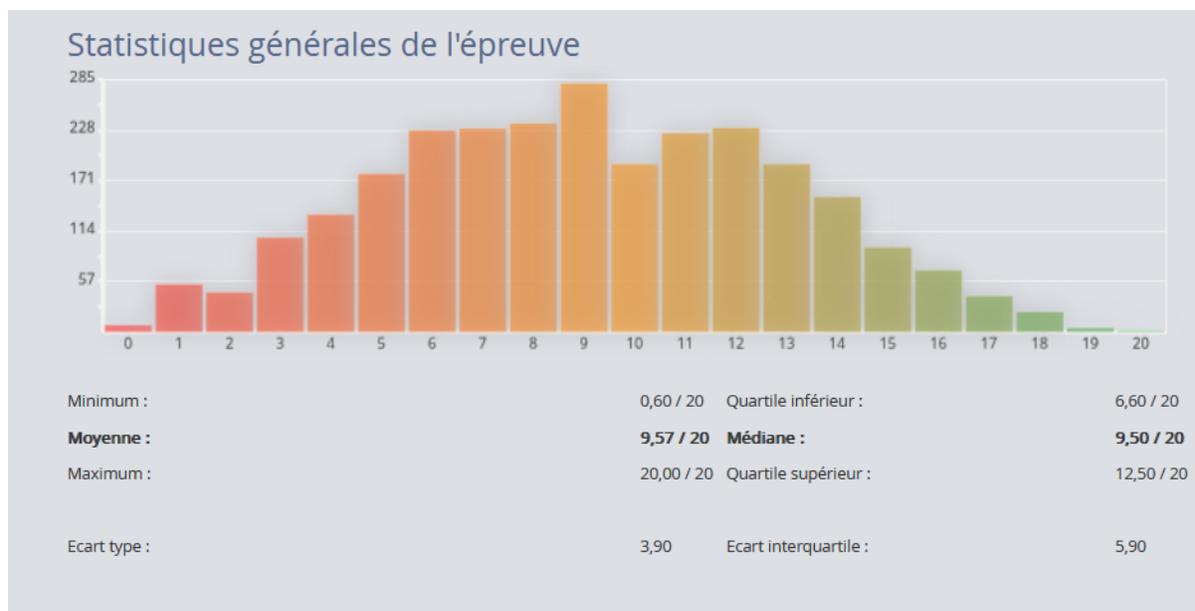
- Certains candidats sautent les questions d'interprétation et se retrouvent fortement pénalisés ; c'est dommage car elles sont parfois plus abordables que les questions calculatoires ;
- on remarque, cette année, une tendance au bluff. Les affirmations sont trop souvent non justifiées ou, alors, l'argument précis se trouve mélangé à d'autres inutiles ou faux ;
- Les questions qui laissent de la liberté aux candidats donnent rarement lieu à une réponse structurée ;
- Les candidats sont peu tombés dans le piège du grappillage de point, c'est agréable !

Dans de nombreuses copies, les candidats ont pu se distinguer par leur rapidité ainsi que le soin et la rigueur accordés à leurs raisonnements. Comme énoncé plus haut, le programme de deuxième est mieux maîtrisé par les candidats. Les probabilités ont aussi bien été travaillées. Le jury est notamment satisfait par

- L'utilisation de la formule des probabilités totales, pour des variables finies, ou infinies (quand la question est traitée) ;
- L'estimation d'un paramètre de loi de Bernoulli que ce soit théoriquement à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, ou algorithmiquement ;
- La manipulation de l'espérance et de la variance de variables aléatoires.

Les questions informatiques sont souvent abordées et réussies. Le programme donné est souvent compris. L'utilisation des compteurs et des boucles est satisfaisante. Le jury souhaite cependant attirer l'attention sur les bornes appelées dans la fonction **range** qui doivent être vérifiées avec soin.

3 Éléments statistiques



4 Remarques particulières

Q1. Question bien traitée. Attention au cas $q = 1$.

Q2.1. Question assez bien traitée. Il y a trop d'erreurs de calcul sur la dérivée. Il faut penser à mettre les limites dans le tableau de variation. Très peu de candidats utilisent leur cours pour donner le sens de variations d'une fonction polynomiale de degré 2 sans passer par la dérivée.

Q2.2. Question bien traitée même si le **range** est souvent faux.

Q2.3. Question bien traitée.

Q2.4. Question bien traitée.

Q2.5. Question mal traitée, alors qu'elle laissait beaucoup de liberté aux étudiants. Parmi les erreurs notables :

- La question Q2.1. est trop peu utilisée, il est souvent affirmé gratuitement que si $v_0 \in]0, S[$, alors v_n aussi pour toute valeur de n ;
- Il est souvent affirmé que « la suite est croissante est majorée par S donc **elle converge vers S** », alors que cela prouve seulement la convergence. Quand le

passage à la limite est réalisé, le cas $\lim v_n = 0$ est rarement exclu convenablement.

Q3.1. La fonction f est trouvée, mais les candidats développent souvent (ou dérivent) l'expression déjà factorisée de $f(x) - x$. Quand le signe est bien étudié, la représentation graphique est souvent juste.

Q3.2. Mêmes remarques que pour Q2.5, les candidats voient trop rarement l'intérêt de la question précédente.

Q3.3. Idem.

Q3.4. La constante S est souvent bien interprétée, c'est un peu moins le cas pour A . On attendait non seulement la notion de seuil : la suite a un comportement différent selon la position de u_0 par rapport à A , mais aussi une interprétation en terme de dynamique, par exemple : la densité initiale de population dans l'espace est insuffisante pour que les individus se rencontrent.

Q4.1. Question bien traitée, sauf lorsque les candidats développent une expression déjà factorisée.

Q4.2. Beaucoup d'erreurs de calcul et d'erreurs d'inattention (confusion stable/instable).

Q4.3. Les résultats sont insuffisants pour cette question qui avait été identifiée comme une question de cours : elle est convenablement traitée par moins de la moitié des copies. Il s'agissait d'une équation différentielle de degré 1 à coefficients constants.

Pour la recherche de la solution particulière, les candidats n'arrivent pas à mettre en place la méthode de la variation de la constante. Seuls ceux qui voient qu'une solution constante convient réussissent. Le principe de superposition est bien connu. La forme attendue pour avoir tous les points était :

$$y(t) = (y(0) - x_0)e^{tF'(x_0)} + x_0.$$

Q4.4. Question peu traitée. On attendait une étude de la limite de la solution de l'équation différentielle en temps long : on trouve x_0 si l'équilibre est stable, et une limite infinie s'il est instable.

Q5. Si certains candidats ne maîtrisent pas le signe somme et obtiennent une expression farfelue (par exemple $\frac{1-q^n}{1-q}$), la plupart obtiennent $Z_{n+1} = qZ_n$ mais s'arrêtent malheureusement à ce stade, alors que la question était là pour s'approprier le problème.

Q6. Question bien réussie même si on remarque encore des erreurs de calculs avec les puissances.

Q7. Beaucoup de candidats gardent la formule obtenue à la question précédente donc tout est faux. Bien pour les autres.

Q8.1. Question bien traitée. Trop de candidats affirment que Z_1 suit une loi de Bernoulli alors que $Z_1(\Omega) = \{0, 2\}$. Les calculs de variance et d'espérance sont alors faux.

Q8.2. Question bien traitée.

Q8.3. La probabilité demandée est rarement bien justifiée : pour obtenir le carré demandé, il faut utiliser l'indépendance.

Q8.4. Le passage à la limite est réussi. Pour la résolution de l'équation, c'est plus difficile. Certains candidats s'en sortent en vérifiant que les solutions proposées fonctionnent, et concluent avec un argument de degré de polynôme.

Q8.5 à Q8.7. Questions peu traitées.

Q9. Ces questions sont peu traitées. Ceux qui abordent Q9.1. la réussissent et la rédigent bien la plupart du temps. Le lien entre Q9.2 et Q9.4. est rarement fait.

Q10.1. Question bien traitée.

Q10.2. Question bien traitée.

Q10.3. Question bien traitée mais l'indépendance est souvent oubliée.

Q11.1. La question n'est pas toujours comprise, mais lorsque c'est le cas elle est bien traitée.

Q12.1. Question bien traitée lorsqu'elle est abordée. Quelques interversions des réponses.

Q12.2. La question demandait un programme Python classique d'estimation d'une probabilité et elle est bien traitée.

Q13.1. Question assez bien traitée même si l'expression des candidats est souvent hasardeuse.

Q13.2. L'indépendance des simulations n'est pas toujours citée pour justifier la binomiale, c'est pénalisé. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est bien connue ainsi que les propriétés de la variance et de l'espérance. Le plus simple ici était d'appliquer l'inégalité avec la variable $\frac{S_n}{n}$. Lorsqu'elle est appliquée avec S_n , les candidats tentent souvent un coup de bluff, sanctionné, pour retomber sur l'inégalité demandée.

Q13.3. Question peu traitée mais réussie lorsque c'est le cas.

Q13.4. Question peu traitée.