Méthodes de calcul et raisonnement
Durée : 2 heures

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Problème 1 :

I. Résultats préliminaires

1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $\forall j \in [\![0\,;p]\!]$, $\displaystyle\binom{p}{j}\frac{1}{1+j} = \binom{p+1}{j+1}\frac{1}{p+1}$.

(b) Montrer que $\forall j \in [\![0\,;p-1]\!]$, $\displaystyle\binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Donner, sans justification, une fonction de densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X en fonction de λ.

3. (a) Démontrer que, pour tout entier $i > 1$, on a :

$$\int_i^{i+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

(b) Justifier l'équivalent : $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

(c) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II. Quelques résultats autour de la loi exponentielle

On se donne un entier naturel $n > 0$, un réel strictement positif λ et une famille de n variables aléatoires notées $X_1, \ldots, X_n$, indépendantes et identiquement distribuées selon la loi exponentielle de paramètre λ.
On définit $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

4. Calculer $\mathbf{P}(X_{(1)} > x)$ pour tout réel x strictement positif et en déduire que la variable $X_{(1)}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

5. Prouver que $X_{(n)}$ est une variable aléatoire de densité :

$$x \mapsto n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} 1_{\mathbb{R}}(x).$$

6. En déduire que :

$$\mathbf{E}(X_{(n)}) = n\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^{+\infty} x e^{-(1+j)\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

puis, en utilisant les résultats de la partie I, que :

$$\mathbf{E}(X_{(n)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1}.$$

7. Dans cette question on veut prouver que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k$.

(b) En utilisant les résultats de la partie I, prouver le résultat souhaité par récurrence.

8. En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(X_{(n)})$.

On définit la suite $u = \Big(\lambda\, \mathbf{E}(X_{(n)}) - \ln(n)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

9. Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

10. En déduire que la suite u est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

III. Loi de Gumbel

On reprend les notations de la partie précédente et on rappelle que la variable X_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ. On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \lambda \exp(-x) \exp\left[-\lambda \exp(-x)\right].$$

11. Justifier que la fonction f est bien une densité de probabilité.
On appellera cette loi *la loi de Gumbel de paramètre* λ.
Indication : on pourra utiliser le changement de variable $y = \exp(-x)$.

12. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln X_1$ suit la loi de Gumbel.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

14. Montrer que si $\lambda = 1$, alors la suite $(X_{(n)} - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y.

Problème 2 :

Pour tout entier r non nul, on considère sur $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ le produit scalaire usuel. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$, alors leur produit scalaire $\langle X, Y\rangle$ est égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} x_k y_k$.

Comme le produit matriciel $X^{\mathsf{T}}Y$ est égal à la matrice $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{r} x_k y_k\right) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, on identifiera $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en notant $\langle X, Y\rangle = X^{\mathsf{T}}Y$.
De même, la norme euclidienne de X sera définie par $\|X\| = \sqrt{X^{\mathsf{T}}X}$.
Pour toute matrice M, on notera $\mathrm{Ker}(M)$ son noyau et $\mathrm{Im}(M)$ son image.
On se donne trois entiers naturels non nuls n, p et q.

15. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Justifier que $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$.

16. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que si M est inversible, alors M^{T} aussi et que l'on a :

$$(M^{\mathsf{T}})^{-1} = (M^{-1})^{\mathsf{T}}.$$

17. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Prouver que le noyau de A est égal au noyau de $A^{\mathsf{T}}A$.
Indication : on pourra étudier la quantité $X^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}AX$ *lorsque* $X \in \mathrm{Ker}(A^{\mathsf{T}}A)$.

18. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Justifier que $A^{\mathsf{T}}A$ est diagonalisable.

19. Dans cette question on considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telles que $A^{\mathsf{T}}A = PDP^{-1}$.
On fera en sorte que la première ligne de P ne soit constituée que de 1.

On considère pour toute la suite une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On suppose que les colonnes de A que l'on notera $C_1, C_2, \ldots, C_p$ forment une famille libre.

20. Donner la définition de la liberté de la famille $(C_1, \ldots, C_p)$ et en déduire que le noyau de A est réduit au vecteur nul, puis que la matrice $A^\top A$ est inversible.

21. On considère la matrice $H = A(A^\top A)^{-1}A^\top$.

(a) Prouver que $H^2 = H$ et $H^\top = H$.

(b) Prouver que $\mathrm{Ker}(H) = (\mathrm{Im}(H))^\perp$.

(c) Prouver que $\mathrm{Ker}(H) = \mathrm{Ker}(A^\top)$ puis que $\mathrm{Im}(H) = \mathrm{Im}(A)$.

On admet que cela prouve que l'application $p : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \mapsto HX$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(A)$.
Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $g : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $X \mapsto \|B - AX\|^2$.

22. Montrer que la fonction g admet un minimum global atteint en un unique point :

$$\hat{X} = (A^\top A)^{-1}A^\top B.$$

23. Simplifier $\hat{X}$ lorsque $n = p$. Le résultat est-il cohérent ?

24. Que vaut $\hat{X}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?