Exercice 1

1. Remarquons que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Puisque $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

   On en déduit donc que $\underline{\text{la fonction } f \text{ est continue en 0 donc sur } \mathbb{R}_+}$.

   On remarque immédiatement la stricte positivité de f sur $\mathbb{R}_+$. Remarquons de plus que, pour $x > 0$, on a :
   $$f(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geqslant 0.$$
   Étudions alors la fonction $g : x \mapsto e^x - x - 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :
   $$\forall x > 0,\ g'(x) = e^x - 1 > 0.$$
   La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; en particulier $g(x) \geqslant \lim\limits_0 g = 0$.

   On en déduit que :
   $$\forall x > 0,\ e^x - x - 1 \geqslant 0.$$
   Puisque $f(0) = 1$, on a bien :
   $$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ 0 < f(x) \leqslant 1.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $(x \mapsto e^{-nx})$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Soit $A \geqslant 0$.
   $$\int_0^A e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n}.$$
   On en déduit que, $\underline{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } \frac{1}{n}}$.

3. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n xe^{-kx} &= x\sum_{k=1}^n \left(e^{-x}\right)^k \\ &= xe^{-x}\frac{1-\left(e^{-x}\right)^n}{1-e^{-x}} \quad \text{car } e^{-x} \neq 1 \\ &= x\frac{1-e^{-nx}}{e^x - 1} \\ &= \frac{x}{e^x-1} - \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}.\end{aligned}$$
   On en déduit le résultat demandé :
   $$\boxed{\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{x}{e^x-1} = \sum_{k=1}^n xe^{-kx} + \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}.}$$

4. *On pouvait réaliser une intégration par parties, ou reconnaître une intégrale usuelle comme rédigé ci-dessous.* En reconnaissant l'espérance de la loi exponentielle de paramètre k, on sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} kxe^{-kx}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{1}{k}$. On en déduit donc par linéarité $\underline{\text{que l'intégrale } \int_0^{+\infty} xe^{-kx}\,\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } \frac{1}{k^2}}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'encadrement question 1, on a :
   $$\forall x > 0,\ 0 < \frac{xe^{-nx}}{e^x-1} \leqslant e^{-nx}.$$
   Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\underline{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$ par comparaison de fonctions positives. De plus, en appliquant la croissance de l'intégrale sur l'encadrement ci-dessus, on trouve que :
   $$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}.$$
   On conclut par le théorème d'encadrement de limites :
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = 0.}$$

6. On déduit des questions 3, 4 et 5 que $\underline{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$ par linéarité et
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x.$$
   Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et puisque la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge, on trouve que :
   $$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.}$$

Exercice 2

1. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ est continue sur $[0,1[$ par compositions de fonctions. Soit $A \in [0,1[$.
$$\int_0^A \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d} = \int_0^A (1-t)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d} = \left[-2(1-t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^A \underset{A\to 1}{\longrightarrow} 2.$$
On en déduit queI_0 converge et $I_0 = 2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{t^n}{\sqrt{1-t}}\right)$ est continue et positive sur $[0,1[$. Remarquons :
$$\frac{t^n}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$
Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge, donc par critère d'équivalence, l'intégrale I_n converge.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Réalisons une intégration par parties. Les fonctions $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -2\sqrt{1-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et :
$$\forall t \in [0,1[,\ u'(t) = nt^{n-1} \text{ et } v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$
Remarquons que $\lim\limits_{t\to 1} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to 1} -2nt^n\sqrt{1-t} = 0$. Par intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -2nt^{n-1}\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge (car I_n converge) et :
$$\boxed{I_n = \left[-2nt^n\sqrt{1-t}\right]_0^1 + \int_0^1 2nt^{n-1}\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2nt^{n-1}\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t.}$$

4. Pour tout $t \in [0,1[$, $\sqrt{1-t} = \dfrac{\sqrt{1-t}^2}{\sqrt{1-t}} = \dfrac{1-t}{\sqrt{1-t}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} - \dfrac{t}{\sqrt{1-t}}$.
Les réels $a = 1$ et $b = 1$ conviennent.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :
$$2nt^{n-1}\sqrt{1-t} = \frac{2nt^{n-1}}{\sqrt{1-t}} - \frac{2nt^n}{\sqrt{1-t}}.$$
Par linéarité de l'intégrale, on trouve que $I_n = 2nI_{n-1} - 2nI_n$ et ainsi que :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}.}$$

6. On propose deux solutions, l'une itérative, l'autre récursive.

```python
def I(n):
    i = 2
    for k in range(1,n+1):
        i *= (2*k)/(2*k+1)
    return i
```

```python
def I(n):
    if n == 0:
        return 2
    return (2*n)/(2*n+1) * I(n-1)
```

7. D'après la formule de la question 5, on conjecture que :
$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}\times 2 \\ &= 2\frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4\times 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5\times 3} \\ &= 2\frac{[2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4\times 2]^2}{(2n+1)!} \\ &= 2\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$
Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- La propriété est initialisée : $\dfrac{2^{2\times 0+1}(0!)^2}{(2\times 0+1)!} = 2 = I_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $I_{n-1} = \dfrac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!}$. D'après la relation de récurrence, on a :
$$\begin{aligned} I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \\ &= \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n)} \times \frac{2^{2n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} \\ &= \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

Exercice 3

1. Remarquons que $[X_{n+1}=k]=([X_{n+1}=k]\cap[X_n=k-1])\cup([X_{n+1}=k]\cap[X_n=k+1])$
Ainsi, par disjonction de la réunion ci-dessus et par équiprobabilité de tirages, on a :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1}=k)\\&=\mathbb{P}(X_n=k-1)\mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)+\mathbb{P}(X_n=k+1)\mathbb{P}_{[X_n=k+1]}(X_{n+1}=k)\\&=\frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(X_n=k-1)+\frac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n=k+1).\end{aligned}$$

On pouvait aussi retrouver le résultat via la formule des probabilités totales.

2. a.

```python
import random as rd

def etape(N, k):
    x= rd.randint(1,N)
    if x <= k:
        return k-1
    else:
        return k+1
```

b.

```python
def valeursX(x_0, n,N):
   listeX = [x_0]
   for k in range(n):
      listeX.append(etape(N, listeX[-1]))
   return liste
```

3. a. Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la question 1, $\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}(X_n=0)+\frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n=2)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1}=2)=\frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n=2)+\mathbb{P}(X_n=3)$. Puisque $[X_{n+1}=0]=[X_n=1]\cap[X_{n+1}=0]$ et $[X_{n+1}=3]=[X_n=2]\cap[X_{n+1}=3]$, on trouve que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n=1)\text{ et }\mathbb{P}(X_{n+1}=3)=\frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n=1).$$

On retrouve donc que : $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=MU_n$.

b.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+y=0\\3x-3y+2z=0\\2y-3z+3t=0\\z-3t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x\\y=z\\z=3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=3t\\z=3t\end{cases}$$

Ainsi, 1 est valeur propre de M et que le sous espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}\right)$.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+y=0\\3x+3y+2z=0\\2y+3z+3t=0\\z+3t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-3x\\z=-y\\z=-3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=-3t\\z=-3t\end{cases}$$

Ainsi, -1 est valeur propre de M et que le sous espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\\1\end{pmatrix}\right)$.

c. Après échelonnement des matrices, on trouve que :

$$\boxed{\mathrm{rg}\left(M-\frac{1}{3}I_4\right)=\mathrm{rg}\left(M-\frac{1}{3}I_4\right)=3.}$$

On en déduit que $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ sont des valeurs propres de M. Puisque $M\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ admet quatre valeurs propres distinctes, $\underline{M\text{ est diagonalisable}}$ en vertu de la condition suffisante de diagonalisabilité.

d. Remarquons que $U_0=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}$ puis que U_0 est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1. Ainsi, on peut montrer par récurrence que $U_n=M^nU_0=U_0$. La loi de X_n est donc la même que celle de X_0 : $\underline{\text{la loi binomiale de paramètres 3 et }\frac{1}{2}}$.

e. Puisque M est diagonalisable, il existe une matrice $P\in\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ telle que :

$$M=P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}P^{-1}$$

On peut montrer par récurrence (à faire !) que, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$M^n=P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&(-1)^n&0&0\\0&0&\frac{1}{3^n}&0\\0&0&0&\frac{(-1)^n}{3^n}\end{pmatrix}P^{-1}$$

On en déduit que le spectre de M^n est $\left\{1, \frac{1}{3^n}\right\}$ lorsque n est pair et $\left\{1, -1, \frac{1}{3^n}, \frac{-1}{3^n}\right\}$ lorsque n est impair.

f. Si X_n suit la même loi que X_0, alors on a $U_0 = M^n U_0$, i.e. U_0 est un vecteur propre de M^n (puisque $U_0 \neq 0$), associé à la valeur propre 1.

D'après la formule de diagonalisation de la question précédente, l'espace propre de M^n associé à la valeur propre 1 est l'espace propre de M associé à la valeur propre 1, i.e. $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}\right)$. Le seul vecteur U_0 représentant une loi de probabilité étant $\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}$, on trouve que X_0 suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{2}$.

4. a.

```python
def simule_D():
    nb_A = 1
    tirages = 1
    while nb_A != 0:
        nb_A = etape(3,nb_A)
        tirages += 1
    return tirages
```

b. (i) Puisque $[D = 2] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]$, on trouve que $\mathbb{P}(D = 2) = \frac{1}{3}$ via la formule des probabilités composées.

Puisque $[D = 4] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 2] \cap [X_3 = 1] \cap [X_4 = 0]$, on trouve que $\boxed{\mathbb{P}(D = 4) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}}$ via la formule des probabilités composées.

(ii) Puisque le nombre de boules dans l'urne A ne varie que d'une unité entre chaque tirages, un nombre impair de tirages donnera une variation impaire du nombre de boules dans l'urne A. Ainsi D ne prend que des valeurs paires.

(iii) Puisque $U_{2k+2} = M^2 U_{2k}$, $\mathbb{P}(X_{2k+2} = 0) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_{2k} = 0) + \frac{2}{9}\mathbb{P}(X_{2k} = 2)$. On sait aussi que $\mathbb{P}(X_{2k} = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$. On en déduit donc que

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{2k+2} = 0) = \frac{1}{9}\mathbb{P}(X_{2k} = 0) + \frac{2}{9}.}$$

On pouvait aussi appliquer la formule des probabilités totales avec $[X_{2k} = 0]$ et son complémentaire.

(iv) On sait que $D \leqslant 2k$ si $X_{2k} = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}[X_{2k} = 0] &= [X_{2k} = 0] \cap [D \leqslant 2k] \\ &= [X_{2k} = 0] \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} [D = 2j]\right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{k} [(X_{2k} = 0) \cap (D = 2j)]\,.\end{aligned}$$

(v) Remarquons que $\mathbb{P}_{[D=2j]}(X_{2k} = 0) = \mathbb{P}(X_{2k-2j} = 0)$. En effet, si $[D_{2j} = 0]$ est réalisé, l'urne est vide à l'issue du $2j$-ème lancer ; il reste alors $2k - 2j$ tirages qui, partant d'une urne vide, redonnent une urne vide.

D'après la question précédente, on a alors (la réunion étant disjointe) :

$$\begin{aligned}u_k = \mathbb{P}(X_{2k} = 0) &= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(D = 2j)\mathbb{P}_{[D=2j]}(X_{2k} = 0) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(D = 2j)\mathbb{P}(X_{2k-2j} = 0) = \sum_{j=1}^{k} d_j u_{k-j}.\end{aligned}$$

Puisque $u_0 = 1$, on trouve que $u_k = d_k + \sum_{j=1}^{k-1} d_j u_{k-j}$, i.e. $d_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} d_j u_{k-j}$.

c. On calcule à chaque itération u_k puis d_k pour remplir les listes $[u_0, \ldots, u_n]$ et $[0, d_1, \ldots, d_n]$ (le 0 est conservé pour simplifier les calculs d'indice ; on le supprime à la dernière ligne).

```python
def loi_D(n):
    u, d = [1], [0]
    for k in range(1,n+1):
        uk = u[-1]/9 + 2/9
        dk = uk
        u.append(uk)
        for j in range(1,k):
            dk -= d[j]*u[k-j]
        d.append(dk)
    return d[1:]
```

* *

*