Questions de cours

1. Énoncer le critère de comparaison des fonctions positives.
2. Énoncer le lien entre la convergence absolue et la convergence simple.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(0) = 1$ et :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et que, pour tout $x \geqslant 0,\ 0 < f(x) \leqslant 1$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.
3. Montrer que :
$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{n} xe^{-kx} + \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1}.$$
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-kx}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{1}{k^2}$.
5. À l'aide des questions 1 et 2, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = 0.$$
6. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$ converge et :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_0 converge et $I_0 = 2$.
2. À l'aide du critère d'équivalence, en déduire que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_0^1 2nt^{n-1}\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.
4. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\forall t \in [0, 1[,\ \sqrt{1-t} = \frac{a}{\sqrt{1-t}} - \frac{bt}{\sqrt{1-t}}.$$
5. Déduire des deux questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
6. Écrire en Python une fonction qui prend en argument n et qui renvoie I_n.
7. Conjecturer une expression explicite de I_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ puis prouver cette conjecture.

Exercice 3

On dispose de N boules numérotées de 1 à N, indiscernables au toucher, et de deux urnes A et B.

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on choisit au hasard et équiprobable un nombre entre 1 et N et on change d'urne la boule portant le numéro correspondant.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

1. Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = k-1)$ et $\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

2. a. Écrire une fonction `etape` prenant en arguments `N` et le nombre `k` de boules dans A à un instant donné et qui renvoie le nombre de boules dans A à l'instant suivant.

   b. Écrire une fonction renvoyant sous forme d'une liste les valeurs successivement prises par X_0, ..., X_n. Elle prendra en argument les entiers n et x_0 (représentant le nombre de boules initialement dans l'urne A).

   À partir de maintenant et dans toute la suite, on suppose $N = 3$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$; on note aussi $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.

   b. Montrer que 1 et -1 sont valeurs propres de M et déterminer les sous-espaces propres associés.

   c. Calculer le rang des matrices $M - \dfrac{1}{3}I_4$ et $M + \dfrac{1}{3}I_4$. Que peut-on en déduire ?

   d. On suppose que X_0 suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{2}$. Quelle loi suit alors X_n ?

   e. Déterminer le spectre de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. *On pourra distinguer selon les valeurs de n.*

   f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un **entier impair**. Quel est l'ensemble des lois que pourrait suivre X_0 pour que X_n ait la même loi que X_0 ?

4. On suppose que l'urne A est initialement vide. On note D la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour que l'urne A soit à nouveau vide.

   a. Écrire une fonction en Python simulant la réalisation de D. *On pourra utiliser les précédents codes.*

   b. (i) Calculer $\mathbb{P}(D = 2)$ et $\mathbb{P}(D = 4)$.

      (ii) Justifier pourquoi D ne peut-il prendre que des valeurs paires.

      (iii) Montrer que $\mathbb{P}(X_{2k+2} = 0) = \dfrac{1}{9}\mathbb{P}(X_{2k} = 0) + \dfrac{2}{9}$.

      (iv) On note désormais $u_k = \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ et $d_k = \mathbb{P}(D = 2k)$. Montrer que $[X_{2k} = 0] = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} [X_{2k} = 0] \cap [D = 2j]$.

      (v) En déduire que $d_k = u_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} d_j u_{k-j}$.

   c. A l'aide des relations des questions 4.b.(iii) et 4.b.(v), écrire une fonction en Python renvoyant la liste $[d_1, \dots, d_n]$.

*   *
*