Exercice 1

Partie A : Quelques exemples

1. Puisque la matrice A n'est pas symétrique, $A \notin S_2^+(\mathbb{R})$.
   On trouve après calculs que $\mathrm{Sp}(B) = \{-1;1\}$, $B \notin S_2^+(\mathbb{R})$.
   La matrice C est symétrique et $\mathrm{Sp}(C) = \{0,2\}$, donc $C \in S_2^+(\mathbb{R})$.
   La matrice D est symétrique et $\mathrm{Sp}(D) = \{1,5\}$, donc $D \in S_2^+(\mathbb{R})$.
2. a. On remarque que :
$$\mathcal{M} = \left\{aM(1,0) + bM(0,1), (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}(I_3, M(0,1)).$$
   On en déduit que $\mathcal{M}$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Les matrices I_3 et $M(0,1)$ n'étant pas colinéaires, la famille $(I_3, M(0,1))$ est libre donc forme une base de $\mathcal{M}$. On en déduit que $\dim \mathcal{M} = 2$.

   b. Soient $y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Remarquons que :
$$M(a,b)\begin{pmatrix}1\\y\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\y\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+by=\lambda \\ ay+2b=\lambda y \\ a+by=\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+by=\lambda \\ 2b-by^2=0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - yL_1\end{cases}$$
   Si $b \neq 0$, on obtient donc que les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de $M(a,b)$ (associés respectivement aux valeurs propres $a+b\sqrt{2}$ et $a-b\sqrt{2}$). Lorsque $b=0$, on remarque que ces deux vecteurs sont encore des vecteurs propres de $M(a,b)$.
   Le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal à $M(a,b)$. Puisque :
$$M(a,b)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$
   le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a,b)$ (associé à la valeur propre a).

   c. Remarquons que la famille
$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right)$$
   est une famille orthogonale, formée de vecteurs propres de $M(a,b)$. Ainsi, en normant ces vecteurs, la famille :
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix},\right)$$
   forme une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   On en déduit que la matrice
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
   est orthogonale. En posant $r = \sqrt{2}$, on trouve que :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad M(a,b) = P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+br & 0 \\ 0 & 0 & a-br\end{pmatrix}P^\top.$$

   d. La matrice $M(a,b)$ appartient à $S_3^+(\mathbb{R})$, si et seulement si :
$$\begin{cases} a \geqslant 0 \\ a+b\sqrt{2} \geqslant 0 \\ a-b\sqrt{2} \geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow a \geqslant |b|r.$$

Partie B : Matrice de Gram

3. a.
```python
def prod_scal(u,v):
    s = 0
    for k in range(len(u)):
        s += u[k] * v[k]
    return s
```
   b.
```python
import numpy as np

def matG(e):
    n = len(e)
    G = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            G[i,j] = prod_scal(e[i],e[j])
    return G
```

4. a. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. L'implication directe est évidente : si x est orthogonal à tout vecteur de E, il est en particulier orthogonal aux vecteurs $e_1, \dots, e_n$.
Réciproquement, supposons que x orthogonal aux vecteurs $e_1, \dots, e_n$. Soit $y \in E$. Puisque $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$
Par linéarité à droite du produit scalaire, on trouve que :
$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle = 0.$$
On en déduit que x est orthogonal à y et ainsi à tout vecteur de E, i.e. $x \in E^\perp$.
Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \in E^\perp \Leftrightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle x, e_i\rangle = 0).$$

b. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(G) &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle x_j = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \left\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E^\perp \quad \text{d'après la question précédente.}\end{aligned}$$
On en déduit que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(G) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E^\perp.$$

c. Remarquons que :
$$\begin{aligned} G \text{ est inversible} &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(G) = n \\ &\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(G) = 0 \text{ d'après le théorème du rang} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(G) = \{0\}. \end{aligned}$$
Supposons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Elle forme donc une base de $\mathbb{R}^n$ par un argument de cardinalité. Ainsi $E = \mathbb{R}^n$ et $E^\perp = \{0\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(G)$.
D'après la question précédente, on a
$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0,$$
et ainsi que $X = 0$ par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(G) = \{0\}$ et donc que G est inversible.
Réciproquement, supposons G inversible. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0.$$
On en déduit que $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(G) = \{0\}$, prouvant ainsi la liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$. On a donc bien prouvé que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre si et seulement si G est une matrice inversible.

5. a. On trouve immédiatement que :
$$GX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \langle e_1, e_j\rangle x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \langle e_n, e_j\rangle x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle e_1, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle e_n, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle \end{pmatrix}.$$
Ainsi :
$$X^\top G X = \sum_{i=1}^{n} x_i \left\langle e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \langle x', x'\rangle,$$
où $x' = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

b. Avec les notations de la question précédente, on trouve que :
$$\langle x', x'\rangle = X^\top G X = X^\top(\lambda X) = \lambda X^\top X = \lambda \|X\|^2.$$

Puisque X est un vecteur propre, il est non nul et ainsi :

$$\lambda = \frac{\|x'\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0.$$

On en déduit que $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et ainsi que toute valeur propre de G est positive. Ainsi, la matrice G appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$.

Partie C : Matrice de covariance

6. a. Soient $(i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_i, X_j + xX_k) &= \mathbb{E}[X_i(X_j + xX_k)] - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j + xX_k) \\
&= \mathbb{E}(X_iX_j) + x\mathbb{E}(X_iX_k) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) - x\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_k) \\
&= \mathbb{E}(X_iX_j) + x\mathbb{E}(X_iX_k) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) - x\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_k) \\
&= \operatorname{Cov}(X_i, X_j) + x \operatorname{Cov}(X_i, X_k),
\end{aligned}$$

en appliquant deux fois la formule de König-Huygens à la dernière ligne.

b. Le résultat se montre simplement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

7. a. La matrice Σ est une matrice symétrique réelle car la covariance est une application symétrique à valeurs réelles.

b. Soit λ une valeur propre de Σ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On a alors $X^\top \Sigma X = \lambda \|X\|^2$. Puisque

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ (\Sigma X)_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \operatorname{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{n} x_j X_j\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
X^\top \Sigma X &= \sum_{i=1}^{n} x_i \operatorname{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{n} x_j X_j\right) \\
&= \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i X_i, \sum_{j=1}^{n} x_j X_j\right) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i X_i\right).
\end{aligned}$$

On trouve alors que $\lambda = \dfrac{\mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i X_i\right)}{\|X\|^2} \geqslant 0$ et ainsi que $\operatorname{Sp}(\Sigma) \subset \mathbb{R}_+$. Puisque Σ est symétrique réelle, $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Partie A : Autour de la loi géométrique

1. a. L'ensemble des valeurs prises par X_1 est $\mathbb{N}$. En notant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ S_k l'événement "il n'y a pas d'alerte au jour k" (après la dernière alerte), on trouve la loi de X_1 :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_1 = i) = \mathbb{P}\left(S_1 \cap \cdots \cap S_i \cap \overline{S_{i+1}}\right) = q^i p,$$

par indépendance des alertes.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(1 + X_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = k - 1) = q^{k-1}p$. La variable aléatoire $1 + X_1$ suit donc la loi géométrique de paramètre p.

2. a. Soit $(j, k) \in \mathbb{N}^2$. Remarquons que $\mathbb{P}(X_2 = k \mid X_1 = j) = 0$ si $j > k$.
Supposons que $j \leqslant k$. La quantité $\mathbb{P}(X_2 = k \mid X_1 = j)$ est donc la probabilité qu'il y a ait eu $k - j$ jours sans alerte (du jour $j + 2$ au jour $k + 1$) suivis d'une alerte. Par indépendance des alertes, on obtient $\mathbb{P}(X_2 = k \mid X_1 = j) = q^{k-j}p$.

b. En utilisant le système complet d'événements $([X_1 = j])_{j \in \mathbb{N}}$, la formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_2 = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = j)\mathbb{P}(X_2 = k \mid X_1 = j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} q^k p^2 \quad \text{car } \forall j > k,\ \mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k) = 0 \\
&= (k+1)q^k p^2.
\end{aligned}$$

Partie B : Généralisation de la situation précédente

3.

```python
def simule_X(n,p):
    q = 1-p
    nb_alertes = 0
    nb_jours_sans_alerte = 0
    while nb_alertes < n:
        if rd.random() < p:
            nb_alertes += 1
        else:
            nb_jours_sans_alerte += 1
     return nb_jours_sans_alerte
```

4. a. La relation est triviale pour $k=0$ (car $n \geqslant 1$). Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que :
$$\binom{n+k}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j}.$$
On conclut grâce à la formule du triangle de Pascal :
$$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k+1} = \binom{n+k+1}{k+1}.$$
On en déduit que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \binom{n+k}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j}.$$
b. La propriété est initialisée :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \binom{1+k-1}{k} q^k p = q^k p = \mathbb{P}(X_1 = k).$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n+k-1}{k} q^k p^n.$$
En raisonnant de la même manière qu'à la question 2.a, on trouve que :
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = j) = \begin{cases} q^{k-j} p & \text{si } k \geqslant j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
La formule des probabilités totales, appliquée au système $([X_n = j])_{j \in \mathbb{N}}$, garantit que
$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = j)\mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j} q^k p^{n+1} = \binom{n+k}{k} q^k p^{n+1},\end{aligned}$$
ce qui conclut la récurrence. Ainsi, on a bien montré que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n+k-1}{k} q^k p^n.$$

5. a. Le résultat est vrai pour $n=1$ d'après les questions 1.a et 3.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (H_n) l'assertion "$\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(n,p)$". Les variables aléatoires $\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)}$ et $X_1^{(n+1)}$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.

b. Montrons le résultat par récurrence. La propriété est initialisée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que (H_n) soit vraie. Puisque les événements $([X_1^{(n+1)} = j])_{j \in \mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que, pour tout entier naturel k, on a :
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_1^{(i)} = k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X_1^{(n+1)} = j, \sum_{i=1}^{n+1} X_1^{(i)} = k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\left(X_1^{(n+1)} = j, \sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} = k-j\right) \text{ car } \forall j > k,\ \left[\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} = k-j\right] = \emptyset \\ &= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\left(X_1^{(n+1)} = j\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} = k-j\right) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{j=0}^{k} q^j p \binom{n+k-j-1}{k-j} q^{k-j} p^n \\ &= q^k p^{n+1} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+\ell-1}{\ell} \text{ en posant } \ell = k-j \\ &= \binom{n+k}{k} q^k p^{n+1}.\end{aligned}$$
On en déduit que (H_{n+1}) est vrai. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(n,p)$.

c. Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(n,p)$ et $X_m \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(m,p)$, alors $X_{n+m} \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(n+m,p)$. En effet, considérons une famille de $n+m$ variables aléatoires indépendantes $(X_1^{(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n+m}$ telles que, pour tout $i \in [\![1, n+m]\!]$, $X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathcal{G}^{-1}(p)$. D'après la question précédente :

- la variable $\sum_{i=1}^{n} X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(n,p)$; elle suit donc la même loi que X_n ;
- la variable $\sum_{i=n+1}^{n+m} X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(m,p)$; elle suit donc la même loi que X_m.

Par indépendance des variables aléatoires $(X_1^{(i)})_{1 \leqslant i \leqslant n+m}$, la variable $X_n + X_m$ suit la même loi que la variable $\sum_{i=1}^{n+m} X_1^{(i)}$, donc la loi $\mathcal{B}^{-1}(n+m,p)$.

Partie C : Une loi binomiale et une loi normale

6. a. La variable aléatoire Y_{n+k} est égale au nombre de succès (jour avec alerte) lors de la répétition de $n+k$ expériences indépendantes de Bernoulli de même paramètre de succès p donc Y_{n+k} suit la loi binomiale de paramètres $n+k$ et p.
   b. L'événement $[X_n > k]$ est réalisé si, et seulement si, il y a au moins $k+1$ jours sans alerte avant la n-ème alerte, c'est-à-dire si, et seulement si, il y a au plus $n-1$ alertes lors de $k+1+n-1 = n+k$ premiers jours, c'est-à-dire si, et seulement si l'événement $[Y_{n+k} < n]$ est réalisé. Ainsi $[X_n > k] = [Y_{n+k} < n]$.

7. a. La variable aléatoire X_n suit la même loi que $\sum\limits_{i=1}^{n} X_1^{(i)}$ donc admet même espérance et même variance (sous réserve d'existence). Puisque toutes les variables $1+X_1^{(i)}$ suivent une loi géométrique, les variables $X_1^{(i)}$ admettent une espérance et une variance :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{E}\left(X_1^{(i)}\right) = \mathbb{E}\left(1+X_1^{(i)}\right) - 1 = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\left(X_1^{(i)}\right) = \mathbb{V}\left(1+X_1^{(i)}\right) = \frac{q}{p^2}.$$

   Par linéarité, $\sum\limits_{i=1}^{n} X_1^{(i)}$ admet une espérance (donc X_n aussi), égale à :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_1^{(i)}\right) = \frac{nq}{p}.$$

   Par indépendance des $\left(X_1^{(i)}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} X_1^{(i)}$ admet une variance (donc X_n aussi) :

$$\mathbb{V}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left(X_1^{(i)}\right) = \frac{nq}{p^2}.$$

   Ainsi, on a donc bien :

$$Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{nq}{p}, \frac{nq}{p^2}\right).$$

   b. L'énoncé est le suivant :

   > Soit $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'espérance μ et d'écart-type σ supposé non nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$. Alors, pour tout $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a<b$, on a :
   >
   > $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{M_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

   En appliquant le théorème à la suite $(X_1^{(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ (qui vérifie toutes les hypothèses du théorème central limite), on a $\mu = \frac{q}{p}$, $\sigma = \frac{\sqrt{q}}{p}$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_1^{(k)} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

   Puisque X_n suit la même loi que $\sum\limits_{k=1}^{n} X_1^{(k)}$, on trouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{\frac{X_n}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}} < b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

   Puisque Z_n suit une loi normale, la variable aléatoire $\dfrac{\frac{Z_n}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}}$ aussi. Puisque :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\frac{Z_n}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}}\right) = \frac{\frac{\mathbb{E}(Z_n)}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\left(\frac{\frac{Z_n}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}}\right) = \frac{\frac{\mathbb{V}(Z_n)}{n^2}}{\frac{q}{np^2}} = 1,$$

   la variable aléatoire $\dfrac{\frac{Z_n}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}}$ suit la loi normale centrée réduite. La suite

$$\left(\mathbb{P}\left(a < \frac{\frac{Z_n}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}} < b\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

   est donc constante et en particulier que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{\frac{Z_n}{n} - \frac{q}{p}}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}} < b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

   On en déduit que les deux suites ci-dessous convergent vers une même limite ℓ.

* *
*