

Planche 1
Agro-Véto 2024**Question de cours.**

Relation de Chasles pour les intégrales sur un segment.

Exercice (avec préparation).

1. Soit f une fonction paire et impaire. Que peut-on dire de f ?

2. On définit les fonction **sinus** et **cosinus hyperboliques** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a. Écrire une fonction en Python traçant le graphe de sh et ch sur l'intervalle $[-4, 4]$.

b. Étudier la parité de sh et ch . Quelles sont leurs limites en $+\infty$ et $-\infty$?

c. Justifier la dérivabilité de ch et sh et déterminer leurs dérivées.

3. On pose $F = \operatorname{Vect}(\sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch})$ et $d : f \mapsto f'$.

a. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch})$ est libre. *Indication : utiliser la question 1.*

b. Déterminer la dimension de F .

c. Montrer que $d(F) \subset F$.

4. On note φ la restriction de d à F :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & F & \rightarrow F \\ & f & \mapsto f'. \end{array}$$

a. Donner la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.

b. Calculer M^2 , M^3 , M^4 . En déduire M^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que φ est un automorphisme et déterminer sa réciproque.

d. À l'aide de Python, déterminer les valeurs propres de M . La matrice M est-elle diagonalisable ?

e. À partir de M , déterminer $\operatorname{Im}(\varphi^2 - \operatorname{Id}_F)$. L'équation $y'' - y = \operatorname{ch}$ admet-elle une solution dans F ?

f. À partir de M , déterminer $\operatorname{Im}(\varphi - \operatorname{Id}_F)$ et $\operatorname{Ker}(\varphi - \operatorname{Id}_F)$. L'équation $y' - y = \sin - \operatorname{sh} + \operatorname{ch}$ admet-elle une solution dans F ?

[Corrigé](#)

Planche 2
Agro-Véto 2024
Question de cours.

Définir une famille libre d'un espace vectoriel.

Exercice (avec préparation).

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par : $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. On définit aussi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} f(x) dx.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

2. a. Écrire la fonction f en Python.

b. Écrire une fonction en Python calculant de manière approchée l'intégrale de la fonction f sur un intervalle $[a, b]$ en utilisant la méthode des rectangles.

3. Montrer que :

$$u_n = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f((2n+1)t) dt.$$

4. On considère la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$.

a. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

b. Montrer qu'il existe un unique prolongement par continuité $\tilde{g}$ de g sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

c. Démontrer que $\tilde{g}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \tilde{g}(t) dt = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t) \tilde{g}'(t) dt.$$

b. En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \tilde{g}(t) dt = 0.$$

6. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt).$$

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2n+1)f((2n+1)t) - \sin((2n+1)t)\tilde{g}(t) \right] dt = \frac{\pi}{2}.$$

7. Conclure sur la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

[Corrigé](#)

Planche 3
Agro-Véto 2024
Question de cours.

Caractérisation de α est racine de P .

Exercice (avec préparation).

1. On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

On considère ensuite une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que X . Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

On cherche le plus petit indice $i \in \mathbb{N}^*$ tel que Y_i admette une espérance.

a. Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

b. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{k+2}}\right)$.

c. En déduire que : $\mathbb{P}(X = k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k\sqrt{k}}$. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

d. Calculer $\mathbb{P}(Y_2 > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de Y_2 puis que Y_2 n'admet pas d'espérance.

e. Déterminer la loi de Y_3 puis que Y_3 admet une espérance.

f. Conclure.

2. On pose :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire Z .

b. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

c. Déterminer la fonction de répartition de Z .

Corrigé

Planche 4
Agro-Véto 2024
Question de cours.

Définition et expression explicite d'une suite géométrique.

Exercice (avec préparation).

Soient Y_0 et Z_0 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On considère le polynôme $P(X) = X^2 + Y_0X + Z_0$.

1. On pose $Z = -4Z_0$. Déterminer l'univers-image de Z . Montrer que Z est à densité et déterminer une densité g .
2. On pose $Y = Y_0^2$. Montrer que Y est à densité, et qu'une de ses densité est donnée par :

$$h : y \mapsto \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(y).$$

3. Écrire un programme en Python calculant la probabilité que le polynôme P admette deux racines réelles distinctes.
4. On pose $\Delta = Y + Z$. Montrer que la fonction f ci-dessous est une densité de Δ :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t} - \frac{t}{4}}}{2\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad \forall x < 0, f(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t} - \frac{t}{4}}}{2\sqrt{t}} dt.$$

Rappel : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g , alors $X + Y$ est une variable à densité, dont la densité h est donnée par le produit de convolution :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y) dy.$$

5. Montrer que $\mathbb{P}(\Delta < 0)$ vaut :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t} - \frac{t}{4}}}{2\sqrt{t}} dt.$$

6. À l'aide du changement de variable $t = u^2$, montrer que :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-u - \frac{u^2}{4}} du.$$

7. Calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^A e^{-u - \frac{u^2}{4}} du$ à l'aide de Python.

8. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & Z_0 \\ -1 & -Y_0 \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que λ est valeur propre de M si, et seulement si, $P(\lambda) = 0$.
- b. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable en tant que matrice réelle.

[Corrigé](#)

Planche 5
Agro-Véto 2024
Question de cours.

Donner la définition des fonctions partielles d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice.

On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles de densités respectives f_S et f_T et indépendantes, alors $S + T$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par la formule de convolution :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{S+T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s)f_T(t-s)ds. \quad (\text{E})$$

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$ et λ un réel strictement positif. On note $X = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - U)$. Vérifier que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
2. Écrire un programme Python qui simule une loi exponentielle.
3. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X . On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$S_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

- a. À l'aide d'une récurrence, montrer que la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

- b. En utilisant la formule de convolution (E) et une récurrence, montrer que f_n est une densité de S_n pour tout entier $n \geq 1$.
4. On suppose qu'à un arrêt, les différences entre les horaires de passage successifs d'un bus sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ . On définit un instant $S_0 = 0$, puis on note $S_1, S_2, \dots$ les horaires de passage successifs des bus. On note alors, pour $t > 0$, N_t le nombre de bus passés à l'arrêt entre l'instant 0 et l'instant t . Autrement dit :

$$\forall n \geq 0, \quad [N_t = n] = [S_n \leq t < S_{n+1}].$$

- a. Pour $n \geq 0$, exprimer (avec soin) l'événement $[N_t > n]$ à l'aide de S_n .
- b. Justifier alors que :

$$\forall n \geq 0, \quad P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t).$$

- c. En déduire que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt .

5. On suppose plus précisément que les horaires de passage successifs d'un bus sont, en moyenne, de 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ min pour prendre le bus. On se pose alors les deux questions suivantes :

- Combien de temps en moyenne va-t-il attendre le prochain bus ?
- Combien de temps en moyenne s'écoule-t-il entre le prochain bus et le bus qui a précédé ?

Pour y répondre, on réalise le programme Python suivant :

```
import math as m
import random as rd

def autobus():
    a, b, N = 0, 0, 1000000
    for k in range(N):
        s = 0
        while s < 100:
            r = s
            s = s - 10 * m.log(1 - rd.random())
        u, v = s - 100, s - r
        a, b = a + u, b + v
    return a / N, b / N
```

- a. Expliquer ce que représentent les variables r, s, u et v dans le programme.
- b. Le programme affiche les valeurs suivantes :

10.062252 20.315494

Pourquoi ces valeurs affichées sont-elles paradoxales vis-à-vis de la situation ?

[Corrigé](#)

Planche 6
Agro-Véto 2024
Question de cours.

Donner la définition d'une densité de probabilité.

Exercice.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme usuelle notée $\| \cdot \|$.

Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour toute famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit G , la matrice de Gram de $(u_1, \dots, u_p)$ par

$$G = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \dots & \langle u_1, u_p \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \dots & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_p, u_1 \rangle & \langle u_p, u_2 \rangle & \dots & \langle u_p, u_p \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

1. a. Écrire une fonction Python **ps** prenant en argument deux vecteurs u et v sous forme de listes de même taille et renvoyant le produit scalaire $\langle u, v \rangle$.
 b. Écrire une fonction Python **Gram** prenant en argument une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ sous forme d'une liste de listes et renvoyant la matrice de Gram de la famille $(u_1, \dots, u_p)$.
 c. Tester votre fonction avec les vecteurs $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

2. Justifier que la matrice de Gram d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.

3. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de $\mathbb{R}^n$ et G sa matrice de Gram. On cherche à montrer que la famille est libre si et seulement si G est inversible.

- a. On suppose que G est inversible. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0$.

On pose $X = (\lambda_1 \dots \lambda_p)^T \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $GX = 0$, puis en déduire que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

- b. On suppose que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. Soit $X = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $GX = 0$.

(i) Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\left\langle u_i, \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \right\rangle = 0$.

(ii) En déduire que $\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0$.

(iii) Montrer que $X = 0$, puis que G est inversible.

4. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|v_i\| = 1 \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow \|v_i - v_j\| = 1.$$

- a. Pour tous vecteur $a, b \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle$.
- b. En déduire la matrice de Gram de la famille $(v_1, \dots, v_n)$, que l'on notera G .
- c. On pose $A = 2G$. Exprimer A^2 en fonction de n , A et I_n (la matrice identité de taille n). En déduire que A est inversible.
- d. Montrer que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

[Corrigé](#)

Planche 7
Agro-Véto 2024**Question de cours.**

Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales sur un segment.

Exercice.

Soit n un entier naturel non-nul.

On dispose de n jetons et de trois urnes numérotées de 1 à 3.

Pour chaque jeton, on choisit une des trois urnes au hasard et avec équiprobabilité et on place le jeton dans l'urne choisie. Le placement de chaque jeton est indépendant du placement de tous les autres jetons.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons contenus dans l'urne 1 à la fin de l'expérience, et on note Y le nombre d'urnes restées vides à la fin de l'expérience.

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel n non nul, simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus, et renvoie les valeurs de X et de Y obtenues.
2. Dans cette question, $n = 10$. Utiliser la fonction précédente pour simuler un grand nombre de fois l'expérience et obtenir une valeur approchée de $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Que peut-on conjecturer sur la valeur de la covariance du couple (X, Y) ?

3. Dans cette question, $n = 2$.

- a. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, puis donner la loi conjointe du couple (X, Y) sous forme de tableau.
- b. Donner la loi de X , puis celle de Y .
- c. Calculer la covariance du couple (X, Y) .

4. Dans cette question, on revient au cas général où n est un entier naturel quelconque.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide à la fin de l'expérience, et qui vaut 0 sinon.

- a. Déterminer la loi de X , et donner la valeur de son espérance.
- b. En remarquant que $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, calculer $\mathbb{E}(Y)$.
- c. Démontrer que :

$$\forall i \in \{2, 3\}, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = j, Y_i = 1) = \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n}.$$

- d. Calculer alors $\mathbb{E}(XY_i)$ pour $i \in \{2, 3\}$. Que vaut cette espérance si $i = 1$?
- e. Calculer la covariance du couple (X, Y) .

[Corrigé](#)

Planche 8
Agro-Véto 2024
Question de cours.

Donner la définition du gradient d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application D par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad D(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. a. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 b. Déterminer $D(1)$ puis $D(X^k)$ pour tout entier naturel k de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 c. Donner la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
 d. Déterminer le spectre de D . D est-il diagonalisable ?
2. On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$.
 a. Montrer que $\mathcal{B} = (H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 b. Calculer $D(H_0)$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D(H_k) = kH_{k-1}$.
 c. Déterminer la matrice représentative de D dans la base $\mathcal{B}$.
3. En Python, un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est codé en listant ses $n+1$ coefficients par ordre croissant de degré. Par exemple, dans $\mathbb{R}_4[X]$, le polynôme $P = 5X^3 - 2X + 3$ est représenté par la liste $[3, -2, 0, 5, 0]$.
 a. Programmer une fonction Python qui prend en argument une liste de longueur $n+1$ modélisant un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et un réel a , et qui renvoie alors la liste modélisant $(X-a)P$.
 b. Programmer une fonction Python qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie la liste modélisant le polynôme H_n .
4. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
 a. Montrer que $H_2(Y)$ admet une espérance, en déduire que $H_1(Y)$ et $H_0(Y)$ admettent une espérance. Déterminer alors $\mathbb{E}(H_0(Y))$, $\mathbb{E}(H_1(Y))$ et $\mathbb{E}(H_2(Y))$.
 b. Déterminer les coordonnées de 1 , X et X^2 dans la base (H_0, H_1, H_2) .
 c. Retrouver la valeur de la variance de Y .
5. On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
 À tout élément $f \in E$, on associe la fonction $g = \bar{D}(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \bar{D}(f)(x) = f(x+1) - f(x).$$
 a. On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de $\bar{D}$ s'il existe une fonction non nulle f de E telle que $\bar{D}(f) = \lambda f$.
 En considérant les fonctions $h_a : x \mapsto e^{ax}$ et $k_a : x \mapsto \sin(\pi x)e^{ax}$ où a est un réel, déterminer les valeurs propres de $\bar{D}$.
 b. Si F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X , montrer que $g = \bar{D}(F)$ est une densité de probabilité.
 c. Expliciter g si X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Corrigé

Planche 9
Agro-Véto 2023
Question de cours.

Donner une équation cartésienne de plan dont le vecteur $u = (1, 2, -1)$ est un vecteur normal.

Exercice (avec préparation).

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est adaptée à une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n f(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right).$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ admettant une suite adaptée.

1. Montrer que la suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction $f : x \mapsto x - \frac{1}{2}$.
2. Soit $f \in \mathcal{E}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite adaptée à f , alors $f' \in \mathcal{E}$ et la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est adaptée à f' .
3. On considère une suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de fonctions définie par $B_0 = 1$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, B'_p = pB_{p-1} \text{ et } \int_0^1 B_p(t) dt = 0.$$

On veut montrer que toutes les fonction B_p appartiennent à $\mathcal{E}$.

- a. Écrire en Python une fonction prenant en argument une liste $L = [a_0, \dots, a_n]$ et renvoyant le nombre suivant :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n a_k x^k dx.$$

- b. Calculer B_1 et B_2 et montrer que B_0 et B_1 appartiennent à $\mathcal{E}$.
- c. On fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction :

$$\varphi_{p,n} : x \mapsto \frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right).$$

On suppose que B_{p-1} appartient à $\mathcal{E}$.

- (i) Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n^{p-2}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est adaptée à B_{p-1} .
- (ii) En déduire que la fonction $\varphi_{p,n}$ est constante.
- (iii) Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi_{p,n}(x) dx.$$

- (iv) En déduire que $\varphi_{p,n} = 0$.
- (v) Conclure.

Corrigé

Planche 10
Agro-Véto 2023**Question de cours.**

Donner la définition de la continuité en un point a d'une fonction f définie sur un intervalle I ($a \in I$).

Exercice (avec préparation).

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \lambda^3 - 9\lambda^2 - 29\lambda + 61 = 0$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 9x^2 - 29x + 61$. Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on précisera ses limites en $+\infty$ et $-\infty$).
3. En déduire que A admet trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
4. À l'aide de l'outil informatique, déterminer une valeur approchée de ces trois valeurs propres à 10^{-2} -près (on pourra calculer $f(-4)$ et $f(12)$).
5. Montrer qu'on peut écrire $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.
6. On note $\mathcal{C}(A)$ (resp. $\mathcal{C}(D)$) l'ensemble des matrices qui commutent avec A (resp. D).
 - a. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - b. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{C}(D)$ si, et seulement si, M est diagonale.
 - c. Montrer que : $M \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$.
 - d. En déduire une base de $\mathcal{C}(A)$.

Corrigé

Planche 11
Agro-Véto 2023
Question de cours.

Donner la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

Exercice (avec préparation).

On $n \geq 2$ éléphants. Un vétérinaire en examine un chaque jour en le choisissant au hasard. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note Y_k le nombre d'éléphants différents qui ont été examinés jusqu'au jour k (inclus).

1. Écrire en Python une fonction qui prend en argument deux entiers k et n non nul et qui simule la variable Y_k .

2. Déterminer les lois de Y_1 et Y_2 .

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $G_k = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_k = i) X^i$.

a. Montrer que $G_k(1) = 1$ et $G'_k(1) = \mathbb{E}(Y_k)$.

b. Calculer G_1 et G_2 .

c. Exprimer $\mathbb{P}(Y_{k+1} = i)$ à l'aide de probabilités faisant intervenir Y_k .

d. En déduire G_{k+1} en fonction de G_k puis $\mathbb{E}(Y_k)$.

4. On pose :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto \frac{1}{n} X(1-X)P' + XP \end{aligned}$$

a. Montrer que Φ est une application linéaire.

b. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_j = X^j(1-X)^{n-j}$. Montrer que $\Phi(P_j) = \frac{j}{n} P_j$.

c. Montrer que la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$ constitue un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qu'on notera φ .

d. Montrer que φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

5. a. Vérifier que :

$$G_0 = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j \text{ et } \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_j = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i.$$

b. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, G_k = \Phi^k(G_0) = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right] X^i$$

c. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(Y_k = i) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$

[Corrigé](#)

Planche 12
Agro-Véto 2023
Question de cours.

Résolution de l'équation $\cos x = \cos \alpha$ d'inconnue x .

Exercice (avec préparation).

Soient $E = \mathbb{R}^n$ un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Soient f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E de dimension non nulle.

1. Écrire une fonction en Python qui prend en argument deux listes représentant les coordonnées de deux vecteurs u et v dans $\mathcal{B}$ et qui renvoie le produit scalaire de u et v .
2. On définit l'adjoint de f , noté f^* , par :

$$\forall u \in E, f^*(u) = \sum_{i=1}^n \langle u | f(e_i) \rangle e_i.$$

- a. Montrer que f^* est un endomorphisme de E .
- b. Montrer que :

$$\forall (u, v) \in E^2, \langle u | f(v) \rangle = \langle f^*(u) | v \rangle.$$

3. Compléter le code de la fonction ci-dessous permettant de calculer $f^*(u)$:

```
def adjoint(f,u):
    n = len(u)
    res = ...
    for i in range(n):
        e = np.zeros(n)
        e[...] = 1
        ...
    return res
```

4. Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^T$.
5. On suppose ici que $f^* = f$.
 - a. Montrer que f est diagonalisable.
 - b. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)^\perp$ et $\text{Im } f = \text{Ker}(f)^\perp$.
6. Soit $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F . On considère l'application $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par :

$$\forall v \in E, \Phi(v) = (\langle v | u_1 \rangle, \dots, \langle v | u_p \rangle).$$

- a. Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
- b. Soit $v \in E$. Montrer que : $v \in F^\perp \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle v | u_k \rangle = 0$.
- c. Montrer que Φ est une application linéaire surjective.
- d. Retrouver alors le résultat bien connu : $\dim(F^\perp) = n - \dim F$.

[Corrigé](#)

Planche 13
Agro-Véto 2023
Question de cours.

Énoncer le théorème de transfert dans le cas d'une variable aléatoire admettant une densité.

Exercice (avec préparation).

Pour tout $n \geq 1$, on considère la matrice $K_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(K_n)_{i,i+1} = i$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(K_n)_{j+1,j} = -n - 1 + j$ et dont tous les autres coefficients sont nuls. On a donc :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de K_1 . Cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
2. Écrire une fonction `K` en **Python** qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la matrice K_n .
3. Utiliser la fonction précédente et la fonction `eigvals` du module `numpy.linalg` pour déterminer les valeurs propres de K_n pour $n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$. Que peut-on conjecturer ?
4. On se propose de montrer la conjecture faite dans la question précédente. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ et V_n le $\mathbb{C}$ -sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $\mathcal{B}_n = (f_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^{n-k}(x) \sin^k(x).$$

On considère l'application φ_n définie par : $\forall f \in V_n, \varphi_n(f) = f'$.

- a. Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Montrer que :

$$\lambda_0 f_0(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \dots + \lambda_n \tan(x)^n = 0.$$

- b. En déduire que la famille $\mathcal{B}_n$ est une base de V_n et la dimension de V_n .
c. Montrer que φ_n est un endomorphisme de V_n et déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}_n$.
d. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on note g_k la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \exp(i(n-2k)x)$$

Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = (\cos(x) + i \sin(x))^{n-k} (\cos(x) - i \sin(x))^k$.

- e. En déduire que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, g_k appartient à V_n .

Indication: On pourra utiliser sans le justifier que $\left(\sum_{j=0}^{n-k} a_j \right) \left(\sum_{l=0}^k b_l \right) = \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{l=0}^k a_j b_l$.

- f. En déduire les valeurs propres de φ_n puis celle de K_n .
g. La matrice K_n est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
h. Déterminer pour quelle valeur de n , la matrice K_n est inversible.
i. Lorsque K_n n'est pas inversible, déterminer une base du noyau.

Corrigé

Planche 14
Agro-Véto 2023**Question de cours.**

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \rightarrow F$.

Exercice (avec préparation).

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n$.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de numéros distincts obtenus.

2. Déterminer la loi de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$. Que vaut l'espérance de X dans les cas $n = 2$ et $n = 3$?
3. a. Écrire une fonction Python d'argument n qui simule l'expérience et renvoie la liste des numéros tirés.
b. Écrire une fonction Python d'argument n qui simule la variable X . *On pourra obtenir l'ensemble des valeurs d'une liste L avec la commande `set(L)` et obtenir le cardinal d'un ensemble s avec la commande `len(s)`.*
c. Écrire une fonction Python d'argument n qui calcule une valeur approchée de l'espérance de X .
4. Calculer :
- a. $\mathbb{P}(X = 1)$
 - b. $\mathbb{P}(X = n)$
 - c. $\mathbb{P}(X = 2)$
 - d. $\mathbb{P}(X = n - 1)$
5. Pour i entre 1 et n , on note A_i l'événement "le numéro i fait partie des numéros obtenus au cours des n tirages" et on note X_i la variable indicatrice de l'événement A_i (X_i prend la valeur 1 si A_i est réalisé et 0 sinon).
- a. Calculer la loi de X_i et son espérance.
 - b. Calculer l'espérance de X ainsi qu'un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. a. Pour i et j distincts entre 1 et n , calculer la loi de la variable $X_i X_j$.
b. Calculer la variance de X .

Corrigé

Planche 15
Agro-Véto 2023
Question de cours.

Lien(s) entre l'indépendance de deux variables discrètes et leur covariance.

Exercice (avec préparation).

1. On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer que le spectre de l'endomorphisme φ est : $\text{Sp}(\varphi) = \{1, 3\}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
- b. On note $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1)$ et $a_3 = (1, -1, 0)$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$.
- c. Déterminer une matrice carrée P telle que $A = PMP^{-1}$ et expliciter P^{-1} à l'aide de la fonction `inv` de Python.
La commande `inv` du module `linalg` de la bibliothèque `numpy` permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée de type `matrix`.

2. Soient f , g et h trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(t) &= 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) &= f(t) + 2g(t) + h(t) \\ h'(t) &= 3h(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad f(0) = g(0) = h(0) = 1.$$

- a. Déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis tracer à l'aide de Python l'allure de la courbe représentative de h sur l'intervalle $[0, 1]$.

- b. On note $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$.

$$\text{On note } Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \text{ et } Y'(t) = P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}.$$

Vérifier qu'on a : $\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

- c. En déduire l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- d. Déterminer alors l'expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de t .

[Corrigé](#)

Planche 16
Agro-Véto 2023
Question de cours.

Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a .

Exercice (avec préparation).

On rappelle que, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant respectivement les densités f et g , alors la variable aléatoire $X + Y$ admet une densité $f * g$ définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

1. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. Soient λ, μ deux réels strictement positifs.

- a. Déterminer les lois des variables aléatoires $-\frac{1}{\lambda} \ln(U)$ et $-\frac{1}{\mu} \ln(V)$.
- b. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ .
Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument les valeurs de λ et μ et qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire $\min(X, Y)$.
- c. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\min(X, Y)$ et vérifier qu'il s'agit d'une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
- d. Déterminer la loi de $-Y$.
- e. Montrer qu'une densité de $X - Y$ est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} e^{\mu x} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- f. Calculer alors la probabilité de l'événement $[X \leq Y]$.
2. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :
- X_1, X_3, X_5 et plus généralement X_{2n+1} pour $n \in \mathbb{N}$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1;
 - X_2, X_4, X_6 et plus généralement X_{2n} pour $n \in \mathbb{N}^*$, suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 2.
- Si $i \geq 2$, on dit que l'événement " X_i est un creux" est réalisé si $[X_i \leq X_{i-1}]$ et $[X_i \leq X_{i+1}]$ sont réalisés tous les deux.
- a. À l'aide de Python, estimer la probabilité des événements " X_2 est un creux" et " X_3 est un creux".
 - b. Calculer la probabilité des deux événements précédents.
3. a. Que vaut la probabilité de l'événement " X_2 et X_3 sont des creux"?
- b. Les événements " X_4 est un creux" et " X_8 est un creux" sont-ils indépendants?
 - c. Déterminer la loi du nombre de creux parmi les 10 variables aléatoires $X_4, X_8, X_{12}, \dots, X_{40}$.

[Corrigé](#)

Planche 17
Agro-Véto 2023
Question de cours.

Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Exercice (avec préparation).

On dispose initialement d'une urne U_0 contenant 1 boule blanche et 2 boules rouges.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remplit ensuite l'urne U_{n+1} avec 3 boules de la façon suivante. On effectue 3 tirages avec remise dans l'urne U_n , et pour chaque boule rouge (respectivement blanche) tirée, on place une nouvelle boule rouge (respectivement blanche) dans l'urne U_{n+1} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne U_n . En particulier $Y_0 = 1$.

1. Identifier la loi de la variable aléatoire Y_1 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \{0; 1; 2; 3\}$. Déterminer la loi de Y_{n+1} sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Y_n=k]}$, c'est-à-dire calculer $\mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j)$, pour tout $j \in \{0; 1; 2; 3\}$.
3. Écrire une fonction Python prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et simulant les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$. La fonction renverra le résultat sous la forme d'une liste $[Y_0, Y_1, \dots, Y_n]$
4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que tout $k \in \{0; 1; 2; 3\}$, $\sum_{j=0}^3 j \mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) = k$.
 b. En déduire que $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{E}[Y_n]$.
 c. En déduire l'expression de $\mathbb{E}[Y_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \mathbb{P}(Y_n = 0)$, $b_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$, $c_n = \mathbb{P}(Y_n = 2)$ et $d_n = \mathbb{P}(Y_n = 3)$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{2}{3}(b_n + c_n)$.
6. En déduire la convergence et la limite des suites (b_n) et (c_n) .
7. Montrer que la suite (a_n) et la suite (d_n) sont croissantes. Montrer qu'elles convergent.
8. À l'aide de la question 4, montrer que (d_n) converge vers $\frac{1}{3}$. Quelle est la limite de la suite (a_n) ? Interpréter le résultat.
9. On note T le numéro de la première urne ne contenant que des boules rouges ou que des boules blanches.
 - a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(T > n)$.
 - b. En déduire la loi de T et son espérance.

[Corrigé](#)

Planche 18
Agro-Véto 2023
(sujet 0)**Question de cours.**

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ et ne s'annulant pas, que veut dire la phrase “ f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ ” ?

Exercice (avec préparation).

1. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = xf(x).$$

- a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 - b. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $g'(x)$ pour tout réel x .
 - c. La fonction g est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?
2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et la fonction f définie à la question 1 :

$$F = \text{Vect}(f_0, f_1, f).$$

Prouver que (f_0, f_1, f) est une base de F .

3. Pour toute fonction φ de F , on note $\Phi(\varphi)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x\varphi(x)$.
- a. Montrer que l'application $\Phi : \varphi \mapsto \Phi(\varphi)$ est linéaire.
 - b. Vérifier que $\Phi(f_0) = f_0$, $\Phi(f_1) = 2f_1$ et calculer $\Phi(f)$.
 - c. En déduire que Φ est un endomorphisme de F et préciser sa matrice dans la base (f_0, f_1, f) .
 - d. L'endomorphisme Φ est-il bijectif de F vers F ? Si oui, préciser la matrice de Φ^{-1} dans la base (f_0, f_1, f) .
 - e. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Corrigé

Planche 19
Agro-Véto 2023
(sujet 0)

Question de cours.

Énoncer le théorème central limite.

Exercice (avec préparation).

On considère les matrices carrées à coefficients réels de la forme :

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

Notons f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est $M(a)$.

1. Déterminer le rang de la matrice $M(a)$ selon les valeurs de a .
2. Justifier que 0 et 1 sont des valeurs propres de f_a .
3. Déterminer une base du noyau de f_a selon les valeurs de a .
4. Montrer que $e_1 + e_3$ est un vecteur propre de f_a . En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_a selon les valeurs de a . f_a est-il diagonalisable?
5. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

- a. On s'intéresse à l'ensemble F des matrices qui commutent avec A :

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- b. On considère l'application définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ Q &\mapsto (Q(\lambda_1), Q(\lambda_2), Q(\lambda_3)) \end{aligned}$$

Montrer que g est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

- c. Après avoir justifié qu'il existe une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, montrer que

$$M \in F \Leftrightarrow CD = DC \text{ où } C = P^{-1}MP.$$

- d. Déterminer les matrices qui commutent avec D . En déduire que $M \in F$ si et seulement s'il existe c_1, c_2, c_3 des réels tels que :

$$M = P \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- e. A l'aide de la question 5.b, conclure que les matrices qui commutent avec A sont exactement les matrices M de la forme $Q(A)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.

- f. Dans le cas particulier où $A = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, établir qu'une base de F est (I_3, A, A^2) .

Corrigé

Planche 20
Agro-Véto 2023
(sujet 0)
Question de cours.

Allure de la représentation de la fonction cos sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Exercice (avec préparation).

Tous les vecteurs et toutes les matrices de cet exercice sont à coefficients réels

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre $n \geq 1$ dont les éléments diagonaux sont $(d_1, \dots, d_n)$.

a. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne. Vérifier que $X^T D X = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$.

b. En déduire que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs si et seulement si $X^T D X > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère les vecteurs

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que U_1 est un vecteur propre de A .

b. Montrer que l'ensemble des vecteurs X tels que $AX = X$ est un sous-espace propre de A et que ce sous-espace propre admet pour base orthonormée (U_2, U_3) .

c. Déterminer une matrice P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^2P^{-1}$ et $P^T P = I_3$.

d. En déduire qu'il existe une matrice inversible M telle que $A = MM^T$.

e. Vérifier que $C = M^{-1}B(M^{-1})^T$ est une matrice symétrique. En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ et une matrice orthogonale Q telles que $B = MQ\Delta(MQ)^T$.

On pose $R = MQ$. On a ainsi $B = R\Delta R^T$.

f. Calculer RR^T .

3. On conserve les hypothèses et les notations de la question 2. On suppose de plus que $X^T A X > X^T B X$ pour tout vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

a. Donner une matrice diagonale S dépendant de la matrice Δ telle que $Y^T S Y > 0$ pour tout vecteur non nul Y de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b. En déduire que les coefficients diagonaux de Δ sont tous strictement inférieurs à 1.

[Corrigé](#)

Planche 21
Agro-Véto 2023
(sujet 0)
Question de cours.

Si $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $(B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ désignent deux matrices carrées d'ordre n , et $C = AB$, rappeler pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ l'expression de $C_{i,j}$ en fonction des coefficients de A et de B .

Exercice (avec préparation).

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On tire successivement une boule dans l'urne puis :

- si on tire une boule blanche, on remet la boule blanche dans l'urne ainsi qu'une autre boule blanche
- si on tire une boule noire, on remet la boule noire dans l'urne et le jeu s'arrête.

On suppose que les boules sont indiscernables au toucher. On note N le nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

On considère aussi une famille de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, toutes indépendantes de N , et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$.

Par exemple, si $N = 2$, alors $T = \max(X_1, X_2)$; si $N = 4$, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$.

1. a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{k(k-1)}$.
 b. La variable N admet-elle une espérance ?
2. a. Si U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, montrer que $-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ .
 b. Écrire une fonction Python `T` prenant en argument un réel strictement positif ℓ et qui simule la variable T avec ℓ pour valeur de λ .
 c. Estimer à l'aide de Python l'espérance de T pour $\lambda = 1$.
3. Soit $x \in [0, 1[$.
 a. Montrer que, pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$.
 b. En déduire que $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt$.
 c. Par encadrement, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt = 0$ puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.
 d. Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{x^k}{k(k-1)}$ converge et que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k(k-1)} = \varphi(x)$ où φ est la fonction définie sur $[0, 1[$ par $\varphi(x) = x + (1-x) \ln(1-x)$.
4. Soient $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\mathbb{P}_{[N=k]}(T \leq x)$ puis en déduire que $\mathbb{P}(T \leq x) = \varphi(F(x))$ où F est la fonction de répartition de X_1 .
5. On admet que T est une variable à densité. Montrer qu'une densité de T est donnée par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

6. Justifier que T admet une espérance puis calculer $\mathbb{E}(T)$. Est-ce cohérent avec la conjecture effectuée à la question 2.c ?

[Corrigé](#)

Planche 22
Agro-Véto 2023
(sujet 0)
Question de cours.

Définition de la distance d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

Exercice (avec préparation).

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $\forall x \in [0, 1], f(x) = \frac{1}{3}(-e^{-x} + \ln(1+x^2))$.

1. a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, et déterminer f' et f'' . Donner une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $A = (a, f(a))$ où $a \in [0, 1]$.
 b. Montrer que : $\forall x \in [0, 1], f'(x) \geq \frac{e^{-1}}{3}$ et $|f''(x)| \leq 1$.
 c. Montrer qu'il existe un unique réel ℓ de $]0, 1[$ tel que $f(\ell) = 0$.
2. Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$ tel que $a \neq b$. On pose φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \varphi(x) = f(a) - f(x) - (a-x)f'(x) - \frac{1}{2}(a-x)^2\gamma,$$

où γ est un réel tel que $\varphi(b) = 0$.

- a. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et donner φ' .
- b. Justifier l'existence d'un réel c compris strictement entre a et b tel que $\varphi'(c) = 0$.
- c. En déduire qu'il existe un réel c compris strictement entre a et b tel que :

$$f(b) = f(a) - (a-b)f'(b) - \frac{1}{2}(a-b)^2f''(c).$$

3. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de réels définie par $u_0 \in]0, 1[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

On admet que si $u_0 \neq \ell$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq \ell$, où ℓ est le réel défini en question 1.c.

- a. Écrire une fonction suite en Python, prenant en entrée a et un entier n et renvoyant la liste des valeurs de $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ quand $u_0 = a$. Compiler ce programme pour les valeurs suivantes de a : 0.3, 0.5 et 0.8 et pour $n = 12$. Que pouvez-vous conjecturer ?
- b. Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un réel z_n compris entre ℓ et u_n tel que :

$$u_{n+1} - \ell = \frac{(u_n - \ell)^2}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(u_n)}.$$

- c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{3e}{2}\right)^{2^n-1} |u_0 - \ell|^{2^n}$.

- d. Dans cette dernière question, on suppose que $|u_0 - \ell| \leq \frac{2}{10}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Donner une valeur de n à partir de laquelle u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près, puis à 10^{-5} près.

Corrigé

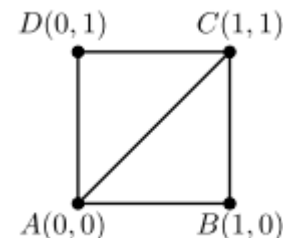
Planche 23
Agro-Véto 2023
(sujet 0)
Question de cours.

Pour une application $f : E \longrightarrow F$ bijective de E vers F , définition de la fonction réciproque f^{-1} .

Exercice (avec préparation).

On considère une particule se déplaçant aléatoirement sur les arêtes de la figure ci-contre délimitée par les points $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ et $D(0, 1)$. À l'instant $n = 0$, elle se situe en A et à chaque étape, elle se déplace aléatoirement et de manière équiprobable vers l'un des sommets qu'elle peut atteindre en une étape.

Par exemple, du point A , la particule peut aller en B , C ou D mais du point D , elle ne peut aller qu'en A ou C (et pas en B).



Pour tout entier naturel n , on note respectivement A_n, B_n, C_n et D_n les événements : “À l'instant n , la particule se situe en A (resp. en B , en C , en D)”. On note enfin pour tout entier naturel n : $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$, $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ et $d_n = \mathbb{P}(D_n)$.

1. Écrire une fonction Python **positionA(n)** permettant de simuler cette expérience et qui renvoie la fréquence de passage de la particule au point A jusqu'à l'étape n . Estimer ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et d_n .
3. Étude des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - a. En remarquant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = b_n$, démontrer que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et déterminer b_n en fonction n .
 - b. En déduire l'expression de $a_{n+1} + c_{n+1}$ en fonction de n .
 - c. Montrer que la suite $(a_n - c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et en déduire son expression en fonction de n .
 - d. En déduire les expressions de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de n .
4. Soient maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n et Y_n des variables aléatoires réelles correspondant respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée de la particule à l'instant n .
 - a. Déterminer les lois de ces variables aléatoires.
 - b. X_n et Y_n sont-elles indépendantes?
 - c. Déterminer $\text{Cov}(X_n, Y_n)$.

5. Pour tout entier naturel n , on note maintenant $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

- a. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.
- b. On admet que $M^4 - \frac{7}{9}M^2 - \frac{2}{9}M = 0$. En déduire que chaque valeur propre λ de M vérifie $\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0$.
- c. Justifier que M est diagonalisable puis la diagonaliser.
- d. Proposer alors une démarche (sans détailler les calculs) pour retrouver le résultat de la question 3.

Corrigé

Planche 24
Agro-Veto 2022
Question de cours.

Existence et unicité du projeté orthogonal.

Exercice.

Un magasin possède une caisse, toutes les personnes qui sortent du magasin doivent passer par cette caisse y compris si le client n'achète pas d'article. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire réelle égale au nombre d'articles achetés par le k -ème client. On suppose que ces variables sont mutuellement indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètre μ . On note N le nombre aléatoire de clients qui passent par la caisse au cours de la première heure, N suit une loi de Poisson de paramètre λ et est indépendante des X_k . On souhaite étudier le nombre X d'articles passant par cette caisse durant la première heure.

1. Exprimer X en fonction de N et des X_i .
2. Écrire une fonction Python `X` qui prend en entrée `l` pour λ et `m` pour μ et qui simule la variable aléatoire X .
On pourra pour cela utiliser la fonction `poisson` du module `numpy.random`.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}_{[N=0]}(X = n)$.
4. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $X_1 + \dots + X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $k\mu$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k! n!} e^{-(\lambda+k\mu)}$.
6. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \lambda\mu$. On admettra l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et on pourra procéder sans justification à une permutation de deux sommes infinies.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{\lambda(e^{-\mu}-1)} \text{ et } \mathbb{P}(X = n) = \frac{\mu^n e^{-\lambda}}{n!} f_n(\lambda e^{-\mu})$$

où $f_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^n \frac{x^k}{k!}$. On pose aussi $f_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

8. Exprimer f_0 et f_1 à l'aide de fonctions usuelles.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{n+1}(x) = x + \sum_{i=0}^n x \binom{n}{i} f_i(x).$$

Indication : On pourra utiliser le changement de variables $\ell = k - 1$.

10. En déduire une expression de la fonction f_2 .
11. Écrire une fonction `f` qui prend en entrée un entier `n` et un réel `x` et qui renvoie la valeur $f_n(x)$. On pourra utiliser la fonction `binom` du module `scipy.special`.
12. Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction Python qui prend en entrée deux réels λ et μ et un entier n et qui renvoie $\mathbb{P}(X = n)$. On pourra utiliser la fonction `factorial` du module `scipy.special`.

[Corrigé](#)

Planche 25
Agro-Veto 2022
Question de cours.

Définition de la liberté d'une famille de vecteurs.

Exercice.**Rappel : Algorithme de dichotomie.**

Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un réel α . On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k , on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et :
 - si $f(a_k)f(c_k) < 0$ alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
 - sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$.

On sait alors que les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ convergent toutes deux vers α .

On étudie dans cet exercice, pour tout entier naturel n non nul, les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation

$$(E_n) : \ln x + x = n.$$

À cet effet, on introduit la fonction $f : x \mapsto \ln x + x$.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , l'équation (E_n) admet une unique solution, notée x_n .
 b. En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes x_n pour n allant de 1 à 10, et les représenter graphiquement.
 c. Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (on pourra comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$).
2. a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln x < x$.
 b. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{2} \leq x_n \leq n$.
 c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
3. a. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0$. En déduire un équivalent de x_n .
 b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n$.
4. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n - x_n}{\ln n}$.
 a. Exprimer $u_n - 1$ en fonction de x_n et n . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 b. En déduire que $1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
 c. En déduire que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

[Corrigé](#)

Planche 26
Agro-Veto 2022**Question de cours.**

Matrice d'une composée d'applications linéaires.

Exercice.

On considère une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec probabilité $q = 1 - p$.

Soit n un entier non nul fixé.

On considère n joueurs qui lancent chacun la pièce jusqu'à obtenir Pile. Le(s) gagnant(s) sont désignés comme ceux qui ont fait le moins de lancers.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose X_i le nombre de lancers du i -ième joueur, et on note N le nombre de gagnants.

1. Quelle est la loi de X_i , pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$?

Rappeler son espérance et sa variance.

2. Calculer pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_i > j)$.

3. On note $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Calculer $\mathbb{P}(Y > j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de Y , son espérance et sa variance.

4. Écrire une fonction Python **NbMin(L)** prenant en argument une liste **L** et renvoyant le nombre de fois où la valeur minimale apparaît dans la liste **L**.

5. En déduire une fonction Python **N(n,p)** qui, prenant en argument la valeur de n et p , simule l'expérience aléatoire décrite et renvoie la valeur de N .

6. Calculer $\mathbb{P}(N = n)$.

7. Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1 - q^n}.$$

8. En déduire l'espérance de N et la variance de N .

9. Vérifier la valeur de $\mathbb{E}(N)$ à l'aide d'estimations construites grâce à la fonction **N** de la question 5.

Corrigé

Planche 27
Agro-Veto 2022
Question de cours.

À quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

Exercice.

On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel que l'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

1. a. Montrer que A est diagonalisable.
- b. Que permet le programme suivant ?

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A= np.array ([[5/2 ,1 ,1/2] , [1 ,2 ,1] , [1/2 ,1 ,5/2]])
I= np.eye (3)
r= al.matrix_rank (A - I)
s= al.matrix_rank (A - 2* I)
t= al.matrix_rank (A - 4* I)
```

- c. À l'aide de Python, déterminer une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .
 - d. Pourquoi cette base est-elle orthogonale ?
 - e. Proposer une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f . On notera $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ cette base.
2. On considère l'application ϕ définie sur E^2 par :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \phi(u, v) = \langle u, f(v) \rangle.$$

- a. Soit u (resp. v) un vecteur de E de coordonnées X (resp. Y) dans $\mathcal{B}$.
 - (i) Exprimer $\phi(u, v)$ en fonction de A , X et Y .
 - (ii) Exprimer $\phi(v, u)$ en fonction de A , X et Y .
 - (iii) Montrer que $\phi(u, v) = \phi(v, u)$.
- b. On note pour tout $u \in E$, F_u l'ensemble des vecteurs orthogonaux à u et :

$$F'_u = \{v \in E \mid \phi(u, v) = 0\}.$$

- (i) Montrer que si u est un vecteur propre de f , alors $F_u = F'_u$.
- (ii) A-t-on toujours $F_u = F'_u$?

Corrigé

Planche 28
Agro-Veto 2022
Question de cours.

Pour n et k entiers naturels, donner l'expression du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Exercice.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur cet espace suivant la loi normale centrée réduite. On note φ la fonction densité continue de X , Φ sa fonction de répartition, f la fonction $x \mapsto \mathbb{P}(X > x)$ et (E) l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + xy(x) = 0.$$

On considère la fonction M définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, M(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) . Montrer que φ est solution de (E) .
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t} dt$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$. Déterminer la limite de M en $+\infty$.
4. a. Montrer que f est dérivable et exprimer sa fonction dérivée f' en fonction de φ .
 b. Montrer que M est dérivable. Calculer sa dérivée M' à l'aide des fonctions f et φ . En déduire le sens de variation de M sur $\mathbb{R}^+$.
5. a. Écrire un script Python permettant d'afficher sur un même graphique les courbes des fonctions $x \mapsto M(x)$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ sur l'intervalle $[1, 5]$.
 Pour calculer $f(x)$, on pourra utiliser la fonction `norm.sf()` du module `scipy.stats`.
 b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\varphi(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{\varphi'(t)}{t^3} dt.$$

- c. Montrer que pour $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \leq M(x) \leq \frac{1}{x}$$

Indication : on pourra intégrer une deuxième fois par parties.

En déduire un équivalent de $M(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Corrigé

Planche 29
Agro-Veto 2022
Question de cours.

Stabilité des lois de Poisson par la somme.

Exercice.

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^1 [(1-x)e^x]^n dx$.

1. Justifier que la suite (I_n) est ainsi bien définie, et calculer I_0 et I_1 .

2. a. Justifier que pour tout entier naturel n ,

$$I_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\left(1 - \frac{k}{N} \right) e^{k/N} \right]^n.$$

b. Écrire alors une fonction en Python qui prend en argument un entier n et renvoie une valeur approchée de I_n .

c. Utiliser la fonction précédente pour établir une conjecture sur la limite éventuelle de $\sqrt{n}I_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. a. Démontrer que pour tout réel x , $e^{-x} \geq 1 - x$.

b. Étudier les variations de la suite (I_n) .

4. Pour tout réel $x \in]0, 1[$, on pose $H(x) = -\frac{2}{x^2}(x + \ln(1-x))$.

a. Démontrer que la fonction H est prolongeable par continuité en 0.

On notera encore H son prolongement, et on admet que H réalise une bijection croissante de $[0, 1[$ vers $[1, +\infty[$.

b. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 \exp\left(-n \frac{x^2}{2} H(x)\right) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2} H\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) du.$$

c. Donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$, et en déduire que pour tout entier naturel non nul n , $I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels appartenant à $[0, 1[$ qui converge vers 0, et telle que la suite $(\sqrt{n}u_n)$ diverge vers $+\infty$.

a. Donner un exemple d'une telle suite.

b. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = H(u_n)$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq \int_0^{u_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(u_n)\right) dx \geq \frac{1}{\sqrt{nv_n}} \int_0^{\sqrt{nv_n}u_n} e^{-u^2/2} du.$$

c. En déduire que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

[Corrigé](#)

Planche 30
Agro-Veto 2022
Question de cours.

Donner deux expressions de la dérivée de la fonction tangente.

Exercice.

Soient a_1, a_2 et a_3 trois réels distincts. Soit A la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on pose :

$$s_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 a_j, \quad p_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 a_j \quad \text{et} \quad d_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (a_i - a_j).$$

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3 et renvoie la matrice A , sous forme de liste de listes.
2. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier i et une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3 , et renvoie une liste contenant les valeurs de s_i, p_i et d_i .
3. Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_3)).$$

- a. Démontrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
 - b. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique $\mathbb{R}_2[X]$, et $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer la matrice représentative de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
 - c. Déterminer le noyau de φ et en déduire que φ admet une réciproque, notée φ^{-1} .
4. Pour tout entier $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on pose : $L_i(X) = \frac{1}{d_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (X - a_j)$.
 - a. Démontrer que : $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, L_i = \varphi^{-1}(e_i)$.
 - b. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la matrice A est inversible, et déterminer A^{-1} .
(On exprimera les coefficients de A^{-1} en fonction des réels s_i, p_i et d_i .)
 - c. Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste contenant les valeurs de a_1, a_2 et a_3 et renvoie la matrice A^{-1} , sous forme de liste de listes. Appliquer cette fonction avec $a_1 = 2, a_2 = 3$ et $a_3 = 4$.

Corrigé

Planche 31
Agro-Veto 2022
Question de cours.

Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $T = \max(X, Y)$ et $W = \frac{1}{T}$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de la variable aléatoire W .

- Justifier que la fonction Python écrite ci-dessous permet de renvoyer un nombre de façon aléatoire en suivant la loi exponentielle de paramètre 1 :

```
import numpy as np

def expo() :
    return -np.log(random())
```

- Écrire un script en langage Python qui permette de conjecturer l'existence et la valeur de l'espérance de W .
- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T . Démontrer alors que T admet une densité, et déterminer une de ses densités.
- Démontrer que la variable aléatoire W admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$$

converge.

- Justifier que pour tout réel u , $e^u \geq 1 + u$.
 - En déduire que : $\forall t > 0, 0 \leq \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \leq e^{-t}$.
 - Démontrer que l'intégrale I est convergente.
- À l'aide du changement de variables, $u = 2t$, démontrer que :

$$\forall x > 0, \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

On admettra que les deux intégrales de l'égalité sont bien convergentes.

- Démontrer alors que $I = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
- En utilisant le théorème des gendarmes, démontrer que l'espérance de W vaut $2 \ln(2)$.

Corrigé

Planche 32
Agro-Veto 2022
Question de cours.

Formule de Bayes.

Exercice.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant N boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N .

On procède à des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule dans l'urne avant le tirage suivant.

On note pour tout $k \geq 1$, X_k le numéro obtenu au k -ème tirage, et Z_k le nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

1. a. Écrire une fonction Python **NbDiff(L)** prenant en argument une liste L et qui renvoie le nombre d'éléments distincts présents dans cette liste.
 b. Écrire une fonction Python **Z(N,k)** qui, prenant en arguments les valeurs de N et k , renvoie une simulation de Z_k .
 c. Estimer l'espérance de Z_k à l'aide de votre programme, et conjecturer son comportement lorsque :
 (i) $N = 10$ et $k \rightarrow +\infty$
 (ii) $k = 10$ et $N \rightarrow +\infty$
 (iii) $N = k$ et $N \rightarrow +\infty$
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1 et la loi de la variable aléatoire Z_2 .
 En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.
3. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
 a. Déterminer $\mathbb{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathbb{P}(Z_k = k)$.
 b. Montrer, pour tout $\ell \in \llbracket 1, N \rrbracket$: $\mathbb{P}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{N} \mathbb{P}(Z_k = \ell) + \frac{N-\ell+1}{N} \mathbb{P}(Z_k = \ell - 1)$.
 c. En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{N-1}{N} \mathbb{E}(Z_k) + 1$.

4. Montrer alors que :

$$\forall k \geq 1, \mathbb{E}(Z_k) = N \left(1 - \left(\frac{N-1}{N} \right)^k \right).$$

5. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Z_k)$ dans les trois cas suivants, en comparant avec vos résultats numériques de la question 1.c.
- a. lorsque N est fixé et $k \rightarrow +\infty$
 - b. lorsque k est fixé et $N \rightarrow +\infty$
 - c. lorsque $N = k$ et $N \rightarrow +\infty$

Corrigé

Planche 33
Agro-Véto 2021**Question de cours.**

Espérance et variance d'une variable aléatoire de la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

Exercice.

Pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_a(x) = \langle x, a \rangle$$

1. Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f_a est une application linéaire.
2. Etude d'un exemple. On pose dans cette question (uniquement) : $a = (1, 2, \dots, n)$.
Expliciter f_a et donner une base de son noyau.
Quelle est la dimension de $\text{Ker}(f_a)$?
3. Pour a et b dans $\mathbb{R}^n$, montrer que : $f_a = f_b \iff a = b$.
4. Lorsque $a \neq 0$, quel est le rang de f_a ? En déduire la dimension de $\text{Ker}(f_a)$ lorsque $a \neq 0$.
5. On note $a = (a_1, \dots, a_n)$. Écrire la matrice de f_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et retrouver les résultats des questions 3 et 4.
6. Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Montrer : $x = y \iff \forall a \in \mathbb{R}^n, f_a(x) = f_a(y)$
7. Soient a et x deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Écrire un programme Python qui calcule $f_a(x)$ et qui teste si un vecteur x est dans le noyau de f_a .
8. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = f_a$ et que ce a est donné par $a = \sum_{k=1}^n g(e_k) e_k$.
9. On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On admet que cet ensemble, muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un réel, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
 - (a) Montrer que $\phi : a \mapsto f_a$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
 - (b) En déduire que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est de dimension finie, préciser sa dimension et donner une base.

[Corrigé](#)

Planche 34
Agro-Véto 2021
Question de cours.

Stabilité des lois binomiales par la somme.

Exercice.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z).$$

On considère aussi l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose en outre $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = g(e_1) + e_1$.

1. a. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
 b. À l'aide de Python, déterminer les valeurs propres de g et conjecturer la dimension de chaque sous-espace propre de f . L'endomorphisme f semble-t-il diagonalisable ?
On pourra se servir de la commande `np.linalg.eig(A)` après l'importation `import numpy as np`.
2. a. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 b. Déterminer la matrice T de g dans $\mathcal{C}$.
 c. En déduire les valeurs propres de g . L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

3. On note

$$E = \{M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \mid AM = MB\}.$$

- a. Écrire une fonction Python d'en-tête `E(M)` qui retourne `True` si M est dans E , et `False` sinon. *On rappelle que, si N est une matrice contenant des booléens, l'instruction `N.all()` renvoie `True` si N ne contient que des `True` et renvoie `False` sinon.*
- b. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- c. Montrer, par l'absurde, que si M est dans E alors elle n'est pas inversible.
- d. Montrer que $\text{Sp}(B) = \text{Sp}(B^T)$.
- e. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A associée à la valeur propre 2 et si $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de B^T associée à la valeur propre 2, alors $XY^T \in E$.
- f. En déduire que $\dim E \geq 2$.

Corrigé

Planche 35
Agro-Véto 2021**Question de cours.**

Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice.

On note n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\| \cdot \|$. Soient u et v deux vecteurs de norme 1. On note f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall w \in E, f(w) = \langle w, u \rangle v + \langle w, v \rangle u.$$

1.
 - a. Écrire une fonction Python `ps` qui prend en argument deux vecteurs u et v sous forme de listes et renvoie la valeur du produit scalaire $\langle v, u \rangle$.
 - b. Écrire une fonction Python `f` qui prend en argument trois vecteurs u , v et w sous forme de listes et renvoie le vecteur $f(w)$ sous forme de liste lui-aussi.
2. On suppose **uniquement dans cette question** que u et v sont colinéaires.
 - a. Montrer que, pour tout $w \in E$, $f(w) = \pm 2\langle w, u \rangle u$.
 - b. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u)$.
 - c. Montrer que u est un vecteur propre de f et déterminer sa valeur propre associée.
 - d. En déduire que f est diagonalisable.
3. On suppose désormais que u et v sont non colinéaires.
 - a. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u, v)$.
 - b. En déduire la dimension de $\text{Ker } f$.
4. On suppose **uniquement dans cette question** que u et v sont orthogonaux.
 - a. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2})$ une base orthonormée de $\text{Ker } f$. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2})$ est une base orthonormée de E .
 - b. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}$.
 - c. En déduire que f est diagonalisable.
5. On revient au cas général (où u et v sont non colinéaires, mais pas nécessairement orthogonaux).
 - a. Soit $(w_1, \dots, w_{n-2})$ une base de $\text{Ker } f$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w_1, \dots, w_{n-2})$ est une base de E .
 - b. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
 - c. En déduire que f est diagonalisable.

Corrigé

Planche 36
Agro-Véto 2021
Question de cours.

Rappeler les deux expressions de la dérivée de la fonction $\tan$.

Exercice.

On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On s'intéresse au rang du premier lancer auquel on obtient pour la première fois la succession des résultats "Pile, Pile, Face", dans cet ordre. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient cette configuration. Si celle-ci n'est jamais obtenue, on conviendra que X vaut -1 . Par exemple, si on obtient dans cet ordre : "Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face", alors X prend la valeur 7. Pour tout entier naturel n non nul, on pose F_n : "on obtient Face au n -ème lancer" et P_n : "on obtient Pile au n -ème lancer". Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on pose :

- B_n l'événement défini par $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$
 - U_n l'événement défini par $U_n = \bigcup_{k=3}^n B_k$
 - $u_n = \mathbb{P}(U_n)$
1. a. Écrire une fonction Python sans argument qui simule les lancers de dé jusqu'à l'apparition de la séquence "Pile, Pile, Face" et qui renvoie sous forme de liste les résultats de tous les lancers réalisés.
 b. Utiliser la fonction précédente pour émettre une conjecture quant à l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X .
 2. a. Pour tout entier naturel $n \geq 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$ et justifier que les événements B_n , B_{n+1} et B_{n+2} sont deux-à-deux incompatibles.
 b. Calculer u_3 , u_4 et u_5 et démontrer que : $\forall n \geq 3, u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_n$.
 c. Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = -1)$.
 3. On admettra dans cette question le résultat suivant : pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, si la série de terme général $\mathbb{P}(Y > n)$ converge, alors Y admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y > n).$$

Pour tout entier naturel n , on note $v_n = \mathbb{P}(X > n)$.

- a. Donner la valeur de v_0 , v_1 , v_2 et v_3 .
- b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} - v_{n+3} = \frac{1}{8}v_n$.
- c. Montrer que X admet une espérance et déterminer cette espérance.

Corrigé

Planche 37
Agro-Véto 2021
Question de cours.

Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

Exercice.

On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f et g , alors $X + Y$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité h est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

On s'intéresse à une modélisation du temps de présence de nouvelles espèces qui apparaissent entre les instants 0 et $\theta > 0$ dans un milieu donné. À chaque nouvelle espèce (e), on associe deux variables aléatoires :

- l'instant X_e d'apparition qui est une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, \theta]$.
- sa durée de vie Y_e dans le milieu qui est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1 et indépendante de la précédente.

1. On s'intéresse à une espèce (e).

- a. Que représente $X_e + Y_e$?
- b. Déterminer une densité de $X_e + Y_e$.
- c. Pour tout $t > 0$, on pose $p = \mathbb{P}(X_e + Y_e > \theta + t)$. Montrer que $p = \frac{1 - e^{-\theta}}{\theta} e^{-t}$.

2. On suppose que les variables aléatoires associées aux différentes espèces sont mutuellement indépendantes et on note N le nombre aléatoire d'espèces qui apparaissent. On suppose que N est indépendante des variables aléatoires associées aux espèces et que N suit la loi de Poisson de paramètre μ . Pour tout $t > 0$ on note Z_t le nombre d'espèces, parmi celles qui sont apparues, qui sont encore présentes dans le milieu à l'instant $\theta + t$.

- a. Écrire un programme Python `Esp2Zt(theta,mu,t)` qui calcule et renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(Z_t)$. On rappelle qu'après avoir importé le module `numpy.random`, l'instruction `rand()` (respectivement `poisson(a)` et `exponential(b)`) renvoie une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ respectivement de loi de Poisson de paramètre a et de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de Z_t sachant $N = n$.
- c. En déduire que Z_t suit la loi de Poisson de paramètre μp . Vérifier la cohérence de ces résultats avec les valeurs obtenues avec le programme de la question 2.a pour $\theta = 6$, $\mu = 16$, $t = 4$ et $\theta = 6$, $\mu = 30$, $t = 7$.

3. On admet dans la suite que $W_t = N - Z_t$ suit la loi de Poisson de paramètre $\mu(1 - p)$ puis que Z_t et W_t sont indépendantes.

- a. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{W_t + 1}\right) = \frac{1 - e^{-\mu(1-p)}}{\mu(1-p)}$ puis calculer $\mathbb{E}\left(\frac{Z_t}{W_t + 1}\right)$ en fonction de μ et p .
- b. Montrer que, pour tout $a \in]0, 1[$:

$$\mathbb{P}(Z_t \geq aN) = \mathbb{P}\left(\frac{(1-a)Z_t + a}{W_t + 1} \geq a\right)$$

$$\text{puis en déduire que } \mathbb{P}(Z_t \geq aN) \leq \frac{(1-a)\mu p + a}{a\mu(1-p)}.$$

- c. On suppose que $\mu = \theta^2$. Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 2[$, $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(Z_{\ln \theta} \geq \frac{N}{\theta^\alpha}\right) = 0$.

Corrigé

Planche 38
Agro-Véto 2021**Question de cours.**

Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice.

Deux amis Anna et Benoît jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel X . Si cet entier X est impair, Anna donne X euros à Benoît, et on considère que Benoît a gagné. Si X est nul, on considère que la manche est nulle. Si X est pair non nul, Benoît donne X euros à Anna, et on considère que Anna a gagné. On pose G le gain algébrique de Anna. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre a ($a > 0$). On note enfin :

- A : “Anna gagne”, $p = \mathbb{P}(A)$
- B : “Benoît gagne”, $q = \mathbb{P}(B)$
- C : “la manche est nulle”, $r = \mathbb{P}(C)$

1. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire G . *On rappelle que `np.random.poisson(a)` permet de simuler une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre a .*
2. a. Déterminer r et exprimer p et q sous forme d'une somme.
b. Exprimer $p + q$ et $p - q$ en fonction de a .
c. En déduire les valeurs de p et q en fonction de a .
3. Compléter le programme de la question 1 afin qu'il permette de donner une estimation de la valeur de l'espérance du gain d'Anna d'une part, et de la probabilité pour Anna de gagner d'autre part.
4. D'après les simulations effectuées, d'après vous, à qui le jeu donne-t-il l'avantage ? *On pourra tester les valeurs de gain et la probabilité qu'Anna gagne pour $a = 2$.*
5. a. Exprimer G en fonction de X .
b. Calculer l'espérance du gain G d'Anna.
6. On suppose désormais que X suit une loi géométrique de paramètre $\alpha \in]0, 1[$ (on conserve les notations précédentes).
a. Déterminer p , q et r .
b. Calculer $\mathbb{E}(G)$ après avoir justifié son existence.
c. Comment interpréter le signe de G ?

Corrigé

Planche 39
Agro-Véto 2021**Question de cours.**

Donner deux conditions suffisantes et non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

Exercice.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

- a. Montrer que $Y = X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
- b. En déduire que X admet une espérance et une variance et préciser leur valeur.
- c. Écrire un programme Python renvoyant une simulation de la variable aléatoire X .
- d. Montrer que, pour tout réel $s \in [0, 1]$, la variable aléatoire s^X admet une espérance et montrer que $\mathbb{E}(s^X) = \frac{1}{2-s}$.

On notera dans toute la suite f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $\forall s \in [0, 1], f(s) = \frac{1}{2-s}$.

2. On considère une population qui évolue de génération en génération. On part de $Z_0 = 1$ individu et on note, pour tout $n \geq 1$, Z_n le nombre d'individus à la n -ème génération, supposant que les individus de la $(n-1)$ -ème génération meurent après avoir donné naissance. À chaque génération $n \in \mathbb{N}$, on suppose que chaque individu i engendre une portée d'individus de la génération suivante, de taille $X_{n+1,i}$, suivant la même loi que X , et indépendamment du nombre de descendants des autres individus existants (ou ayant existé auparavant).
- a. Écrire une fonction Python qui, prenant un entier n en entrée, simule l'expérience, et renvoie la liste $[Z_0, Z_1, \dots, Z_n]$ des nombres de descendants de la population jusqu'à la n -ème génération. Conjecturer le comportement de la population au cours d'un grand nombre de générations.
 - b. On note, pour tout $n \geq 0$, $u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité que la population soit éteinte à la génération n . Justifier que la suite (u_n) est convergente vers un réel qu'on notera ℓ .
 - c. Préciser la valeur de u_1 et vérifier que $u_1 = f(u_0)$.
 - d. Calculer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0)$. En déduire que $u_2 = f(u_1)$.
 - e. Démontrer plus généralement que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
 - f. En déduire la valeur de ℓ .

Corrigé

Planche 40
Agro-Véto 2021**Question de cours.**

Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice.

Rappel : la méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant, de proche en proche, l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point :

en tout point a , $\varphi(a+h) \approx \varphi(a) + h\varphi'(a)$ lorsque h est petit (positif ou négatif).

Soit $I =]1, +\infty[$. On considère l'équation différentielle (E) :

$$\forall t \in I, -t^2 y'(t) + ty(t) = (y(t))^2,$$

d'inconnue une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de (E) .

1. a. Montrer que $f : t \mapsto \frac{t}{\ln(t)}$ est solution de (E) sur $]1, +\infty[$.
b. L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un espace vectoriel ?
c. Représenter en Python la fonction f sur $[2, 4]$.
2. On cherche une solution y de l'équation différentielle (E) vérifiant $y(e) = 3$. Sous réserve d'existence de y , utiliser la méthode d'Euler pour représenter en Python un tracé approximatif de la courbe représentative de y sur l'intervalle $[2, 4]$ en partant du point $(e, 3)$. *On pourra tracer successivement une solution sur $[e, 4]$ puis une solution sur $[2, e]$. Comparer avec le graphe obtenu à la question 1.*
3. Déterminer les solutions sur I de l'équation différentielle linéaire (E') :

$$\forall t \in I, t^2 z'(t) + tz(t) = 1,$$

d'inconnue $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

4. Soit y une solution de (E) , qui ne s'annule pas sur tout l'intervalle I . Montrer que $t \mapsto \frac{1}{y(t)}$ est solution de (E') .
En déduire l'expression de y .
5. a. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des fonctions $\mathcal{S}$ qui ne s'annulent pas sur I .
b. A-t-on $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$?
c. Existe-t-il une solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I .

[Corrigé](#)

Planche 41
Agro-Véto 2021
Question de cours.

Énoncer la formule des probabilités totales.

Exercice.

On s'intéresse à une population de saumons et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n le nombre de saumons de l'année n . Selon un modèle d'évolution, on a l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = y_n e^{r(1-\frac{y_n}{p})}$ où p représente la capacité limite du milieu et r est le taux de croissance intrinsèque de la population (p et r sont deux réels strictement positifs).

1. Montrer qu'en posant $b = \frac{r}{p}$, $\alpha = e^r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = by_n$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie alors la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}.$$

Quel est le comportement de (x_n) si $x_0 = 0$? Par la suite, on suppose que $x_0 > 0$.

2. Montrer rapidement que (x_n) ne prend que des valeurs strictement positives.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction $f_\alpha : x \mapsto \alpha x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer les solutions de l'équation $f_\alpha(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$, selon les valeurs de α .
5. a. Écrire une fonction en Python qui prend en arguments un réel x_0 et un réel α et qui représente les termes x_k pour k variant entre 0 et 200. On fera apparaître les points (k, x_k) pour k pair en bleu et ceux pour k impair en rouge. On rajoutera donc l'option `color='blue'` ou `color='red'` pour choisir la couleur du graphe.
 b. Tester votre programme dans le cas où $x_0 = 0,5$. Quel semble être le comportement de la suite pour $\alpha = 4$? Observer le comportement chaotique lorsque $\alpha = 15$.
6. On suppose que $\alpha \in]e, e^2[$.
 - a. On introduit la fonction $g_\alpha : x \mapsto f_\alpha(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$. Étudier le signe de g_α sur $\mathbb{R}_+$.
 - b. Montrer qu'il existe un réel $M \in [0, 1[$ tel que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $|f'_\alpha(x)| \leq M$.
 - c. Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+$. On notera λ_α la solution sur $[0, 1[$ et μ_α celle de $]1, +\infty[$.
 - d. On souhaite montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$. On procède par l'absurde en supposant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$. Montrer que, pour tout entier naturel n , $x_{n+1} \in [0, \lambda_\alpha]$ puis que $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante et convergente. En déduire une contradiction et conclure.
 - e. On admet que $f_\alpha(\alpha e^{-1}) > 1$. Montrer que, pour tout $x \in [1, \mu_\alpha]$, $f_\alpha(x) \in [1, \mu_\alpha]$.
 - f. Soit n_0 un entier naturel tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
 Montrer que $x_{n_0+1} \in [1, \mu_\alpha]$, puis que pour $n \geq n_0 + 1$, $|x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leq M |x_n - \ln(\alpha)|$.
 - g. En déduire que (x_n) converge et préciser sa limite.

Corrigé

Planche 42
Agro-Véto 2021**Question de cours.**

Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire de F dans G .

Exercice.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables à densité, indépendantes, et de même fonction de répartition F , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on ordonne les valeurs $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $Y_k(\omega)$ la k -ème plus petite valeur. On a donc $Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \dots \leq Y_n(\omega)$. En particulier, on a $Y_1(\omega) = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $Y_n(\omega) = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Dans cette question, on suppose que les variables $X_1, \dots, X_n$ suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
 - a. Calculer $\mathbb{P}(Y_1 > x)$ pour tout réel x positif et en déduire la fonction de répartition de Y_1 . Reconnaître une loi usuelle dont on donnera l'espérance et la variance.
 - b. Montrer que si U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1]$ alors $-\frac{1}{\lambda} \ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
 - c. Écrire un programme qui, pour un $n \in \mathbb{N}$ et un $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donnés, permet de simuler la variable aléatoire Y_i lorsque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent indépendamment la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pourra pour cela utiliser l'instruction `B=sorted(A)` qui fournit un tableau `B` contenant les valeurs du tableau `A` rangés dans l'ordre croissant.
2. Exprimer la fonction de répartition de Y_n à l'aide de F .
3. Les variables aléatoires Y_1 et Y_n sont-elles indépendantes ?
4. On souhaite maintenant obtenir la fonction de répartition de Y_i , pour n'importe quel $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On fixe donc i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et x dans $\mathbb{R}$ et on cherche à calculer $\mathbb{P}(Y_i \leq x)$. C'est la probabilité qu'au moins i variables parmi $X_1, \dots, X_n$ soient inférieures ou égales à x .
 - a. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note Z_k la variable telle que $Z_k(\omega) = 1$ si $X_k(\omega) \leq x$ et $Z_k(\omega) = 0$ sinon. Reconnaître la loi de Z_k (on exprimera le(s) paramètre(s) à l'aide de $F(x)$).
 - b. On note $S = \sum_{k=1}^n Z_k$. Que représente S ? Reconnaître sa loi.
 - c. Montrer que $\mathbb{P}(Y_i \leq x) = \mathbb{P}(S \geq i)$ et en déduire l'expression de $\mathbb{P}(Y_i \leq x)$ sous la forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Corrigé

Planche 43
Agro-Véto 2021**Question de cours.**

Énoncer le théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que la variable aléatoire $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$ suit la même loi que X .
4. Écrire un programme Python simulant une réalisation de la variable aléatoire X .
5. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ? Si oui, les calculer, et vérifier vos réponses à l'aide du programme de la question 4.
6. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X . On définit, pour tout entier n non nul, la variable aléatoire T_n par :

$$T_n = \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{n}}.$$

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition de T_n .
- b. Calculer alors pour tout réel x , $G(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n \leq x)$.
- c. On admet que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T à densité. Montrer que T admet pour densité la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- d. À l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{u}$, montrer que T admet une espérance et la déterminer.

Corrigé

Planche 44
Agro-Véto 2021**Question de cours.**

Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a .

Exercice.

On rappelle que si V et W sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f_V et f_W , alors $V + W$ est une variable aléatoire à densité, dont une densité h est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_W(x - t) dt$$

Trois clients, notés A , B et C arrivent simultanément aux deux caisses inoccupées d'un magasin. A et B occupent immédiatement (à l'instant $t = 0$) les deux caisses, C attend la première caisse laissée libre par A ou B . On néglige le temps de changement de personne. On suppose que les durées de passage à une caisse par A , B ou C sont des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$ et notées respectivement X , Y et Z .

1. À l'aide de simulations informatiques en Python, estimer la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.
2. On désigne par la variable aléatoire U le temps attendu par C avant d'être pris en charge à une caisse. Montrer que U admet une densité, puis en donner une.
3. Déterminer l'espérance et la variance de U .
4. On note T le temps total passé aux caisses par C , en comptant son temps d'attente et sa durée de passage à la caisse.
 - a. Exprimer simplement la variable T en fonction des variables précédentes.
 - b. Déterminer la loi de T .
 - c. Déterminer l'espérance de T .
5. On admet que la variable aléatoire $|X - Y|$ a la même densité que U . Déterminer alors la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.

Corrigé

Planche 45
Agro-Véto 2021
Question de cours.

Donner la caractérisation de l'indépendance de variables aléatoires discrètes.

Exercice.

Soient a et b des réels strictement positifs. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{e^{ax-b}}{1 + e^{ax-b}}$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
2. a. Soit U suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. On note $X = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{U}{1-U} \right) + \frac{b}{a}$. Montrer que la variable aléatoire X admet pour fonction de répartition F .
 b. Écrire une fonction en Python permettant de simuler la variable aléatoire X .
3. a. Montrer l'existence et donner la valeur de :

$$\int_0^1 \ln(t) dt \text{ et } \int_0^1 \ln(1-t) dt.$$

- b. Montrer que X admet une espérance égale à $\frac{b}{a}$.
4. On considère le tableau suivant dans lequel les F_i sont des valeurs expérimentales censées être proches des $F(x_i)$.

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2	3
F_i	0,03	0,18	0,62	0,92	0,99

- a. Afficher le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ où $y_i = \ln \left(\frac{F_i}{1-F_i} \right)$. Que remarque-t-on ?
- b. Comment calculer a et b ?
- c. Donner les coefficients de la droite de régression $y = \alpha x + \beta$ par la méthode des moindres carrés.
- d. Le module `numpy` comporte deux fonctions `mean` et `var` permettant de renvoyer respectivement la moyenne et la variance d'une liste de nombres. Écrire en Python une fonction permettant de renvoyer les coefficients a et b .

Corrigé

Planche 46
Agro-Véto 2021
Question de cours.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On note $C = AB$. Donner une expression du coefficient $c_{i,j}$ situé à la i -ème ligne, j -ème colonne de C

Exercice.

1. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$. Montrer que f est une densité.

Par la suite, on note X une variable aléatoire de densité f . On dit que X suit la loi logistique.

2. Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ suit la même loi que X .
3. Écrire une fonction en Python permettant de simuler X .
4. À l'aide de cette fonction, faire une conjecture sur $\mathbb{E}(X)$ puis donner une approximation de la valeur de $\mathbb{V}(X)$.
5. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$.
6. On cherche ici à déterminer précisément la variance de X .

- a. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$ est convergente. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que la variance de X existe et vérifie :

$$\mathbb{V}(X) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1 + e^{-x}} dx.$$

- b. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x} dx + I_n \text{ où } I_n = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1 + e^{-x}} dx.$$

- c. Montrer que l'intégrale I_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

- d. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire que la variance de X est égale à $\frac{\pi^2}{3}$.

Corrigé

Planche 47
Agro-Véto 2021
Question de cours.

Donner une équation paramétrique d'une droite de l'espace passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par un vecteur $u(a, b, c)$.

Exercice.

Une urne contient des boules noires et blanches, avec une proportion p de noires et $q = 1 - p$ de blanches, où $0 < p < 1$. On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne. On s'intéresse aux successions de tirages amenant une même couleur. On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers tirages ont amené la même couleur et le $(n + 1)$ -ème l'autre couleur. De même, la deuxième série commence au tirage suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de couleur. Soit X la variable aléatoire égale à la longueur de la première série, Y la variable aléatoire égale à la longueur de la deuxième série.

1. a. Écrire une fonction en Python prenant en argument p et permettant de simuler X .
- b. Utiliser la fonction ci-dessous pour estimer $\mathbb{P}(X = Y)$.

```
import random as rd

def XY(p) :
    x=1
    y=1
    a = rd.random()
    if a<p :
        while rd.random() < p :
            x += 1
        while rd.random() > p :
            y += 1
    if a>p :
        while rd.random() > p :
            x += 1
        while rd.random() < p :
            y += 1
    return x,y
```

2. a. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .
- b. Déterminer la loi de X ; vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et montrer que $\mathbb{E}(X) \geq 2$.
- c. Déterminer la loi de Y et son espérance.
3. a. Déterminer la probabilité de l'événement $[X = Y]$.
- b. Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $p = \frac{1}{2}$.
- c. Pour quelle valeur de p la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est-elle maximale ?
4. On effectue maintenant un nombre $n \geq 2$ de tirages comme précédemment, dans une urne comportant le même nombre de boules noires que de boules blanches. On appelle N_n le nombre de séries obtenues.
 - a. Quelles valeurs peut prendre N_n ?
 - b. Donner la loi de N_n et son espérance pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
 - c. Pour $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on note X_i la variable indicatrice de l'événement "la boule tirée au i -ème tirage et la boule tirée au $(i + 1)$ -ème tirage sont de couleurs différentes". Déterminer la loi de X_i . En déduire l'espérance de N_n .

Corrigé

Planche 48
Agro-Véto 2021
Question de cours.

Donner une expression de $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note H_n la matrice carrée d'ordre n telle que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le terme de la ligne i , colonne j de H_n est $\frac{1}{i+j-1}$. Par exemple, $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que H_n est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.
2. Écrire une fonction Python qui, pour un n donné, renvoie H_n et l'inverse du produit de ses valeurs propres. La tester pour $n = 3$.
3. Déterminer de manière exacte les valeurs propres de H_2 .
4. Montrer que H_2 et H_3 sont inversibles.
5. On note Φ l'application qui, à tout n -uplet $(a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, associe le polynôme $\Phi(a) = a_1 + a_2X + \dots + a_nX^{n-1}$. Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6. On pose $P = a_1 + a_2X + \dots + a_nX^{n-1} = \sum_{k=1}^n a_kX^{k-1}$. Montrer que :

$$\int_0^1 (P(t))^2 dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j-1}.$$

Indication : $\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j$.

7. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_n . Pour x et y dans $\mathbb{R}^n$, on note $\langle x | y \rangle$ le produit scalaire de x et y .
 - a. Montrer que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\langle f(e_i) | e_j \rangle = \frac{1}{i+j-1}$.
 - b. Montrer que, si $x = (a_1, \dots, a_n)$, alors $\langle f(x) | x \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j-1}$.
 - c. En déduire que $\langle f(x) | x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ puis que les valeurs propres de H_n sont positives.

Corrigé

Planche 49
Agro-Veto 2019
Question de cours.

Donner le développement limité de la fonction sinus en 0 à l'ordre 5.

Exercice.

Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X_k = -1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Calculer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.
 b. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$.
 c. Écrire un programme Python de paramètres n et ε qui simule S_n et renvoie 1 si $\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon$ et 0 sinon.
 d. Écrire un programme Python renvoyant une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right)$.

Le tester pour $n = 100$, $n = 1000$, $n = 10000$ puis apporter un regard critique par rapport à la question 1.b.

2. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0, \mathbb{E}(e^{tS_n}) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n$.
 b. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$, puis $\frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.
 c. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(\frac{-n\varepsilon^2}{2}\right) \leq 2 \exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right).$$

(On étudiera les variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $t \mapsto \frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon$).

Apporter un regard critique par rapport à la question 1.b.

Corrigé

Planche 50
Agro-Veto 2019
Question de cours.

Représenter graphiquement la fonction sinus.

Exercice.

On admet que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v_k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_k.$$

On rappelle qu'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même.

On dit qu'un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un point fixe de la permutation p si $p(k) = k$. On définit un dérangement de $\llbracket 1, n \rrbracket$ comme étant une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe.

On représente usuellement une permutation p de $\llbracket 1, n \rrbracket$ par la n -liste des images $[p(1), p(2), \dots, p(n)]$. Dans une telle liste, tout entier de $\llbracket 1, n \rrbracket$ apparaît une fois et une seule.

1. En utilisant la fonction `randint` du module `random`, écrire une fonction Python permettant de simuler une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Écrire une fonction Python prenant en argument une permutation P de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et renvoyant `True` si c'est un dérangement, `False` sinon.
3. Déterminer une approximation de la probabilité qu'une permutation de $\llbracket 1, 50 \rrbracket$ soit un dérangement (en supposant qu'elles sont toutes équiprobables).
4. On note D_n le nombre de dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 - a. Justifier que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k}$.
 - b. En déduire la probabilité d_n qu'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ prise au hasard soit un dérangement.
 - c. Donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$. Ce résultat est-il en accord avec celui de la question 3 ?
5. On appelle F_n le nombre de points fixes d'une permutation P de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 - a. Exprimer F_n à l'aide de variables aléatoires de Bernoulli.
En déduire l'espérance de F_n .
 - b. Donner la loi de F_n .

Corrigé

Planche 51
Agro-Veto 2019

Question de cours.

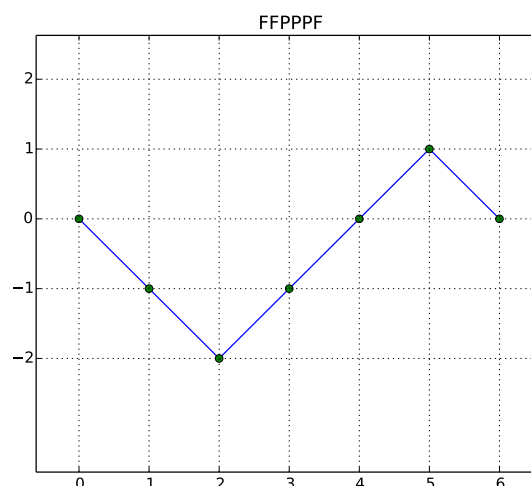
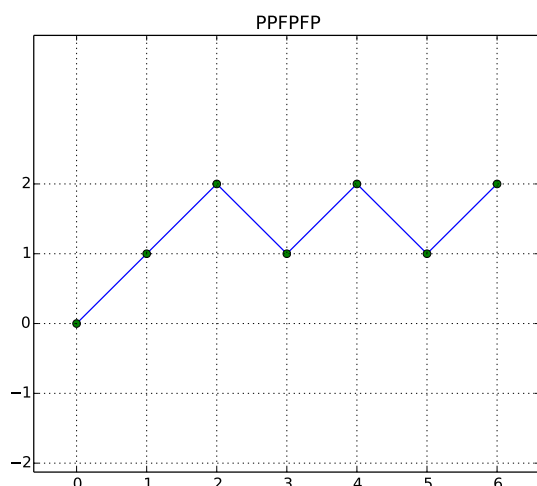
Représenter graphiquement une densité de la loi normale centrée réduite.

Exercice.

On effectue $2n$ tirages d'une pièce de monnaie équilibrée. On appelle X_{2n} la variable aléatoire égale au nombre de "pile" obtenus. On note A_{2n} l'événement "au cours des $2n$ lancers, le nombre de "pile" obtenus a toujours été strictement supérieur au nombre de "face" obtenus".

1. Si $n = 2$, quelle est la probabilité de A_{2n} ?
2. a. Écrire une fonction Python simulant $2n$ lancers de la pièce et renvoyant 1 si A_{2n} est réalisé, 0 sinon.
b. A l'aide de la fonction précédente, estimer la probabilité de A_{2n} pour $n = 2$ et $n = 5$.

Dans la suite, on représente chaque suite des $2n$ lancers de la pièce par un chemin partant du point $O(0,0)$, tel que, pour chaque lancer de la pièce, on progresse d'une unité vers la droite et d'une unité vers le haut si l'on obtient pile, et on progresse d'une unité vers la droite et d'une unité vers le bas si l'on obtient face. Voici par exemple, pour $n = 3$, les chemins considérés si l'on obtient PFPFPF et si l'on obtient FFPPPF.



3. Combien y a-t-il de chemins possibles ?
4. Pour $i \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, combien de chemins réalisent $[X_{2n} = i]$?
5. Quelle est la loi de X_{2n} ?
6. On admet dans un premier temps que, pour $i > n$, $\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}(A_{2n}) = \frac{i-n}{n}$.

a. Justifier que $\mathbb{P}(A_{2n}) = \frac{1}{2^{2n}} \left(\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{2n} i \binom{2n}{i}}_{S_1} - \underbrace{\sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i}}_{S_2} \right)$.

- b. En calculant séparément les deux sommes intervenant dans l'expression ci-dessus, donner $\mathbb{P}(A_{2n})$.

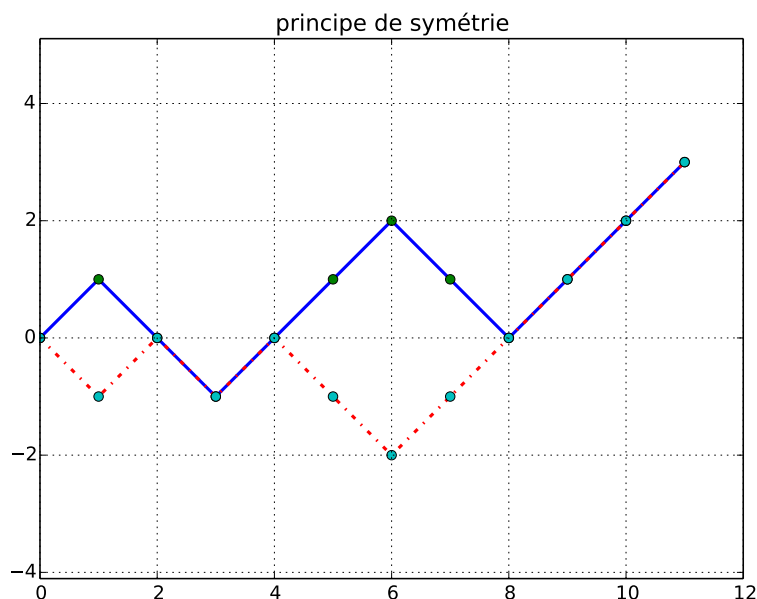
7. Le but de cette question est de démontrer la propriété admise précédemment : pour $i > n$, $\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}(A_{2n}) = \frac{i-n}{n}$.

On suppose donc dans toute cette question $[X_{2n} = i]$ réalisé. On s'intéresse en conséquence uniquement aux chemins partant de O et pour lesquels, parmi les $2n$ pas effectués vers la droite, il y en a eu i qui montaient. On note $Z(2n, 2i - 2n)$ le point d'arrivée commun à ces chemins.

- Combien y a-t-il de ces chemins au total ?
- Combien y a-t-il de ces chemins passant par $A(1,1)$?
- Montrer que parmi ces chemins il y a exactement $\binom{2n-1}{i}$ passant par $B(1,-1)$.
- On remarque que l'événement A_{2n} est réalisé si, et seulement si, le chemin obtenu ne coupe pas l'axe Ox . On cherche donc à dénombrer les chemins partant de O et arrivant en Z et ne coupant pas l'axe Ox .

Pour cela, on dénombre tout d'abord ceux qui coupent l'axe Ox .

- En utilisant une symétrie axiale d'axe Ox , comme dans le dessin suivant, justifier qu'il y a autant de chemins passant par A et coupant l'axe Ox , que de chemins passant par B .



- En déduire le nombre de chemins passant par A et ne coupant pas l'axe Ox .
- Retrouver ainsi que pour $i > n$, $\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}(A_{2n}) = \frac{i-n}{n}$.

Corrigé

Planche 52
Agro-Veto 2019
Question de cours.

Définition d'une application surjective.

Exercice.

On dispose de N boules numérotées de 1 à N , indiscernables au toucher, et de 2 urnes A et B.

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et N et on change d'urne la boule portant le numéro correspondant.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

1. Soit $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. Déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = k-1)$ et $\mathbb{P}(X_n = k+1)$.
2. a. Écrire une fonction **etape** prenant en arguments N et le nombre k de boules dans A à un instant donné et qui renvoie le nombre de boules dans A à l'instant suivant.
 b. Écrire une fonction renvoyant sous forme d'une liste les valeurs successivement prises par $X_0, \dots, X_n$.
 À partir de maintenant et dans toute la suite, on suppose $N = 3$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$; on note aussi $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,

- a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$.
 - b. Montrer que 1 est valeur propre de M et donner le sous-espace propre associé.
 - c. On suppose que X_0 suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{2}$. Quelle loi suit alors X_n ?
 - d. Quel est l'ensemble des lois que pourrait suivre X_0 pour que X_n ait la même loi que X_0 ?
4. On suppose que l'urne A est initialement vide. On appelle D la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour que l'urne A soit à nouveau vide.
- a. Écrire une fonction en Python simulant la réalisation de D .
 - b. (i) Calculer $\mathbb{P}(D = 2)$ et $\mathbb{P}(D = 4)$.
 (ii) Pourquoi D ne peut-il prendre que des valeurs paires ?
 (iii) Montrer que $\mathbb{P}(X_{2k+2} = 0) = \frac{1}{9}\mathbb{P}(X_{2k} = 0) + \frac{2}{9}$.
 (iv) On note désormais $u_k = \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ et $d_k = \mathbb{P}(D = 2k)$.
 Montrer que $[X_{2k} = 0] = \bigcup_{j=1}^k [X_{2k} = 0] \cap [D = 2j]$.
 (v) En déduire que $d_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} d_j u_{k-j}$.
 - c. A l'aide des relations des questions 4.b.(iii) et 4.b.(v), écrire une fonction en Python renvoyant la liste $[d_1, \dots, d_n]$.
S'il reste du temps, pour $n = 5$, comparer les résultats obtenus par simulation de D avec les résultats de la fonction précédente.

Corrigé

Planche 53 Agro-Veto 2019
--

Question de cours.

Énoncer les propriétés de l'intégrale.

Exercice.

On dispose d'un dé équilibré à n faces avec lequel 2 joueurs (nommés A et B) prennent part à un jeu. A lance le dé et verse 3 euros à B. B lance le dé et tant qu'il n'obtient pas un nombre supérieur ou égal à celui obtenu par A il relance le dé. À chaque lancer, il verse 1 euro à A. On note :

- X : la variable aléatoire égale au nombre obtenu par A.
- M : la variable aléatoire égale à la somme versée à A.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Écrire une fonction en Python permettant de simuler la réalisation de M (l'emploi de la fonction `randint` est conseillé).
3. Calculer la probabilité de l'événement $[M = j]$ sachant que $[X = 1]$.
4. Soit $k \geq 2$. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(M = j \mid X = k)$ et $\mathbb{P}(M \geq j \mid X = k)$.
5. Calculer $\mathbb{P}(M \geq j)$.
6. On admet que $\mathbb{E}(M) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(M \geq j)$. Calculer $\mathbb{E}(M)$. Donner sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
7. Déterminer l'espérance de G , gain algébrique de A, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Planche 54
Agro-Veto 2019
Question de cours.

Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice.

Un fabricant de poudre chocolatée met dans chacune de ses boîtes une image à collectionner. Il y a en tout n images différentes, et une seule par boîte.

On note T la variable aléatoire correspondant au nombre de boîtes nécessaires pour avoir toute la collection d'images. Pour tout i appartenant à $\llbracket 2, n \rrbracket$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de boîtes à acheter pour obtenir une i ème image différente des $i-1$ déjà obtenues.

On définit également une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n = -\ln(n) + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. On admet qu'elle est convergente.

1. Écrire un programme en Python prenant en argument epsilon (supposé réel strictement positif) et qui renvoie le premier u_n tel que l'écart $u_{n+1} - u_n$ soit inférieur à epsilon.
2.
 - a. Pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, donner la loi de T_i .
 - b. Exprimer T en fonction de $T_2, T_3, \dots, T_n$.
 - c. Montrer que $\mathbb{E}(T) = n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$.
 - d. Soit c un réel strictement positif. Montrer que $\mathbb{P}(T > cn \ln(n)) \leq \frac{1}{c} + \frac{u_n}{c \ln(n)}$.
3.
 - a. Pour i, k dans $\mathbb{N}^*$, on pose $A_{i,k}$: "on n'a pas obtenu l'image i lors des k premiers tirages". Calculer $\mathbb{P}(A_{i,k})$.
 - b. Montrer que $\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_{i,k} \right) \leq n \exp \left(-\frac{k}{n} \right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Indication: on pourra montrer que $1+t \leq \exp(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
 - c. Montrer que $\mathbb{P}(T > cn \ln(n)) \leq \frac{1}{n^{c-1}}$.
4. Comparer les deux inégalités des questions 2.d et 3.c.

Corrigé

Planche 55
Agro-Veto 2019
Question de cours.

Définition de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

Exercice.

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ des nombres complexes (non nécessairement distincts). on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_2 & & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

1. Étude du cas $n = 2$. On a $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.
 - a. Quelles sont les valeurs propres de A ?
 - b. A est-elle diagonalisable ?
2. Écrire une fonction en Python prenant en entrée une liste $L = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ et renvoyant un array représentant la matrice A .

3. Soient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, P le polynôme $a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$ et ω un nombre complexe vérifiant $\omega^n = 1$. Montrer que X est vecteur propre de A et donner la valeur propre associée.

4. Étude du cas $n = 4$.

- a. Déterminer tous les complexes z tels que $z^4 = 1$.
- b. Dédire de la question précédente 4 vecteurs propres de A .
- c. On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ et on note $\overline{Q}$ la matrice conjuguée de Q (c'est à dire la matrice carrée de même taille dont chaque terme de la ligne i colonne j est le conjugué du terme de la ligne i colonne j de Q).
 - (i) Calculer $Q\overline{Q}$.
 - (ii) En déduire que les 4 vecteurs propres donnés précédemment forment une famille libre.
 - (iii) Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres en fonction de P .

- d. Donner les valeurs propres et la dimension des sous-espaces vectoriels propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Corrigé

Planche 56
Agro-Veto 2019**Question de cours.**

Formule des probabilités composées.

Exercice.

On considère deux applications linéaires f , allant de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et g allant de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, où $p < n$. On appelle A matrice de f et B matrice de g , relativement aux bases canoniques de leurs espaces de départ et d'arrivée respectifs.

1. Donner les tailles de A et B .
2. Montrer que $g \circ f$ est un endomorphisme.
3.
 - a. Montrer que le rang de g vérifie $\text{rg}(g) \leq p$.
 - b. Montrer que $g \circ f$ n'est pas surjective.
4. On prend $n = 3$, $p = 2$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a. En utilisant l'outil informatique, montrer que AB est diagonalisable et la diagonaliser.
 - b. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nul. Montrer que BX est différent de 0.
 - c. Montrer que si λ est valeur propre de AB alors λ est aussi valeur propre de BA .
 - d. BA est-elle diagonalisable ?
5. On suppose maintenant $p = 3$ et $n > 3$. On note C la matrice carrée d'ordre 3 telle que $C = AB$.
 - a. Écrire une fonction en Python prenant en argument deux arrays représentant deux matrices A et B , et qui renvoie les valeurs propres de AB et de BA .
 - b. Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de C , alors λ est une valeur propre non nulle de BA .
 - c. On suppose $n = 4$ et que C a trois valeurs propres distinctes non nulles. Montrer que BA est diagonalisable

Corrigé

Planche 57
Agro-Veto 2019**Question de cours.**

Énoncer le théorème de Schwarz.

Exercice.

Dans cet exercice , on considère une population de tortues.

1. Le nombre X d'œufs pondus par une tortue chaque année suit une loi de Poisson de paramètre λ . Chacun d'eux a une probabilité p d'éclore . On appelle Y le nombre d'œufs éclos .
 - a. Écrire une fonction Python simulant une ponte et donnant le nombre d'œufs éclos.
 - b. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
 - c. En déduire la loi de Y . Donner l'espérance de Y .
2. Des études sur ce type de tortue ont permis de déterminer que :
 - les tortues deviennent adultes à 2 ans, et que seules 20% parviennent à cet âge
 - 40% des tortues adultes de l'année n meurent avant la fin de l'année
 - les femelles composent la moitié de la population et donnent naissance à 4 bébés chaque année, de l'âge de 2 ans jusqu'à la fin de leur vie.

On définit a_n comme le nombre d'adultes vivant l'année n , et b_n le nombre de bébés de cette même année.

- a. Déterminer la valeur de a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et b_n ainsi que celle de b_{n+1} en fonction de a_n .
- b. On note $E = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} - 0.6u_{n+2} - 0.4u_n = 0\}$.
Montrer que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est élément de E .
- c. On considère que l'on a comme conditions initiales $a_0 = 8000$, $a_1 = 7700$ et $a_2 = 7400$.
Écrire une fonction Python de paramètre n qui renvoie a_n . La suite (a_n) semble-t-elle converger ?
- d.
 - (i) Donner les racines réelles et complexes du polynôme $P = X^3 - 0.6X^2 - 0.4$.
 - (ii) Prouver que si r est racine de P , la suite des puissances de r appartient à E .
 - (iii) Montrer que l'application ϕ , qui à toute suite u appartenant à E associe (u_0, u_1, u_2) est un isomorphisme de E sur $\mathbb{C}^3$. En déduire que E est de dimension 3.
 - (iv) Notons r_1, r_2, r_3 les trois racines de P . On admet que la famille $((r_1^n), (r_2^n), (r_3^n))$ est libre dans E .
Montrer que c'est une base de E .
 - (v) En déduire la convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (on ne demande pas la valeur explicite de la limite).

Corrigé

Planche 58
Agro-Véto 2019
Question de cours.

Énoncer l'inégalité de Markov.

Exercice.

On considère d'une part deux urnes A et B et d'autre part 3 boules numérotées de 1 à 3.

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on transfère la boule portant le numéro correspondant dans l'urne où elle n'était pas.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

On suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $\llbracket 0; 3 \rrbracket$.

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument une valeur de n , simule la réalisation de la variable aléatoire X_n et renvoie la valeur de X_n obtenue.

2. Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

Déterminer U_0 et démontrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$.

3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E . Soit φ l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = XP(X) + \frac{1}{3}(1 - X^2)P'(X).$$

- a. Montrer que φ est un endomorphisme de E , justifier que sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M .
 - b. Pour tout $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, on pose : $P_k(X) = \frac{1}{8}(X - 1)^k(X + 1)^{3-k}$.
Démontrer que pour tout $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, $\varphi(P_k) = (1 - \frac{2}{3}k) P_k$.
 - c. En déduire que l'endomorphisme est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
4. On pose : $Q = \frac{1}{4}(X^3 + X^2 + X + 1)$.
 - a. Expliciter les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}$. Quel vecteur retrouve-t-on ?
 - b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi^n(Q) = P_0 + (-\frac{1}{3})^n P_2$.
 5. À l'aide des questions précédentes, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 2)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 3)$.
Par quelle loi pourrait-on approcher la loi de X_n pour une grande valeur de n ?
 6. Vérifier le résultat de la question précédente à l'aide d'une simulation informatique.

Corrigé

Planche 59
Agro-Véto 2019
Question de cours.

Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Donner son tableau de variation.

Exercice.

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$.

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2 , j^3 et j^4 .

2. a. Soit r et s deux complexes non nuls. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Donner une base de vecteurs propres de M .

b. La matrice M est-elle diagonalisable lorsque $r = 0$ ou $s = 0$?

3. Écrire une fonction `decalage(L)` qui renvoie, si $L = [a_1, \dots, a_n]$, la liste $L_1 = [a_2, \dots, a_n, a_1]$.

Utiliser cette fonction pour écrire une fonction `matrice(a_1,a_2,a_3)` qui renvoie la matrice A .

On pourra par exemple compléter le script suivant :

```
def matrice(a_1,a_2,a_3):
    A=...
    L=...
    for i in ...
        A.append(L[:])
    ...
    return ...
```

4. Si a_1 , a_2 et a_3 sont réels, la matrice A est-elle diagonalisable ?

5. Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A . Quelle est la valeur propre associée ?

6. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$. On pourra utiliser sans justifier que la famille (U, X_1, X_2) est libre.

a. Calculer AX_1 et AX_2 .

En déduire qu'il existe des complexes r et s tels que $AX_1 = s^2 X_2$ et $AX_2 = r^2 X_1$.

b. Déterminer le spectre de A .

On pourra exprimer les valeurs propres à l'aide des complexes r et s introduits à la question 6 et utiliser la question 2.

7. Préciser dans les cas suivants si la matrice A est diagonalisable.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} j & 1 & 0 \\ 1 & 0 & j \\ 0 & j & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé

Planche 60
Agro-Véto 2019**Question de cours.**

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire X discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Exercice.

Dans tout l'exercice, on considère $\mathbb{R}^3$ muni produit scalaire canonique.

On rappelle que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors leur produit scalaire est :

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Montrer que $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$ et déterminer les sous-espaces propres E_0 et E_1 de f .

2. La matrice A est-elle inversible ?

3. Écrire une fonction Python `proj` qui prend en argument une matrice carrée M (entrée par exemple sous la forme d'une liste de listes) et qui renvoie un booléen : `True` si $M^2 = M$, `False` sinon.

Tester cette fonction sur la matrice A .

4. Montrer que $\text{Im}(f) = E_1$.

5. Écrire une fonction Python `ps` prenant en argument deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ codés sous forme de tableaux numpy ou de listes, et retournant leur produit scalaire.

6. a. Montrer que les deux sous-espaces propres E_0 et E_1 sont orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall u \in E_0, \quad \forall v \in E_1, \quad \langle u, v \rangle = 0.$$

On pourra éventuellement utiliser la fonction `ps`.

- b. En déduire que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f(x) \in E_1 \text{ et } \forall y \in E_1, \quad f(x) - x \text{ orthogonal à } y.$$

On a donc montré que f était la projection orthogonale sur E_1 .

7. Déterminer une base orthonormale de E_1 . En déduire, en utilisant la fonction `ps`, une valeur approchée de la distance du vecteur $t = (1; 2; 1)$ à l'espace E_1 à 10^{-2} près.

Corrigé

Planche 61
Agro-Véto 2019

Question de cours.

À quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

Exercice.

Rappel : algorithme de dichotomie. On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$. On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$, en un point que l'on note γ . On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour tout entier naturel k (en notant $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$), $(a_{k+1}, b_{k+1}) = (a_k, c_k)$ si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$ et $(a_{k+1}, b_{k+1}) = (c_k, b_k)$ sinon. On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers γ , en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leq \gamma \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}.$$

On peut montrer que si l'entier k est tel que $\frac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées de γ à ε -près.

1. On considère pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x^n - \ln(x) - n$.

a. Dresser le tableau de variations de f_n .

b. On rappelle et on admet l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$ ($\star$).

En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $u_n \in]0; n^{-\frac{1}{n}}[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et un unique réel $v_n \in]n^{-\frac{1}{n}}; +\infty[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.

2. Étude de la suite (v_n)

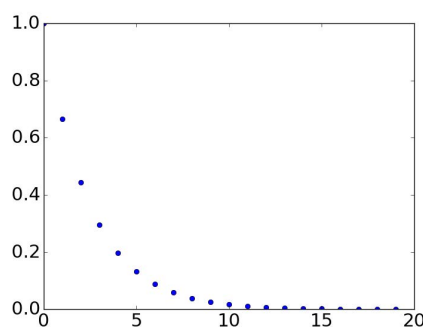
La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ vérifie donc l'égalité : $\forall n \geq 2, v_n^n - \ln(v_n) - n = 0$.

a. Justifier en utilisant si besoin ($\star$) que $f_n\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) > 0$, puis en déduire que : $\forall n \geq 2, v_n \leq (2n)^{\frac{1}{n}}$.

b. En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes v_n pour n allant de 2 à 30. Représenter la suite (v_n) graphiquement.

On rappelle que la fonction `plot` des modules `pylab` ou `matplotlib.pyplot` permet de faire des représentations graphiques comme le montre l'exemple suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
X=[n for n in range(20)]
Y=[(2/3)**k for k in X]
plt.plot(X,Y, 'o')
plt.show()
```



c. Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite ℓ .

d. On admet le résultat suivant : si $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$, alors $\ln(a_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(b_n)$. On rappelle de plus que $\ln(x) \sim_{x \rightarrow 1} x - 1$. Déterminer un équivalent de $v_n - \ell$.

3. Étude de la suite (u_n)

a. Proposer une méthode déterminant des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes u_n pour n allant de 2 à 8.

b. Calculer $f_n(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de (u_n) .

c. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$, puis montrer que u_n est équivalent à e^{-n} .

Corrigé

Planche 62
Agro-Véto 2019
Question de cours.

Rappeler la formule des accroissements finis.

Exercice.

Rappel : la fonction définie ci-dessous permet de représenter graphiquement la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ ($n \in \mathbb{N}$), loi étant la liste $[\mathbb{P}(X_n = 0), \dots, \mathbb{P}(X_n = n)]$.

```
from matplotlib.pyplot import *
def graphe(loi):
    lx = [i for i in range(len(loi))]
    bar(lx, loi)
    ylim(0, 0.5)
    show()
```

Pour se rendre d'un endroit à un autre, les individus d'une fourmilière ont le choix entre deux trajets disjoints, que nous nommerons A et B . À chaque fois qu'une fourmi emprunte l'un des deux chemins, elle y dépose une certaine quantité de phéromone qui peut éventuellement dépendre de la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin.

Notations : pour chaque $n \geq 1$, α_n (respectivement β_n) désigne la quantité de phéromone présente sur le chemin A (resp. B) après le n^{e} trajet. A_n (resp. B_n) désigne l'évènement « la n^{e} fourmi choisit le trajet A (resp. B) ». Nous supposons que chaque fourmi choisit de façon aléatoire le chemin qu'elle emprunte, en affectant à chacun une probabilité proportionnelle à la quantité de phéromone qui y est présente.

On a donc : $\mathbb{P}_{[\alpha_n=a] \cap [\beta_n=b]}(A_{n+1}) = \frac{a}{a+b}$ et $\mathbb{P}_{[\alpha_n=a] \cap [\beta_n=b]}(B_{n+1}) = \frac{b}{a+b}$.

Enfin, X_n désignera le nombre de fourmis ayant choisi le trajet A lors des n premiers trajets.

Nous supposons qu'initialement $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et qu'à chaque trajet une fourmi multiplie par un facteur $r > 1$ la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin qu'elle emprunte.

1. Déterminer la loi des variables X_1 , X_2 et X_3 .
2. Rédiger une fonction `simulX` qui reçoit un entier n et un réel r , simule les déplacements de n fourmis suivant la règle énoncée et renvoie le nombre X_n de fois où le chemin A a été emprunté.
3. a. Rédiger une fonction `loiX` qui reçoit un entier n et un réel r et renvoie, sous forme de liste, des valeurs approchées des probabilités $[\mathbb{P}(X_n = 0), \dots, \mathbb{P}(X_n = n)]$ obtenues en faisant 1 000 simulations de la variable X_n .
b. Représenter graphiquement la loi de la variable X lorsque $n = 100$ et $r = 2$. Commenter.
4. Exprimer en fonction de n et de r la probabilité $\mathbb{P}(X_n = n)$.
On ne tentera pas de simplifier l'expression obtenue.
5. On pose : $\forall n \geq 1, p_n(r) = \frac{r}{1+r} \cdots \frac{r^n}{1+r^n}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, q_n(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{r^{2n+1}}\right)$.
Démontrer que pour tout $r > 1$, les suites $(p_n(r))_{n \geq 1}$ et $(q_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.
On notera $p(r)$ et $q(r)$ leurs limites respectives.
6. En remarquant que $\forall n \geq 1, p_n(r) = \frac{1}{1+r^{-1}} \cdots \frac{1}{1+r^{-n}}$, montrer que : $p(r) \geq \exp\left(-\frac{1}{r-1}\right)$.
On pourra admettre sans le démontrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
7. Démontrer que $\forall r > 1, q(r) \leq \exp\left(-\frac{r}{r^2-1}\right)$.
8. On admet que $\forall r > 1, p(r) = q(r)$. Dédurre des questions précédentes un encadrement de la limite de la probabilité $\mathbb{P}(X_n = n)$ en fonction de r .

Conclusion : ce modèle vous semble-t-il approprié pour rendre compte du comportement des fourmis dans la réalité ?
Corrigé

Planche 63
Agro-Véto 2019
Question de cours.

Si f est la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \sqrt{1-x}$, déterminer une expression de sa dérivée f' .

Exercice.

On souhaite estimer un paramètre $p \in]0, 1[$. On note : $q = 1 - p$.

Soit un entier $n \geq 1$ fixé. On considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires, indépendantes, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et définies sur un même espace probabilisé.

On note : $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

1. a. Justifier que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.
 b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'intervalle $\left[\overline{X}_n - \sqrt{\frac{5}{n}}; \overline{X}_n + \sqrt{\frac{5}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95.
2. Écrire une fonction Python `test(n,p,a,b)` qui prend en arguments un entier `n`, une probabilité `p`, deux flottants `a` et `b`, simule une réalisation de $\overline{X}_n$ et retourne 1 si $\overline{X}_n$ appartient à $[a, b]$ et 0 sinon.
3. On cherche par la suite un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 d'amplitude plus petite. On fixe un réel strictement positif t quelconque et ε un réel strictement positif quelconque.
 - a. Établir l'égalité : $\mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{nt\overline{X}_n} \geq e^{nt(p+\varepsilon)})$.
 - b. En utilisant l'inégalité de Markov, établir l'inégalité suivant : $\mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n(\ln(pe^t+q)-t(p+\varepsilon))}$.
 - c. On admet l'inégalité : $\ln(pe^t+q) - tp \leq \frac{t^2}{8}$. Ainsi, on a l'inégalité suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n\left(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon\right)}.$$

En déduire l'inégalité : $\mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$.

4. On pose $\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - X_k)$. Établir l'inégalité $\mathbb{P}(\overline{Y}_n - q \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$.

5. Déduire des questions 3(c) et 4 l'inégalité :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

6. Comment choisir ε pour obtenir un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 ? L'amplitude de l'intervalle de confiance est-elle plus réduite que celle obtenue à la question 1(b) ?

Corrigé

Planche 64
Agro-Véto 2019
Question de cours.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective.

Exercice.

Soient $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geq 2$, on note $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, et on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. a. Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $]0, 1]$. Vérifier que la variable $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
 b. En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n .
 c. En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{S_n}$.

2. Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geq 2$.

On note F_n la fonction de répartition de Y_n . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n .

3. a. Montrer que pour tout réel u de $[0, 1]$, on a :

$$(1 - u)^n \geq 1 - nu.$$

- b. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x)) dx$ est convergente et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F_n(x)) = 0$.

4. a. Pour tout $A > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^A x f_n(x) dx = \int_0^A (1 - F_n(x)) dx - A(1 - F_n(A)).$$

- b. En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x)) dx.$$

5. À l'aide du changement de variable $t = 1 - e^{-x}$, montrer que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t} dt,$$

et en déduire finalement que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = S_n.$$

Corrigé

Planche 65
Agro-Véto 2019
Question de cours.

Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E .

Exercice.

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Si X est une variable aléatoire, on notera $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.

Soient $a \in]0; 1]$ et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité.
2. On considère dorénavant X une variable aléatoire de densité f .

Déterminer la fonction de répartition F_X de X .

3. On considère la variable aléatoire Y donnée par :

$$Y = \frac{X^2}{2a}.$$

- a. Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
- b. On pose $U = 1 - e^{-Y}$ (de sorte que $Y = -\ln(1 - U)$). Montrer que U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.
- c. En déduire une fonction Python `Y()` qui simule la variable Y .
- d. Écrire une fonction Python `X(a)` qui prend en entrée un réel $a \in]0, 1]$ et qui simule X .
4. a. Donner une densité, que l'on notera g , d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance nulle et de **variance** a .
- b. À l'aide d'une intégration par parties, en déduire que X possède une espérance et la calculer.
- c. En utilisant la variable Y , montrer que X^2 possède une espérance et la calculer.
- d. En déduire $\mathbb{V}(X) = \frac{(4 - \pi)a}{2}$.
5. On considère désormais que le paramètre $a \in]0; 1]$ est inconnu et on souhaite l'estimer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes ayant toutes la même loi que X . On note :

$$S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2.$$

- a. Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a .
- b. Montrer que X^2 admet une variance et montrer que $\mathbb{V}(X^2) = 4a^2$.
- c. Montrer que $\mathbb{V}(S_n) \leq \frac{1}{n}$. Puis, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n à partir de laquelle $]S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}[$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.

Corrigé

Planche 66
Agro-Véto 2019
Question de cours.

Si α est un réel quelconque, déterminer sur $]0, +\infty[$ une expression d'une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

Exercice.

Une compagnie fait passer des entretiens d'embauche à n candidats. On suppose que la compétence de chaque candidat est quantifiée par une variable aléatoire X_i suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$, d'autant plus élevée que le candidat est compétent. De plus, on suppose que les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

À la fin de chaque entretien, la compagnie doit immédiatement donner sa décision : soit elle embauche le candidat, soit elle passe au suivant, sans possibilité de revenir sur ses pas. La compagnie cherche à élaborer une stratégie qui lui permettrait de maximiser l'espérance de la compétence du candidat qu'elle choisira. Pour ce faire, elle décide de fixer un seuil $s \in [0; 1]$. Si, parmi les $n - 1$ premiers candidats, aucun ne dépasse le seuil, la compagnie embauchera le dernier candidat. Sinon, elle choisira le premier candidat qui dépasse le seuil.

Pour tout $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, on note A_k l'évènement : « pour tout $i \in \llbracket 1; k - 1 \rrbracket$, $X_i < s$, et $X_k \geq s$ », et B l'évènement : « pour tout $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, $X_k < s$ ».

On définit par conséquent la variable aléatoire $Z_{n,s}$, compétence du candidat retenu, comme suit :

$$Z_{n,s} = \begin{cases} X_n & \text{si } B \text{ est réalisé,} \\ X_k & \text{si } A_k \text{ est réalisé } (1 \leq k \leq n - 1) \end{cases}.$$

1. a. Écrire un programme Python qui prend en argument un réel $s \in [0; 1]$, un entier naturel non nul n , et retourne une réalisation de $Z_{n,s}$.
 b. En déduire un programme qui retourne une valeur approchée de la compétence moyenne du candidat recruté via ce protocole.
2. Calculer $\mathbb{E}(Z_{n,0})$ et $\mathbb{E}(Z_{n,1})$.
3. Montrer que, pour tout $t \in [0; 1]$, on a : $\mathbb{P}(B \cap [Z_{n,s} \leq t]) = s^{n-1}t$.
4. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $0 < s < 1$.

Soit $t \in [0; 1]$. Pour tout $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, montrer que :

$$\mathbb{P}(A_k \cap [Z_{n,s} \leq t]) = \begin{cases} (t - s)s^{k-1} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}.$$

5. En déduire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(Z_{n,s} \leq t)$ en fonction de $t \in [0; 1]$.
6. Montrer que $Z_{n,s}$ est une variable à densité, et en donner une densité.
7. En déduire que : $\mathbb{E}(Z_{n,s}) = \frac{1}{2}(1 + s - s^n)$.
8. Déterminer le seuil s_n^* qui maximise la compétence moyenne du candidat embauché en fonction de n .
9. À l'aide de la fonction programmée en 1.b, tracer sur un graphique l'évolution de la valeur de $\mathbb{E}(Z_{n,s})$ en fonction de s pour $n = 5, 10, 50$, et vérifier les conclusions de la question précédente dans ces cas.

Corrigé

Planche 67
Agro-Veto 2018**Question de cours.**

Énoncer le théorème des sommes de Riemann.

Exercice.

On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densité f_X et f_Y alors $X+Y$ est une variable à densité et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)f_Y(t-u) du$$

est une densité de $X+Y$.

On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à densité indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose, pour tout entier naturel non nul n , $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que M_n est une variable à densité et en donner une densité f_n .
2. Montrer que M_n admet une espérance et calculer celle-ci.
3. Calculer $\mathbb{P}(M_n > \mathbb{E}(M_n))$ et donner sa limite quand n tend vers $+\infty$.
4. Simuler M_n à l'aide de Python.
5. Écrire une fonction qui simule 10 000 fois M_n et donne une estimation de $\mathbb{P}(X_{n+1} > M_n)$.
6. a. Quelle est la loi de $-X_{n+1}$?
b. Déterminer une densité de $M_n - X_{n+1}$.
c. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_{n+1} > M_n)$.

Corrigé

Planche 68
Agro-Veto 2018**Question de cours.**

Théorème de transfert pour une variable aléatoire réelle discrète.

Exercice.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) dt$.

1. Écrire en Python une fonction permettant l'affichage graphique de $\tan^2$, $\tan^4$, $\tan^6$ et $\tan^8$.
2. Faire une conjecture sur la monotonie et l'existence d'une limite de la suite (u_n) et la démontrer.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+3}$ et $u_n \geq \frac{1}{2(2n+3)}$.
Donner la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
4. De même qu'à la question précédente, en utilisant la valeur de $u_{n-1} + u_n$, donner un majorant de u_n pour $n \geq 1$.
5. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Écrire une fonction en Python prenant n en argument et renvoyant la valeur de u_n .

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

- a. Montrer que :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], (1 + \tan^2 t) \sum_{k=0}^n (-\tan^2)^k(t) = 1 + (-1)^n \tan^{2n+2}(t).$$

b. Montrer que $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$.

- c. En déduire un algorithme permettant d'avoir une valeur approchée de π à ϵ près.

Corrigé

Planche 69
Agro-Veto 2018
Question de cours.

Soient a et b deux réels tels que $a^2 - 4b > 0$. Quelles sont les solutions de $y'' + ay' + by = 0$?

Exercice.**Rappel : algorithme de dichotomie.**

On considère une fonction g continue et monotone sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α . On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout entier naturel k , on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et :

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (a_k, c_k) & \text{si } g(a_k)g(c_k) \leq 0 \\ (c_k, b_k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On sait alors que les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ convergent toutes les deux vers α .

On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution et que celle-ci est strictement positive. On notera par la suite x_n cette solution.
2. Écrire une fonction Python permettant de déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de x_2 .
3. Quelle est la monotonie de la suite (x_n) ? Montrer que cette suite est convergente.
4. On définit une suite (u_n) en posant $u_n = n^2x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

À l'aide de Python, représenter graphiquement cette suite. Que dire de sa convergence ?

Démontrer cette conjecture et donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

5. On pose $g(x) = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$.

- a. Montrer que cette fonction est croissante sur $[x_2, 1]$ et donner son tableau de variation sur $[x_2, 1]$.
- b. Étudier le signe de $g(x) - x$ sur $[x_2, 1]$.
- c. On pose $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Montrer que la suite (v_n) est monotone et converge vers x_2 .

Corrigé

Planche 70
Agro-Veto 2018**Question de cours.**

Donner la définition du nombre dérivé en a d'une fonction f .

Exercice.

1. a. Donner la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$.

b. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Montrer que :

$$\forall k \geq 2 \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$$

En déduire que, pour tout $n \geq 2$:

$$\forall n \geq 2, \quad 1 + \int_2^n \frac{1}{t} dt \leq S_n \leq 1 + \frac{1}{n} + \int_1^{n-1} \frac{1}{t} dt.$$

c. Montrer que $\ln(n-1) \sim \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Une boîte contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs avec remise et après chaque tirage on rajoute une boule noire avant de procéder au tirage suivant.

On note X le rang d'apparition de la première boule noire et Y le rang d'apparition de la première boule blanche.

a. Écrire un programme simulant la variable aléatoire X .

b. Déterminer la loi de X . La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

c. Déterminer la loi de Y . La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Corrigé

Planche 71
Agro-Veto 2018
Question de cours.

Courbes représentatives de l'exponentielle et du logarithme.

Exercice.

Sur une plage, le drapeau permettant ou non la baignade peut être de trois couleurs : vert, orange ou rouge.

Une étude statistique sur une grande période a permis de montrer que :

- Si le drapeau est vert un jour donné, alors il est encore vert le jour suivant avec la probabilité $\frac{1}{2}$, ou orange ou rouge de façon équiprobable.
- Si le drapeau est orange un jour donné, alors il est vert le jour suivant avec la probabilité $\frac{1}{2}$, ou orange avec la probabilité $\frac{1}{4}$, ou encore rouge.
- Si le drapeau est rouge un jour donné, alors il est orange le jour suivant avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou rouge avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On note V_n l'événement "le drapeau est vert le jour numéro n " et $v_n = \mathbb{P}(V_n)$. On définit de même O_n , o_n , R_n et r_n .

1. Déterminer v_{n+1} , o_{n+1} et r_{n+1} en fonction de v_n , o_n et r_n et $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, si l'on note $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ o_n \\ r_n \end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = MX_n$ pour tout $n \geq 1$.
3. Quel est le rang de M ? Que peut-on en déduire ?
4. Calculer $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduit-on pour M en terme de valeurs propres ?
5. Justifier que 1 est valeur propre de M et donner les vecteurs propres associés .
6. Montrer qu'il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$ et préciser ces matrices. Vérifier avec Python que P est bien inversible.
On rappelle l'instruction `inv` du package `numpy.linalg` permet de calculer un tel inverse. Par exemple, si l'on importe la bibliothèque `numpy` avec l'alias `np` et si on exécute la commande `C=np.array([[2,1],[2,6]])`, `np.linalg.inv(C)` renvoie `array([[ 0.6, -0.1], [-0.2, 0.2]])`).
7. Exprimer X_n en fonction de X_1 et P, D et $n \in \mathbb{N}^*$.
8. On suppose que le jour numéro 1, le drapeau est vert. Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de v_n , o_n et r_n .
9. Écrire une fonction Python prenant en argument v_1, o_1, r_1 et n , et renvoyant les prévisions de la couleur du drapeau pour le jour numéro n .

Corrigé

Planche 72
Agro-Veto 2018
Question de cours.

Énoncer le théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice.

On considère n variables aléatoires réelles indépendantes $T_1, \dots, T_n$ suivant la même loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$). On pose $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$.

1. a. Montrer que si U suit une loi uniforme sur $[0, 1[$, alors la variable aléatoire $X = -\frac{\ln(1-U)}{\lambda}$ suit la loi exponentielle de paramètre λ .
 b. Écrire une fonction Python qui simule la loi de S_n .
2. On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, à densités respectives f_U et f_V , alors $U + V$ admet une densité g qui est définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t) dt$$

- a. Déterminer des densités respectives de S_1, S_2, S_3 .
- b. En déduire plus généralement une densité de S_n .
3. Soit Y_n la variable aléatoire définie par : $Y_n = \frac{S_{n+1} - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}}$.
 a. Déterminer une densité de Y_n en fonction de celle de S_{n+1} .
 b. Soit g_n la fonction définie par :

$$g_n(x) = \begin{cases} e^{-x\sqrt{n} + n \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)} & \text{si } x > -\sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer qu'une densité f_n de Y_n peut s'écrire sous la forme $f_n : x \mapsto \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n g_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.

- c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$.
- d. On admet que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (formule de Stirling).
 En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Interpréter ce résultat.

Corrigé

Planche 73
Agro-Veto 2018
Question de cours.

Que signifie “ f est négligeable devant g ” ?

Exercice.

Une fourmi se déplace sur un polygone à p sommets numérotés de 0 à $p - 1$. Lorsqu'elle arrive sur un sommet, elle décide de manière équiprobable de repartir en arrière ou de poursuivre son chemin. La fourmi est au départ sur le sommet 0. On notera T_p le temps mis par la fourmi pour revenir à son point de départ pour un polygone à p côtés et n le nombre de sommets atteints.

1. Écrire une fonction Python `chemin(n,p)` renvoyant la liste des n sommets atteints dans un polygone à p sommets.
2. Écrire une fonction `tempsMoyen(p)` qui renvoie le temps moyen mis par la fourmi pour revenir au sommet de départ.
3. Quel lien semble-t-on pouvoir établir entre T_p et p ?

4. a. Montrer que $T_3 - 1$ suit une loi géométrique et préciser son paramètre .
 b. Quelle est l'espérance de T_3 ?

5. La fourmi se déplace sur le carré ABCD et au départ elle est en A. On notera respectivement a_n, b_n, c_n, d_n les probabilités que la fourmi soit en A, B, C, D à l'instant n et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

a. Justifier que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n$, où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Calculer M^2 et M^3 .
7. Exprimer X_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
8. Donner la loi de T_4 et son espérance.

Corrigé

Planche 74
Agro-Veto 2018**Question de cours.**

Formule de Taylor-Young.

Exercice.

Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\Phi(P) = 9XP - (X^2 - 1)P'$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. On modélise un polynôme par la liste de ses coefficients donnés par ordre croissant. Par exemple le polynôme $X + 2X^3 + X^4$ va être modélisé par $[0, 1, 0, 2, 1]$.
 - a. Écrire une fonction prenant en argument une liste de ce type représentant un polynôme P et renvoyant une liste modélisant le polynôme dérivé P' .
 - b. Écrire une fonction prenant en argument une liste représentant un polynôme P et renvoyant une liste modélisant le polynôme XP .
 - c. En déduire une fonction renvoyant une liste représentant $\Phi(P)$ à partir d'une liste représentant P .
3. On donne $P = 2X^2 + 4X + 2$. Calculer $\Phi(P)$ et le factoriser.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n . Montrer que $\Phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n + 1$.
Pour quel degré a-t-on une inégalité stricte ?
5. On considère l'équation $(E) : \Phi(P) = 9P$.
 - a. Le polynôme nul est-il solution ?
 - b. On cherche à déterminer tous les polynômes non nuls solutions de (E) .
Montrer que ceux-ci sont forcément de degré 9.
Montrer qu'on peut les mettre sous la forme $(X + 1)^k Q(X)$.
Montrer qu'on a toujours $k = 9$ et $\deg Q = 0$.
 - c. Dédire des questions précédentes que 9 est valeur propre de Φ et donner le sous-espace vectoriel propre associé.

Corrigé

Planche 75
Agro-Veto 2018
Question de cours.

Qu'appelle-t-on famille génératrice d'un espace vectoriel E ?

Exercice.**Rappel : algorithme de dichotomie.**

On considère une fonction g continue et monotone sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α .

On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout entier naturel k , on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et :

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (a_k, c_k) & \text{si } g(a_k)g(c_k) \leq 0 \\ (c_k, b_k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On sait alors que les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ convergent toutes les deux vers α .

Une course comporte n coureurs. Les temps de parcours des coureurs sont des variables aléatoires à densité $(X_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On note T_1 le temps de parcours du gagnant.

- a. Montrer que T_1 est à densité et en donner une densité.
- b. Quel est le temps moyen mis par le gagnant ?

2. On note T_k le temps de parcours du coureur arrivé en k -ème position et, pour tout réel x de $[0, 1]$, N_x le nombre de coureurs ayant fini au plus tard à l'instant x .

- a. Simuler T_k à l'aide de Python.

Indication : Si L est une liste Python, `sorted(L)` est une nouvelle liste comportant les éléments de L triés par ordre croissant.

- b. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que $[T_k \leq x] = [N_x \geq k]$. En déduire que :

$$\mathbb{P}(T_k \leq x) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

3. On s'intéresse au 3-ème coureur.

- a. Montrer que $\mathbb{P}(T_3 \leq x) = G(x)$ où $G(x) = 1 - \left((1-x)^n + nx(1-x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^2 (1-x)^{n-2} \right)$.
- b. Justifier que G est croissante sur $[0, 1]$.
- c. A l'aide de la méthode de dichotomie, trouver le temps de parcours qui permet d'être sur le podium (c'est-à-dire au pire troisième) dans 95 % des cas. Quelle est la valeur obtenue pour $n = 10$?

4. On considère 2 variables aléatoires à densité X et Y , indépendantes.

- a. Montrer que $P(X = Y) = 0$.
- b. Montrer que l'événement "il n'y a aucun ex-aequo" est quasi-certain.

Corrigé

Planche 76
Agro-Veto 2018**Question de cours.**

Rappeler la formule de Bayes.

Exercice.

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$, où $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X . On pose $T_n = \prod_{k=0}^n X_k$.

1. a. Écrire une fonction Python prenant en argument p et n et simulant la loi de T_n .
b. Écrire une fonction Python prenant en argument p et n et renvoyant l'espérance de T_n .
c. Essayer pour $n = 20$ et $p = 0.5$.
2. a. Calculer l'espérance et la variance de X .
b. Donner l'espérance de T_n . En déduire la loi de T_n .
3. a. On pose $u_n = \mathbb{P}(T_n = 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = (2p - 1)u_n + 1 - p$.
b. Retrouver la loi de T_n .
4. On considère une variable aléatoire N , indépendante de la famille de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $T(\omega) = \prod_{k=0}^{N(\omega)} X_k(\omega)$. On définit ainsi une nouvelle variable aléatoire T , qui est le produit d'un nombre aléatoire de variables aléatoires.
Déterminer la loi de T .
5. On considère une variable aléatoire H suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, définie sur le même univers que X et indépendante de X . On note D la variable aléatoire $D = HX$.
a. Donner la fonction de répartition de D .
b. En déduire une densité de D .

Corrigé

Planche 77
Agro-Veto 2018

Question de cours.

Donner l'allure de la fonction densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice.

On considère une suite u définie par la valeur de $u_0 > 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}u_n$.

1. Écrire une fonction U qui prend u_0 et n en argument et qui renvoie la liste des termes $[u_0, u_1, \dots, u_n]$.

2. En supposant que la suite (u_n) converge, montrer que sa limite vaut 1.

3. Tester la fonction $U(a, 10)$ pour différentes valeurs de $a > 0$.

Que conjecturer sur le sens de variation et la convergence de u_n ?

4. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} \leq u_n$. Prouver alors la conjecture émise à la question précédente concernant la convergence de la suite (u_n) .

5. On suppose ici $u_0 > 1$.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n < u_0$.

b. Écrire en Python une fonction f renvoyant le plus petit N_0 tel que $u_{N_0} < u_0$.

6. On cherche à exprimer u_n sous la forme $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ avec a, b réels.

a. Montrer que si a et b existent alors $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_n - 1)$ et $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(u_n - 1 - \frac{a}{n}\right)$.

b. On définit pour tout n , $v_n = n(u_n - 1)$.

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ il existe un entier naturel p tel que $v_{n+1} = u_p$.

En déduire alors l'existence et la valeur de a .

c. Prouvez de même l'existence de b et donner sa valeur .

7. On pose, pour tout entier naturel n , $z_n = n! u_n$.

a. Montrer que : $\forall n \geq 0 \quad z_{n+1} - z_n = (n+1)!$.

En déduire l'expression de z_n sous forme de somme.

b. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\sum_{k=1}^n k!$ est équivalent à $n!$

c. Retrouver alors la convergence de la suite (u_n) et la valeur de sa limite.

Corrigé

Planche 78
Agro-Veto 2018**Question de cours.**

Résoudre $\cos(x) = \cos(a)$, a étant un réel donné.

Exercice.

On considère un groupe de n personnes, chacune ayant la probabilité p d'être malade. On réalise des tests sanguins pour savoir si ces personnes sont malades.

Pour cela, on fait un mélange avec la moitié de chacun des n échantillons et on réalise un test sur le mélange. S'il est positif, alors on réalise un test individuel sur chaque moitié d'échantillon restante ; sinon, on s'arrête là.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués .

1.
 - a. Trouver le support, la loi et l'espérance de X .
 - b. Montrer que cette méthode de tests est rentable 'en moyenne' si et seulement si $p < p_n$, où $p_n = 1 - (1/n)^{1/n}$.
 - c. Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Cette fois-ci, on réalise des groupes de m personnes (m divise n) . On effectue le test comme précédemment sur chaque groupe; s'il est positif, on réalise ensuite le test pour chaque membre du groupe.

On appelle Z le nombre de groupes dont le test est positif .

- a. Donner la loi de Z .
- b. Exprimer X en fonction de Z et en déduire $E(X) = \frac{n}{m} + n(1 - (1-p)^m)$.
- c. Grâce à l'outil informatique, trouver la valeur de m qui minimise cette espérance pour $p = 0.01$ et $n = 25$.
- d. On pose $u_m = \frac{1}{m} - (1-p)^m$. Montrer que pour tout $m \geq 1$, $\frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{m}$.
En déduire que si $p > \frac{3}{4}$ la suite (u_m) est décroissante.

Corrigé

Planche 79
Agro-Veto 2018
Question de cours.

Donner le rapport entre la matrice d'un vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}_2$ et la matrice de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}_1$, sachant que l'on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

Exercice.

Une certaine sorte de vache produit entre 1 et n litres de lait par jour (nombre entier de litres), de manière équiprobable.

On considère une vache donnée. On note X_k le nombre de litres produits par la vache le jour k , $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, et T_n la variable aléatoire égale au nombre de jours au bout desquels on a obtenu n litres de lait.

On rappelle la formule du triangle de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

1. a. Écrire une fonction Python simulant T_n .
 b. Écrire une fonction Python renvoyant une valeur approchée de l'espérance de T_n .
 c. Faire une conjecture sur la valeur de l'espérance de T_n lorsque n est grand.
2. a. Rappeler la loi de X_k et son espérance.
 b. Donner $S_k(\Omega)$.
 c. Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1} .
 d. Vérifier que, si $k \leq n$, $\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$.
 e. Par récurrence sur k , montrer que pour tous $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et i tels que $k \leq i \leq n$, $\mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}$.
3. a. Donner $T_n(\Omega)$.
 b. Montrer que $\mathbb{P}(T_n > k) = \mathbb{P}(S_k < n) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$.
 c. En déduire $\mathbb{P}(T_n = k)$.
 d. On admet que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T_n > k)$.
 Calculer l'espérance de T_n . et en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Planche 80
Agro-Veto 2018**Question de cours.**

Qu'est-ce qu'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$?

Exercice.

On étudie la dissolution d'une pastille de chlore dans une piscine. On note T le temps qu'elle met pour se dissoudre, et on fait les hypothèses suivantes :

- $\mathbb{P}(T > 0) = 1$
- Pour tout réel $t \geq 0$, on a $\mathbb{P}(t < T \leq t + h \mid T > t) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \lambda h$, où λ est un réel strictement positif donné.

1. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que Y suit loi uniforme sur $[0; 1[$ et $X = -\frac{\ln(1 - Y)}{\lambda}$.
 - a. Donner la fonction de répartition de X .
 - b. Montrer que X suit une loi exponentielle et donner son paramètre.
 - c. Écrire une fonction Python simulant X pour λ donné.
2. Soit F la fonction de répartition de T .

Que vaut F sur $] -\infty; 0]$? Montrer que F est continue à droite en 0.
3. Montrer que $\frac{F(t+h) - F(t)}{h} \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \lambda - \lambda F(t)$ pour tout $t \geq 0$.
4. En déduire que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que F vérifie une équation différentielle de la forme $y' + \lambda y = \lambda$ sur $[0, +\infty[$.
5. Donner la fonction de répartition de T .
6. Donner la loi de T ainsi que son espérance et sa variance.

Corrigé

Planche 81
Agro-Veto 2018**Question de cours.**

Donner la définition de vecteurs colinéaires.

Exercice.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

1.
 - a. Rappeler $\mathbb{E}(X^k)$ pour k appartenant à $\{0, 1, 2\}$.
 - b. La fonction **normal** de la librairie **numpy.random** permet de simuler une loi normale centrée réduite.
Ainsi, si on importe via la commande `from numpy.random import normal`, alors l'instruction `u = normal()` affecte à `u` une valeur aléatoire, en suivant une loi normale centrée réduite.
À l'aide de simulations en Python, donner une valeur approchée de $\mathbb{E}(X^k)$.
 - c. Montrer que $\mathbb{E}(X^k) = (k-1)\mathbb{E}(X^{k-2})$
 - d. À l'aide de la formule précédente, écrire une fonction Python de paramètre k qui renvoie la valeur exacte de $\mathbb{E}(X^k)$.
 - e. Calculer $\mathbb{E}(X^{2n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - f. Calculer $\mathbb{E}(X^{2n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite (u_n) où $u_n = \ln(\mathbb{E}(X^{2n}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Calculer $u_n - u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
La suite (u_n) peut-elle converger?
 - b. Écrire une fonction Python utilisant le résultat de la question 2.a et renvoyant la valeur de $\frac{u_n}{n \ln n}$.
Cette suite semble-t-elle converger ?
 - c. Montrer que :
$$\forall k \geq 2, \int_{k-1}^k \ln(2t-1) dt \leq \ln(2k-1) \leq \int_k^{k+1} \ln(2t-1) dt.$$
 - d. À l'aide de sommations, en déduire que u_n est équivalent à $n \ln n$ au voisinage de $+\infty$.

Corrigé

Planche 82
Agro-Veto 2017
Question de cours.

Donner la loi de probabilité de la loi géométrique de paramètre p , son espérance et sa variance.

Exercice.

Trois joueurs A, B et C participent à un tournoi qui consiste en une succession de manches ne faisant intervenir que deux des joueurs et se déroule de la façon suivante :

- À chaque manche, chacun des deux protagonistes a la même probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner.
- Un joueur gagne le tournoi si et seulement s'il gagne deux manches de suite, et alors le tournoi prend fin.
- A et B s'affrontent lors de la première manche ; le gagnant de cette manche affronte alors C pour une deuxième manche. Si le tournoi n'est pas alors terminé, le gagnant de cette deuxième manche reste en lice et affronte celui qui avait été éliminé lors de la première manche.
- Et ainsi de suite... Après chaque manche, il y a donc soit un vainqueur du tournoi, soit le gagnant de la manche affronte celui qui n'y avait pas participé.

On note X le nombre de manches nécessaires pour terminer le tournoi, et pour tout entier naturel non nul i , A_i l'événement "A gagne la manche numéro i ". On note également G_A : "A gagne le tournoi". On utilise des notations semblables pour B et C.

1. Faire un programme pour simuler un tournoi, qui renvoie le joueur gagnant et le nombre de manches jouées.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 3)$.
3. Pour tout $i \geq 2$, on note E_i : "le joueur entrant à la manche i gagne cette manche".
 - a. Exprimer $[X > 3]$ en fonction de $[X > 2]$ et E_3 . En déduire $\mathbb{P}(X > 3)$.
 - b. Soit $k \geq 3$. Exprimer $[X > k]$ en fonction de $[X > 2]$ et des E_i .
En déduire $\mathbb{P}(X > k)$, puis $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \geq 2$.
 - c. Vérifier que X est bien une variable aléatoire.
 - d. Étudier l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. On pourra s'aider de la loi de $X - 1$.
4. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(G_{A_i})$ que le joueur A remporte le tournoi à l'issue de la i ème manche pour i variant de 1 à 6, de même pour B et C. (On pourra s'aider d'un arbre.)

Pour alléger les notations, on s'autorise à ne pas noter certains signes $\cap$. Ainsi, $A_1 \cap B_2 \cap C_3$ pourra être noté plus simplement $A_1 B_2 C_3$.

5. Montrer que $G_A \cap B_1 = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\bigcap_{i=0}^n B_{3i+1} C_{3i+2} A_{3i+3} \right) \cap A_{3n+4} \right)$. En déduire $\mathbb{P}(G_A \cap B_1)$.
6. Montrer que $G_A \cap A_1 = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\bigcap_{i=0}^n A_{3i+1} C_{3i+2} B_{3i+3} \right) \cap A_{3n+4} A_{3n+5} \right) \cup A_1 A_2$. En déduire $\mathbb{P}(G_A \cap A_1)$.
7. Déduire des questions précédentes $\mathbb{P}(G_A)$, puis $\mathbb{P}(G_B)$, puis $\mathbb{P}(G_C)$

Corrigé

Planche 83
Agro-Véto 2018
Question de cours.

Qu'appelle-t-on *racine* d'un polynôme ?

Qu'appelle-t-on *ordre de multiplicité* d'une racine d'un polynôme ?

Exercice.

On considère l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre, ainsi que l'ensemble :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & a \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. À l'aide d'un programme Python, déterminer la plus petite valeur propre parmi les matrices de F dont les coefficients sont égaux à 0 ou 1.

On pourra par exemple utiliser la fonction `numpy.linalg.eig` comme le montre l'exemple suivant :

```
import numpy.linalg as la
vap, vep = la.eig([[1,2],[3,4]])
```

Après cette suite d'instructions, la variable `vap` contient la liste des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et la variable `vep` est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de cette matrice.

2. a. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 b. Donner une base de $E \cap F$.
3. a. Montrer que $A \in E \cap F$.
 b. Montrer que A est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale vérifiant $A = PD^tP$ où tP est la matrice transposée de P .
4. Vérifier que tPMP est diagonale pour toute matrice $M \in E \cap F$.

5. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le spectre de $M = \begin{pmatrix} y+z & y & x \\ y & x+z & y \\ x & y & y+z \end{pmatrix}$.

Corrigé

Planche 84
Agro-Véto 2018
Question de cours.

Donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Exercice.

On rappelle que dans le package `numpy`, la commande `numpy.transpose(A)` donne la transposée de A , la commande `numpy.linalg.eigh(A)` donne les valeurs propres et les vecteurs propres éventuels de A et la commande `numpy.eye(n,n)` crée la matrice I_n et la commande `numpy.ones((n,n))` crée la matrice de taille $n \times n$ ne comportant que des 1.

Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$. On considère une matrice $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = J_n + (k-1)I_n$ avec :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire un programme Python permettant de déterminer, suivant la valeur de n , les valeurs propres de la matrice M^2 , ses vecteurs propres et qui permet de vérifier les résultats obtenus. On étudiera, en particulier, le cas $n = 3$ et $k = 2$.
2. a. Déterminer, dans le cas général, le rang de J_n .
 b. Étudier les valeurs propres éventuelles de J_n et donner la dimension de ses sous-espaces propres.
 c. Justifier, de deux façons différentes, que J_n est diagonalisable.
3. a. Justifier que M^2 est également diagonalisable.
 b. Déterminer les valeurs propres de M^2 et donner la dimension de ses sous-espaces propres.
4. Déterminer les valeurs propres possibles pour M .

On considère un réseau social comportant n personnes, et tel que chaque couple de deux personnes distinctes ont exactement un ami en commun et que chaque personne a exactement k amis, avec $1 \leq k \leq n-1$. Une personne n'est pas amie avec elle-même. On numérote les personnes de 1 à n .

On désigne par $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que $A_{i,j} = 1$ si les personnes i et j sont amies et $A_{i,j} = 0$ sinon.

5. Déterminer un exemple de réseau vérifiant les hypothèses pour $n = 3$.
6. Justifier que A est symétrique.

On admet, que le coefficient $(A^2)_{i,j}$ avec $i \neq j$, donne le nombre de fois où la personne i a un ami en commun avec la personne j . On admet également que $(A^2)_{i,i}$ donne le nombre d'amis de la personne i .

7. Donner une expression de la matrice A^2 .
8. a. Donner le nombre de couples comportant deux personnes distinctes du réseau.
 b. Pour une personne donnée, déterminer le nombre de couples de deux personnes distinctes dont elle est un ami en commun.
 c. En déduire la relation $k^2 - k + 1 = n$.
9. a. En déduire les valeurs propres éventuelles de A .
 b. On sait que $\sum_{\lambda_i \in \text{Sp}(A)} n_i \lambda_i = 0$ où n_i est la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i .
 Montrer que $n = 3$.

Corrigé

Planche 85
Agro-Véto 2018
Question de cours.

Densité de la loi normale centrée réduite.

Exercice.

On pourra utiliser pour les programmes Python la fonction `linalg.matrix_rank()` du module `numpy`, qui permet de connaître le rang d'une matrice, comme le montre l'exemple suivant :

```
import numpy as np
A = np.array( [ [1,2,1] , [2,3,2] , [3,5,3] ] )
print( np.linalg.matrix_rank(A) )
```

La dernière ligne affiche le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, i.e. 2.

On pourra aussi utiliser la fonction `randint()` du module `random`. Pour a et b deux entiers, `randint(a,b)` renvoie un entier équiprobablement choisi entre a et b (a et b étant inclus).

1. a. Écrire une fonction en Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'ils sont colinéaires (on pourra représenter les vecteurs par des listes).
 b. Écrire une fonction en Python `vecteurs_propres` prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est un vecteur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. a. Vérifier que -1, 1 et 2 sont valeurs propres de A et préciser pour chacune un vecteur propre associé.
 b. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

On note : $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ et $M_n^* = \frac{M_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

- a. Donner, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'approximation de la probabilité $\mathbb{P}(-\alpha < M_n^* < \alpha)$ donnée par le théorème central limite.
 b. En déduire que $\left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, M_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de confiance de p au seuil de 95%.

On pourra admettre que, pour tout $x \in [0, 1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ et si Φ désigne la fonction de répartition d'une variable suivant la loi normale centrée réduite, alors $\Phi(1,96) \approx 0,975$.

4. On note N_V le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers de $\llbracket -5, 5 \rrbracket$.

- a. Expliquer comment le programme suivant permet d'estimer la valeur de N_V .

```
def simul () :
    u = [randint(-5,5) for k in range(3)]
    return vecteurs_propres(u)
n = 10000 # Valeur de n à définir.
nb = 0
for k in range(n):
    if simul () :
        nb += 1
print(round(nb/n*11*3)) # round(x) = l'entier le plus proche de x.
```

- b. Comment choisir n pour que l'on soit sûr à 95% de la valeur affichée ?
 c. Commenter le résultat obtenu.

Corrigé

Planche 86
Agro-Véto 2018**Question de cours.**

Donner la définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice.

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation $(E_n) : \frac{\ln^2(x)}{x} = \frac{1}{n}$ où n est un entier naturel non nul, et l'inconnue x un nombre réel strictement positif. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}.$$

1. a. Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.
b. En déduire que (E_1) n'admet pas de solution.
c. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet deux solutions, que l'on notera α_n et β_n , telles que :

$$1 \leq \alpha_n \leq e^2 \leq \beta_n.$$

2. À l'aide de l'outil informatique, représenter sur un même graphe la courbe représentative de f ainsi que les droites D_i d'équation $y = \frac{1}{i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.
3. Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variations et sur les limites des suites $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ et $(\beta_n)_{n \geq 2}$?
4. On s'intéresse dans cette question à la suite $(\beta_n)_{n \geq 2}$.
 - a. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n \geq 2}$ est strictement monotone.
 - b. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n \geq 2}$ admet une limite qu'on précisera.
 - c. Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ la suite définie par $u_n = \frac{\beta_n}{n}$.
On admet que $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\ln(n))$. Prouver alors que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln^2(n)$.
 - d. En déduire un équivalent de $(\beta_n)_{n \geq 2}$.
5. On s'intéresse dans cette question à la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$.
 - a. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ admet une limite qu'on précisera.
 - b. Donner un équivalent de $\alpha_n - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Comment pourrait-on vérifier ce résultat avec l'outil informatique ?

Corrigé

Planche 87
Agro-Véto 2018
Question de cours.

Définition de la notion d'indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.

Exercice.

Soit x un réel de l'intervalle $[0, 1[$ fixé. On définit les suites $(f_n(x))_{n \geq 1}$, $(g_n(x))_{n \geq 1}$ et $(h_n(x))_{n \geq 1}$ par :

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + x^k), \quad g_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - x^{2k-1}) \quad \text{et} \quad h_n(x) = f_n(x)g_n(x).$$

On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$ et $h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x)$.

1. Écrire un script Python qui affiche dans un repère les points de coordonnées $(f_n(x), g_n(x))$ lorsque x prend les valeurs $\frac{k}{100}$ avec $k \in \{0, \dots, 80\}$ et $n = 100$. Faire une conjecture d'une relation simple entre $f(x)$ et $g(x)$ en admettant leurs existences.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et que la suite $(g_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante.
3. a. Établir que : $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + t \leq e^t$.
 En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x)$ existe et vérifie $1 \leq f(x) \leq \exp\left(\frac{x}{1-x}\right)$.
 b. Montrer que la fonction f est continue en 0.
4. a. Justifier l'existence de $g(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.
 b. Montrer que pour tout $t \in [0, 1[$ et $x \in [0, 1[$, $1 - (1-x)^t \geq xt$.
On pourra étudier une fonction de x ou utiliser la formule des accroissements finis.
 c. En déduire l'encadrement suivant, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\exp\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}\right) \leq g(x) \leq \exp\left(-\frac{x}{1-x^2}\right),$$

puis la continuité de g en 0.

- d. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, $f_n(x^2)g_n(x^2) = f_{2n}(x)g_n(x)$.
 En déduire que $h(x^2) = h(x)$.
- e. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $h(x^{2^n}) = h(x)$.
 Conclure alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $h(x) = 1$.
- f. Ce résultat confirme-t-il votre conjecture ?

Corrigé

Planche 88
Agro-Véto 2018
Question de cours.

Énoncer la loi faible des grands nombres.

Exercice.**Rappel : algorithme de dichotomie.**

On considère une fonction g continue et monotone sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α .

On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout entier naturel k , on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et :

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (a_k, c_k) & \text{si } g(a_k)g(c_k) \leq 0 \\ (c_k, b_k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On sait alors que les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ convergent toutes les deux vers α .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée α .
2. En utilisant des valeurs approchées de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ à l'aide de Python, justifier que $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.
3. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument un entier n , deux réels a et b et la fonction f , et qui renvoie α à 10^{-n} près.
4. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que Φ est une densité de probabilité.

5. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} t\Phi(t) dt$ converge absolument.
6. Montrer que pour tout $t > \alpha$, $f'(t) = t\Phi(t) - \frac{1}{t^2}$.
7. Soit X une variable aléatoire admettant Φ pour densité. Calculer l'espérance de X de deux manières différentes et en donner un encadrement par deux entiers consécutifs.

Corrigé

Planche 89
Agro-Véto 2018
Question de cours.

Pour $|q| < 1$, donner l'expression des sommes suivantes : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$.

Exercice.

On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes admettant respectivement les densités f et g , alors la variable aléatoire $U + V$ admet une densité $f \star g$ définie par : $(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Justifier l'existence, puis déterminer une densité f de la variable aléatoire U^2 , ainsi qu'une densité de V^2 .
2. On considère la variable aléatoire $Z = U^2 + V^2$. Justifier que Z admet une densité de probabilité, notée h .
3. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire Z et d'estimer $\mathbb{P}(Z \leq 1)$.
4. a. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1]$, $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$.
 b. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1]$, $h(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy$.
 c. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1]$, $h(x) = \frac{\pi}{4}$. On pourra utiliser le changement de variable $y = \sin^2 u$.
 d. Interpréter graphiquement le résultat en termes d'aire.
5. On considère une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\pi}{4}$ et on note $S_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
 a. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer en fonction de n et ε une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$.
 b. En déduire à partir de quelle valeur de n il est possible de définir un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2} .
 c. À l'aide de la simulation précédente, déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2} .
6. Existe-t-il d'autres alternatives pour déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance 0,95 de $\frac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2} ?

Corrigé

Planche 90
Agro-Véto 2018
Question de cours.

Énoncer le théorème de Rolle.

Exercice.

Une urne contient initialement deux boules blanches et deux boules noires. Soit c un entier naturel. On effectue une série de tirages en suivant le protocole suivant :

- On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche, on arrête là. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on rajoute encore c boules noires dans l'urne.
- On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche (si on finit par obtenir une boule blanche), ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : "Les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires". Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche et égale à 0 sinon.

1. Que dire de la loi de X si $c = 0$? Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$ en fonction de c pour c quelconque.
2. a. Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument la valeur de c et un entier naturel s . Cette fonction doit simuler l'expérience ci-dessus, avec un nombre maximal de tirages égal à s . Elle doit renvoyer le rang d'apparition d'une boule blanche si une boule blanche a été obtenue et 0 sinon.
 b. Utiliser la fonction précédente pour simuler un grand nombre de fois l'expérience pour donner une estimation de $\mathbb{P}(X = 0)$ pour $c = 1$, $c = 2$ et $c = 5$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+kc}{4+kc}$.
4. On suppose dans cette question que $c = 1$.
 - a. Calculer la valeur de $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
 - b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.
 - c. En utilisant le théorème du transfert, démontrer que la variable aléatoire $X + 3$ admet une espérance et calculer cette espérance. En déduire l'espérance de X .
 - d. Utiliser la fonction de la question 2(a) pour vérifier ce résultat à l'aide de simulations.
5. On suppose dans cette question que $c = 2$.
 - a. Calculer la valeur de $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
 - b. Donner la loi de X . La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
6. Dans cette question, c est un entier naturel quelconque.

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\ln(\mathbb{P}(E_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{2}{2+kc}\right)$.

- b. Déterminer alors la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Corrigé

Planche 91
Agro-Véto 2018
Question de cours.

Définition d'une matrice carré inversible.

Exercice.

On s'intéresse à l'évolution d'une population de bactéries procaryotes dans un écosystème donné répondant au modèle suivant. L'évolution est supposée réalisée par étapes successives, suivant chacune le même fonctionnement ; à chaque étape donnée, chaque bactérie, indépendamment des autres peut :

- soit donner lieu à une fission binaire, et se diviser en deux bactéries identiques indépendantes, ceci avec une probabilité $\frac{2}{3}$;
- soit mourir et se désintégrer avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

On appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de bactéries présentes après la n -ème étape. Au départ, il n'y a qu'une seule bactérie dans l'écosystème, et on note $X_0 = 1$.

1. Donner la loi et l'espérance de X_1 .
2. a. Pour $n \geq 1$, justifier que X_n ne prend que des valeurs paires. Expliciter $X_n(\Omega)$.
 b. Écrire un programme informatique prenant en argument la valeur de n et renvoyant une simulation de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
 c. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $2i \in X_n(\Omega)$. Donner la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 2i]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction G_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} x^k P(X_n = k) \quad (\text{avec la convention } 0^0 = 1).$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_{n+1} = G_n \circ G_1 = G_1 \circ G_n$.

- a. Donner les valeurs de $G_n(1)$ et $G'_n(1)$.
- b. En déduire une relation entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$.
- c. Calculer alors l'espérance de X_n en fonction de n .
4. On note $u_n = P(X_n = 0)$ pour tout entier naturel n non nul, et R l'événement "la population de bactéries finit par s'éteindre".
 a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, G_{n+1}(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} (G_n(x))^2.$$

- b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} u_n^2$.
- c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à déterminer.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note D_n l'événement "la population disparaît exactement à l'issue de l'étape n ".
 a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(D_n) = u_n - u_{n-1}$.
 b. En remarquant que $R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$, déterminer la probabilité que la population s'éteigne.

Corrigé

Planche 92
Agro-Véto 2017

Soit t un réel positif ou nul. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_t(x) = x^3 + tx - 1$.

1. Montrer que le polynôme P_t admet une unique racine réelle $u(t)$.
2. On note u l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui, à tout réel positif t associe $u(t)$.

- a. Montrer que $u(\mathbb{R}_+) \subset]0, 1]$.
- b. Démontrer que la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
- c. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$.

Indication : utiliser l'expression de $P_t(u(t))$.

- d. Montrer que l'application u est bijective, de réciproque :

$$\begin{aligned} v :]0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ y &\mapsto \frac{1 - y^3}{y}. \end{aligned}$$

- e. Représenter graphiquement grâce au langage `Python` la fonction v sur $]0, 1]$.
En déduire le tracé de représentation graphique de la fonction u .
- f. Justifier que la fonction u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- g. Démontrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer une expression de $u'(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$ et $u(t)$.

Corrigé

Planche 93
Agro-Véto 2017

On définit la fonction numérique sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t} dt.$$

1. a. Proposer une fonction Python prenant en argument un réel $x > 0$ et renvoyant une approximation de $f(x)$.
b. Proposer une approximation du graphe de la fonction f à l'aide de l'outil informatique.
Conjecturer un résultat sur la monotonie de la fonction f et sur ses limites au bord de son domaine de définition.
2. Soient x et x' dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < x'$. Déterminer le signe de $f(x) - f(x')$. En déduire que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Justifier que f admet une limite finie en $+\infty$. *On ne demande pas de calculer cette limite à ce stade.*
4. Dans cette question, on cherche à justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.
 - a. Montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty \right[, |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}.$$

- b. En déduire que f est continue en x_0 .
5. Montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout réel x strictement positif, $\frac{A}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{A}{x}$.
Ce résultat est-il cohérent avec le graphe de f ? En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.
6. Le but de cette question est de déterminer un équivalent simple de f en 0.
 - a. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x+t} dt.$$

Établir que g est une fonction bornée en admettant l'inégalité suivante :

$$\forall t \in [0, 1], |\cos(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2}.$$

- b. En déduire un équivalent simple de f en 0.

Corrigé

Planche 94
Agro-Véto 2017

1. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels non nuls.

Écrire une fonction Python qui renvoie **True** si $a_i^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} \geq 2$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et **False** sinon. La fonction aura pour seul paramètre une liste contenant les réels $a_1, \dots, a_n$.

2. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = \sqrt{2}(0, 1, 0)$ et $\vec{w} = \sqrt{2}(0, 0, 1)$ et $\mathbb{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ admettant pour équation dans la base canonique $y - z = 0$.

Déterminer les projetés orthogonaux des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sur le plan $\mathbb{P}$ et vérifier qu'ils ont la même norme.

3. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et a_1 , a_2 et a_3 trois réels tous non nuls.

On suppose qu'il existe un plan $\mathbb{P}$ tel que les projetés orthogonaux des vecteurs $a_1\vec{e}_1$, $a_2\vec{e}_2$ et $a_3\vec{e}_3$ aient tous la même norme qu'on notera d .

On considère $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ une base orthonormée de $\mathbb{P}$ et $\vec{\varepsilon}_3$ un vecteur normal à $\mathbb{P}$ de norme 1.

On note p la projection orthogonale sur le plan $\mathbb{P}$.

- a. Donner une expression de $p(\vec{e}_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ à l'aide des vecteurs $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$.
- b. Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a :

$$\langle \vec{e}_i, \vec{\varepsilon}_1 \rangle^2 + \langle \vec{e}_i, \vec{\varepsilon}_2 \rangle^2 = \left(\frac{d}{a_i} \right)^2.$$

- c. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} = \frac{2}{d^2}.$$

- d. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer que $|a_i| \geq d$ puis que :

$$a_i^2 \sum_{k=1}^3 \frac{1}{a_k^2} \geq 2.$$

Corrigé

Planche 95
Agro-Véto 2017

Un joueur dispose de N dés équilibrés à six faces. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de 6 obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de dés obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots$. S'il ne reste plus de dés au m -ème lancer, on a alors, pour tout $k \geq m$, $X_k = 0$. Pour tout entier naturel non nul n , on définit la variable $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ qui correspond alors au nombre de 6 obtenus après n lancers.

1. Écrire en Python une fonction $\mathbf{X}(N)$ qui prend en argument le nombre de dés N et renvoie la valeur¹ de X_1 .
2. En déduire une fonction Python $\mathbf{S}(N,n)$ qui prend en arguments les nombres de dés N et le nombre n de lancers effectués, et renvoie la valeur² de S_n .
3. On se propose de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n et on cherchera à déterminer p_n .

a. **Question préliminaire :** Soient N, M et k des entiers tels que $M \leq k \leq N$. Montrer que :

$$\binom{N}{M} \binom{N-M}{k-M} = \binom{N}{k} \binom{k}{M}.$$

b. Montrer que la proposition est vérifiée pour $n = 1$ et déterminer p_1 .

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n .

(i) Soient M et k deux entiers naturels tels que $M \leq k \leq N$. Déterminer $P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M)$.

(ii) En déduire que S_{n+1} suit une loi binomiale de paramètres N et p_{n+1} où $p_{n+1} = \frac{1 + 5p_n}{6}$.

d. Déterminer une expression explicite de p_n .

4. On admet qu'il est presque-sûr qu'on obtienne tous les 6 au bout d'un nombre fini de lancers, c'est-à-dire qu'il existe presque-sûrement un rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $S_n = N$.

On note T le nombre de lancers nécessaires pour n'avoir que des 6 (on pose par convention $T = +\infty$ si on n'obtient jamais tous les 6, ce qui a une probabilité nulle d'arriver), c'est-à-dire :

$$T = \min(\{n \geq 1 \mid S_n = N\} \cup \{+\infty\}).$$

Déterminer la fonction de répartition de T .

5. Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci.

On admettra le résultat suivant : T admet une espérance si la série $\sum P(T > n)$ est convergente et dans ce cas

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n).$$

Corrigé

¹Le sujet aurait dû écrire : "simule la réalisation de la variable X_1 ".

²Même remarque.

Planche 96
Agro-Véto 2017

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a , on considère l'endomorphisme f_a de E associé, défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3.$$

1. Écrire en **Python** une fonction `f_a(x, y, z, a)` qui renvoie les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de l'image $f_a(u)$ par l'application f_a du vecteur u de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$.
2. a. Déterminer une base de $\text{Im } f_a$.
b. Montrer que $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\text{Ker } f_a$.
3. Écrire la matrice A de f_a relativement à la base $\mathcal{B}$ et calculer A^2 . En déduire $f_a \circ f_a$.
4. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$.
 - a. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E .
 - b. Déterminer la matrice A' de f_a dans cette base.
 - c. En déduire que 0 est la seule valeur propre de A . La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ?
5. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI_3$, où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - a. Justifier que la matrice $B(x)$ est inversible pour tout x non nul.
 - b. Exprimer $(A - xI_3)(A + xI_3)$ puis $(B(x))^{-1}$ en fonction de x , I_3 et A .
 - c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $(B(x))^n$ en fonction de x , n , I_3 et A .

Corrigé

Planche 97
Agro-Véto 2017

Soit $\varepsilon \geq 0$.

On dit qu'un couple de variables aléatoires (X, Y) est un couple ε -différentiel si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$e^{-\varepsilon}P(X \in I) \leq P(Y \in I) \leq e^{\varepsilon}P(X \in I).$$

Intuitivement, les lois de X et Y seront d'autant plus proches que le plus petit ε tel que (X, Y) soit un couple ε -différentiel est proche de 0.

1. Soient X et Y deux variables à densité, de densités respectives f et g , et de fonction de répartition F et G .

a. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-\varepsilon}f(t) \leq g(t) \leq e^{\varepsilon}f(t)$.

Montrer que le couple (X, Y) est ε -différentiel.

b. On suppose que (X, Y) est ε -différentiel. Soit $t \in \mathbb{R}$ où f et g sont continues et soit $h > 0$.

Montrer que :

$$e^{-\varepsilon}(F(t+h) - F(t)) \leq G(t+h) - G(t) \leq e^{\varepsilon}(F(t+h) - F(t)).$$

En conclure que $e^{-\varepsilon}f(t) \leq g(t) \leq e^{\varepsilon}f(t)$.

2. **Un exemple : les lois de Laplace $\mathcal{L}(a, b)$.**

On définit, pour $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, la fonction $f_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{a,b}(t) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|t-a|}{b}\right).$$

a. Montrer que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.

b. Établir que si X suit la loi $\mathcal{L}(a, b)$, i.e. $f_{a,b}$ est une densité de X , alors $E(X) = a$.

c. Montrer que si X suit la loi $\mathcal{L}(a, b)$ et Y la loi $\mathcal{L}(a', b)$, alors (X, Y) est $\frac{|a-a'|}{b}$ -différentiel.

3. **Simulation informatique d'une loi de Laplace**

a. On suppose que V suit la loi exponentielle de paramètre 1, U la loi uniforme discrète sur $\{-1; 1\}$ et que U et V sont indépendantes. Montrer que $a + bUV$ suit la loi $\mathcal{L}(a, b)$.

b. En déduire une fonction Python `laplace(a,b)` qui renvoie une valeur aléatoire distribuée suivant la loi $\mathcal{L}(a, b)$.

Corrigé

Planche 98
Agro-Véto 2017

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ telle que $u_1 \in]0, \pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin(u_n)$.

1. Montrer, pour tout $n \geq 3$, que $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer le seul réel vers lequel la suite (u_n) peut converger.
3. Représenter graphiquement u_n en fonction de n pour plusieurs valeurs de u_1 , puis émettre une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n) .
4. Montrer que s'il existe un entier $n_0 \geq 4$ tel que $u_{n_0} \leq u_{n_0-1}$ alors la suite décroît à partir du rang n_0 .
Pour cela, on pourra utiliser une expression de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de u_n et u_{n-1} .
5. Est-il possible que, pour tout entier $n \geq 4$, $u_n > u_{n-1}$?
6. Conclure en établissant la convergence de (u_n) .
7. Émettre une conjecture sur la limite de $\sqrt{n}u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
8. En posant, pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{u_n}{n}$, montrer que $x_{n+1} - x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n^2}{6}x_n^3$ puis que $\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{3}$.
9. En admettant que le résultat précédent permet d'établir que :

$$\frac{1}{x_n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{3},$$

vérifier la conjecture faite à la question 7.

Corrigé

Planche 99
Agro-Véto 2017

Soit N un entier supérieur ou égal à 3.

Une urne contient N boules dont $N - 2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, une par une et sans remise les N boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à N , on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la seconde fois, une boule noire.

1. Dans le cas où $N = 10$, simuler informatiquement une expérience et afficher les valeurs prises par X_1 et X_2 .

On rappelle à cet effet que la fonction `random` de la bibliothèque Python `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.

2. Soient i et j deux entiers de l'ensemble $\llbracket 1, N \rrbracket$. Montrer que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq N. \end{cases}$$

3. a. Justifier que les lois de X_1 et X_2 sont données par :

$$\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, P(X_1 = k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 2, N \rrbracket, P(X_2 = k) = \frac{2(k-1)}{N(N-1)}.$$

- b. Ces variables sont-elles indépendantes ?

4. Démontrer que la variable $N + 1 - X_2$ a la même loi que X_1 .

5. On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\llbracket 1, N \rrbracket$ et on désigne par D l'événement : 'à ne prend pas la même valeur que B '.

- a. Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\frac{N-1}{N}$.

- b. On définit les variables aléatoires $Y_1 = \min(A, B)$ et $Y_2 = \max(A, B)$.

Calculer, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, la probabilité conditionnelle $P_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j])$.

- c. Expliquer pourquoi le programme suivant permet de simuler des variables aléatoires qui suivent les mêmes lois que X_1 et X_2 dans le cas où $N = 10$.

```

from random import *
a = randint(1,10)
b = randint(1,10)
while a == b:
    b = randint(1,10)
print(min(a,b))
print(max(a,b))

```

Corrigé

Planche 100
Agro-Véto 2017

Soit $x \in [-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n(x) = \int_0^x t^{2n} dt, \quad J_n(x) = \int_0^x \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2} dt, \quad J(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}.$$

1. Calculer $J(x)$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $I_k(x)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n(x)$ est bien défini puis que :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

4. Écrire une fonction `Jn` en Python qui prend en argument un réel $x \in [-1, 1]$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoie la valeur de $J_n(x)$.
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], |J(x) - J_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3}.$$
6. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(x)$.
7. À l'aide de Python, proposer une fonction qui prend en argument un réel $x \in [-1, 1]$ et qui renvoie une valeur approchée de $J(x)$ à 10^{-4} près, sans utiliser de la fonction `atan` dans une bibliothèque.
8. Le résultat reste-t-il vrai lorsque $x \notin [-1, 1]$?

Corrigé

Planche 101
Agro-Véto 2017

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par ses trois premiers termes réels u_0 , u_1 et u_2 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2}).$$

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Écrire une fonction en Python prenant en argument les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et renvoyant la liste de ses n premiers termes. Utiliser cette fonction pour étudier le comportement asymptotique de la suite sur quelques exemples.
2. Démontrer que 0 n'est pas valeur propre de A .
3. Démontrer que, pour tout nombre complexe λ , λ est valeur propre de A si, et seulement si λ est solution de l'équation $x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.
4. Démontrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, un nombre complexe z de module strictement plus petit que 1, tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5. Pour tout entier naturel n , exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n et en déduire une expression de X_n en fonction de n , A et X_0 .
6. Démontrer alors qu'il existe trois nombres complexes a , b et c (qu'on ne demande pas d'explicitier) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + bz^n + c\bar{z}^n.$$

7. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |bz^n + c\bar{z}^n| = 0$.

Que peut-on alors dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(bz^n + c\bar{z}^n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(bz^n + c\bar{z}^n)$?

8. En déduire que $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

Corrigé

Planche 102
Agro-Véto 2017

On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g , alors $X + Y$ est une variable à densité, dont une densité h est donnée par le produit de convolution :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Dans cette question, on note $Z = X_1 + X_2$.
 - a. Déterminer à l'aide de Python une valeur approchée de $P(Z \leq 1)$.
 - b. Montrer que $P(X_1 \leq X_2) + P(X_2 \leq X_1) = 1$.
 - c. Montrer que $P(X_1 \leq X_2) = P(X_2 \leq X_1)$.
 - d. Montrer que $1 - X_2$ et X_2 ont la même loi. En déduire la valeur exacte de $P(Z \leq 1)$.
 - e. Après avoir représenté l'ensemble $[0, 1] \times [0, 1]$, interpréter géométriquement la probabilité précédente.
2. Dans cette question, on considère $T = X_1^2 + X_2^2$ et on note f_T une densité de T .
 - a. Montrer que la variable aléatoire X_1^2 est à densité et en déterminer une densité.
 - b. Déterminer $T(\Omega)$ et déterminer une expression de $f_T(x)$ pour $x \in]0, 1]$.
On laissera le résultat sous forme d'une intégrale.
 - c. Soit $x \in]0, 1]$. On note $I_x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}$, dont on admet la convergence.
Montrer que :
$$\forall x \in]0, 1], I_x = I_1.$$
 - d. Exprimer $P(T \leq 1)$ en fonction de I_1 . En déduire à l'aide de Python une valeur approchée de I_1 .

Corrigé

Planche 103
Agro-Veto 2016

1. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \quad \text{et} \quad S_n = 4 \sum_{k=0}^n \frac{I_k}{2^{k+1}}.$$

- a. Donner la valeur de I_0 et démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

(On pourra utiliser une intégration par parties).

- b. Écrire une fonction informatique ayant pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de I_n .
Écrire ensuite une deuxième fonction d'argument n renvoyant la valeur de S_n .
Calculer ainsi $S(10)$. Que remarque-t-on ?

2. a. Soit t un réel positif et n un entier naturel. Établir :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(1 - t^2)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{1 + t^2} - \frac{(1 - t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1 + t^2)}.$$

- b. En déduire que :

$$\pi - S_n = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^1 \frac{(1 - t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt.$$

- c. Montrer enfin que $0 \leq \pi - S_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. Écrire une fonction informatique **approx** ayant comme argument un réel **eps** strictement positif et renvoyant une valeur de π à **eps** près.

Corrigé

Planche 104
Agro-Véto 2016

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère N urnes, numérotées de 1 à N , sachant que pour chaque i , l'urne numérotée i contient i jetons numérotés de 1 à i . On considère l'épreuve aléatoire consistant en une suite de tirages selon les règles suivantes :

- le premier tirage est effectué dans l'urne N ;
- si le jeton obtenu au k -ème tirage porte le numéro i , alors le $(k+1)$ -ème tirage est effectué dans l'urne i ;
- les différents jetons d'une même urne sont tirés équiprobablement.

On note, pour chaque entier naturel k non nul, X_k la variable aléatoire donnant le numéro du jeton obtenu au k -ème tirage.

1. Quelle est la loi de X_1 ?
2. Écrire une fonction en **Python**, prenant en argument un entier N , qui simule l'expérience ci-dessus, et renvoie le nombre de tirages nécessaires à l'obtention du premier 1.
3. Établir, pour k entier naturel non nul et $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=i}^N \frac{1}{j} \mathbb{P}(X_k = j).$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, la suite finie $(\mathbb{P}(X_k = i))_{1 \leq i \leq N}$ est décroissante.
5. a. Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X_k = 1))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, puis justifier qu'elle est convergente.
b. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \geq \mathbb{P}(X_k = 1) + \frac{1}{N} (1 - \mathbb{P}(X_k = 1)).$$

- c. En déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_k = 1) = 1$.

Que peut-on dire de l'événement "tous les tirages donnent un numéro différent de 1" ?

6. Dédurre de la question précédente que, pour tout $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_k = i) = 0$.
7. On note Y_N le rang du tirage pour lequel on obtient le jeton 1 pour la première fois. On peut démontrer (et nous l'admettrons) que :

$$\mathbb{E}(Y_N) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}.$$

Réaliser une simulation qui confirme graphiquement cette expression de $E(Y_N)$ en fonction de N .

Corrigé

Planche 105
Agro-Véto 2016

On étudie la descendance d'une fleur dont le nombre de descendants suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$ où le réel $p \in]0, 1[$ est fixé. Les descendants de la première fleur ont des descendants de façon mutuellement indépendante et dans les mêmes conditions que la première fleur.

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n la probabilité de l'événement E_n : "il n'y a plus de descendance à la génération n ".

1. Étude de la suite (u_n) .

a. Calculer u_1 .

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = ((1 - p) + pu_n)^2.$$

c. Étudier la suite (u_n) . Quelle est sa limite (en fonction de p) ? Commenter les résultats obtenus.

2. Simulation informatique.

a. Rédiger deux fonctions informatiques qui simulent la descendance d'une fleur respectivement sur une génération et sur n générations.

b. Rédiger une troisième fonction qui renvoie la fréquence d'extinction de la descendance après 20 générations sur un grand nombre de simulations.

Corrigé

Planche 106
Agro-Véto 2016

Un scientifique étudie une population de souris femelles uniquement. Il note les propriétés suivantes :

- chacune des souris donne naissance en moyenne à une femelle sa première année de vie et à huit femelles pendant sa deuxième année ;
- la probabilité pour qu'une souris femelle survive une deuxième année est de 0,25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà de la deuxième année.

On distingue donc deux catégories de femelles : les jeunes, âgées de moins d'un an, et les adultes dont l'âge est compris entre un et deux ans.

Notons, pour tout entier naturel n , j_n le nombre de jeunes souris femelles et a_n le nombre de souris adultes femelles après n années.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les hypothèses ci-dessus peuvent se traduire par le système suivant :

$$\begin{cases} j_{n+1} = j_n + 8a_n \\ a_{n+1} = 0,25j_n. \end{cases}$$

On représente la population des souris femelles à l'aide du vecteur $S_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$. Expliciter alors une matrice L telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on ait $S_{n+1} = LS_n$.

2. En déduire une expression de S_n en fonction de L , S_0 et n .
3. a. Déterminer une base (U_1, U_2) de vecteurs propres de L .
b. Soient λ et μ les coordonnées de S_0 dans la base (U_1, U_2) . Exprimer S_n en fonction de λ , μ et n .
4. On considère que la population initiale est composée de 20 jeunes souris femelles et d'aucune souris femelle adulte.
 - a. Écrire un programme informatique qui renvoie les listes $[j_0, j_1, \dots, j_{10}]$ et $[a_0, a_1, \dots, a_{10}]$.
 - b. Exprimer j_n et a_n en fonction de n .
 - c. On désigne par t_n le nombre total de souris femelles après n années.
Justifier que, pour tout entier naturel n , $t_n = 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n$.
 - d. Déterminer la limite de $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.
 - e. Vers quelle répartition jeunes/adultes semble tendre la population ?

Corrigé

Planche 107
Agro-Véto 2016

- (i) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $x^2 - y > 0$.

Indications : on commencera par étudier le nombre de valeurs propres de la matrice A dans le cas où elle est diagonalisable.

- (ii) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On note F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires X et Y .

- a. Montrer que les variables aléatoires X^2 et $-Y$ admettent une densité. Déterminer une densité de chacune de ces variables.
- b. En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h : z \mapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leq z \leq 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappel : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g , alors $X + Y$ est une variable à densité, dont la densité h est donnée par le produit de convolution :

$$h : z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y) \, dy.$$

- c. Quelle est la probabilité que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corrigé

Planche 108
Agro-Véto 2015
Exercice.

Un agent biologique pathogène se déplace et se multiplie dans l'air par division de chaque cellule en deux cellules identiques. Les cellules sont initialement immortelles, puis neutralisées par un agent désinfectant pulvérisé pour combattre l'infection. On discrétise le temps en instants successifs séparés d'une durée δt , et on note pour tout entier naturel n :

- U_n le nombre de cellules pathogènes actives en suspension à l'instant $n\delta t$.
- X_n et Y_n le nombre de cellules actives respectivement divisées/neutralisées entre $n\delta t$ et $(n+1)\delta t$.

1. Dans un premier temps, les cellules pathogènes évoluent sans désinfectant. On note α la probabilité, pour une cellule de se diviser à un intervalle de temps quelconque δt et on suppose que les cellules n'interagissent pas.

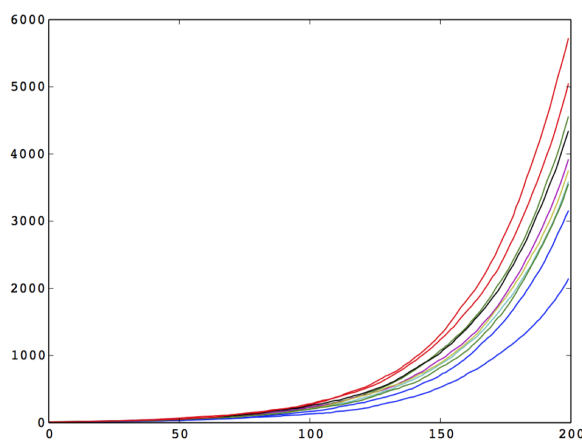
- a. Déterminer la loi conditionnelle de la variable X_n sachant l'événement $[U_n = k]$.
(On reconnaîtra le schéma d'une loi usuelle).

En déduire en fonction de k la valeur de la somme : $\sum_{i=0}^{+\infty} i \mathbb{P}_{[U_n=k]}(X_n = i)$.

- b. En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \alpha \mathbb{E}(U_n)$.

- c. Exprimer $\mathbb{E}(U_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(U_n)$, puis montrer que $\mathbb{E}(U_n) = (1 + \alpha)^n N$, où N est le nombre initial de cellules.

- d. Lors d'une expérience, on observe l'évolution du nombre de bactéries dans dix boîtes de Pétri. Chacune contient au départ 10 cellules pathogènes. Les résultats de cette expérience sont représentés sur le graphique suivant.



Évaluer à l'aide de ces courbes la valeur du coefficient α .

2. On introduit l'agent désinfectant de sorte que, à chaque instant, chaque cellule pathogène peut être neutralisée avec la probabilité β , et sinon elle peut se diviser avec la probabilité α précédente.

- a. Exprimer $\mathbb{E}(U_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(U_n)$, puis $\mathbb{E}(U_n)$ en fonction de n .
b. Déterminer une condition sur α et β pour que l'infection soit enrayée.

3. Simuler informatiquement l'évolution d'une population de cellules pathogènes comptant initialement N cellules lorsqu'on pulvérise l'agent infectant.

On choisira des valeurs de α et β permettant de décrire les différents cas de figure possible.

Corrigé

Planche 109
Agro-Veto 2015
Exercice.

L'exercice comprend trois parties. La partie 3 peut être abordée sans que la partie 2 n'ait été traitée.

Partie 1 : définition d'une fonction.

Soit t un réel positif ou nul. Pour tout réel x , on pose $P_t(x) = x^3 + tx^2 + 1$.

1. Démontrer que le polynôme P_t admet une unique racine que l'on notera $r(t)$.

On note r l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ qui, à tout réel positif t associe le réel $r(t)$.

Partie 2 : ébauche de la courbe de la fonction r .

On a construit la représentation graphique de la fonction P_2 sur la figure 1 ci-après.

2. Expliquer comment construire sur cette figure le point de coordonnées $(2, r(2))$.
3. Avec le logiciel Geogebra, on a répété la construction précédente en faisant varier t de 0 à 10 avec un pas de 0,1 et on a obtenu la figure 2 ci-après.

Que peut-on conjecturer relativement à $r(0)$? au signe de $r(t)$? à la limite de la fonction r en $+\infty$? à la branche infinie de la courbe de r en $+\infty$?

Démontrer ces conjectures.

4. Démontrer que la fonction r réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $] -\infty, -1]$.

Déterminer la fonction réciproque de la fonction r , que l'on nommera s .

5. En déduire que la fonction r est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Dresser le tableau de r .

Partie 3 : approche informatique.

6. Rédiger une fonction informatique qui, recevant $\mathbf{t}$ et un entier $\mathbf{n}$, renvoie une valeur approchée de $r(t)$ à 10^{-n} près.
7. Utiliser cette fonction pour construire la courbe de r . Commenter la courbe obtenue.

Figure 1

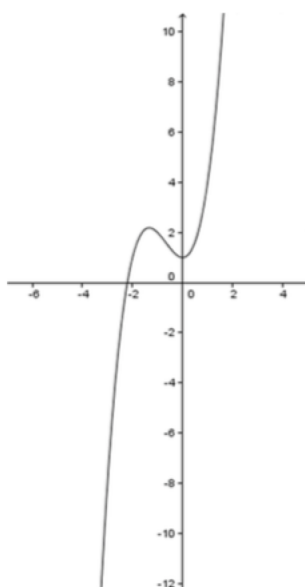


Figure 2

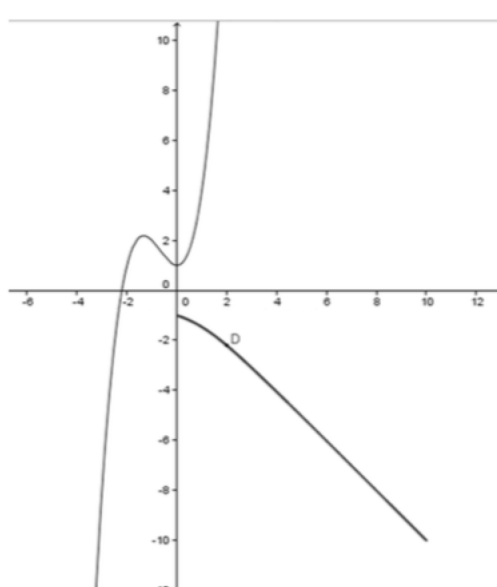


Planche 110
Agro-Veto 2015

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

1. On définit l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'. \end{aligned}$$

a. Justifier rapidement que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Déterminer la matrice de M de Φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Préciser les valeurs propres de Φ . L'application Φ est-elle diagonalisable ?

c. L'application Φ est-elle bijective ?

2. Pour tout entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on considère les polynômes :

$$T_p = X^p(1 - X)^p \text{ et } L_p = \frac{1}{p!}(T_p)^{(p)},$$

où $(T_p)^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de T_p . Fixons un entier $p \in \mathbb{N}$.

a. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_p .

b. Notons L_p sous la forme $L_p = \sum_{k=0}^p a_{k,p} X^k$. Établir que :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_{k,p} = (-1)^k \binom{p}{k} \binom{p+k}{k}.$$

c. Déterminer une relation entre $a_{k+1,p}$ et $a_{k,p}$ pour $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Préciser la valeur de $a_{0,p}$.

d. En vous appuyant sur la question 2.c, écrire une fonction informatique qui prend en argument un entier naturel p et renvoie les coefficients $a_{0,p}, a_{1,p}, \dots, a_{p,p}$ de L_p .

Tester cette fonction dans le cas où $p \in \{0; 1; 2\}$.

e. Dans cette question, $n = 2$ et Φ est donc l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'. \end{aligned}$$

Vérifier que (L_0, L_1, L_2) est une base de vecteurs propres de Φ .

Corrigé

Planche 111
Agro-Veto 2015

On rappelle que si S et T sont deux variables à densité indépendantes, de densités respectives f_S et f_T , alors $S + T$ est une variable à densité, de densité f_{S+T} définie par :

$$f_{S+T} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(t) f_T(x-t) dt.$$

1. Démontrer que si U suit une loi uniforme sur $[0, 1[$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la variable aléatoire $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)$ suit la loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X . On note $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, la variable S_n est à densité, de densité :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

3. On suppose qu'à un arrêt de bus, les différences entre les temps de passage successifs d'un autobus sont indépendantes, et de même loi exponentielle de paramètre λ . On définit un instant 0, puis on note $S_1, S_2, \dots$, les temps de passages successifs des autobus. On note alors, pour un instant $t > 0$ donné, N_t la variable égale au nombre d'autobus qui sont passés entre l'instant 0 et l'instant t à l'arrêt de bus. Autrement dit, on a : $\forall n \geq 0, [N_t = n] = [S_n \leq t < S_{n+1}]$.
 - a. Pour tout $n \geq 0$, exprimer l'événement $[N_t \geq n]$ à l'aide de la variable S_n .
Justifier alors que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$.
 - b. En déduire que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt , c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$.
4. On suppose plus précisément que les temps de passage successifs d'un autobus ont pour moyenne 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ donné pour prendre le bus. On se pose les questions suivantes :
 - combien de temps en moyenne va-t-il attendre le prochain bus ?
 - combien de temps en moyenne s'écoule entre le prochain bus et celui qui a précédé ?

On réalise le programme Python suivant :

```

from math import log
from random import random
def autobus():
    a = 0 ; b = 0 ; N = 10000
    for k in range(N):
        s = 0
        while s < 100 :
            r = s
            s = s - 10*log(random())
            u = s - 100 ; v = s - r
        a = a + u ; b = b + v
    print(a/N, b/N)
  
```

- a. Expliquer ce que représente les variables r , s , u et v dans le programme.
- b. Le programme affiche finalement les valeurs suivantes :

10.062252 20.315494

Pourquoi les valeurs affichées sont-elles paradoxales vis-à-vis de la situation ?

Corrigé

Planche 112
Agro-Veto 2015

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant. Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage amenant une boule noire (si on obtient la boule noire), et qui vaut 0 si on n'obtient jamais de boule noire. L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

1. a. Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m fois l'expérience décrite ci-dessus (en arrêtant les tirages après l'obtention de $t_{\max}$ boules blanches), et renvoie la proportion des expériences où une boule noire a été obtenue :

```
def estimeProbaEchec(m, tmax):
    compteSucces = 0
    for i .....:
        b = .....
        succes = 0
        tirages = 0
        while succes == ..... and tirages .....:
            tirages .....
            if random() .....:
                succes = 1
            else:
                .....
        compteSucces += .....
    return .....
```

- b. Utiliser cette fonction avec plus valeurs de $t_{\max}$ pour établir une conjecture en réponse au problème posé.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note B_n l'événement "les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules blanches" et on note $u_n = P(B_n)$.

- a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.
- b. Étudier les variations de la suite (u_n) puis démontrer que (u_n) converge vers un réel ℓ .
- c. Démontrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$, puis démontrer que la suite $(-\ln(u_n))$ est convergente.
- d. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = 1 - P(B_n)$.

Répondre alors au problème posé.

Corrigé

Corrigé de l'exercice de la [planche 1](#)

1. Si f est une fonction paire et impaire sur I alors elle est nulle sur I : pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x) = -f(x)$ donc $f(x) = 0$.

2. a. En écrivant ce script

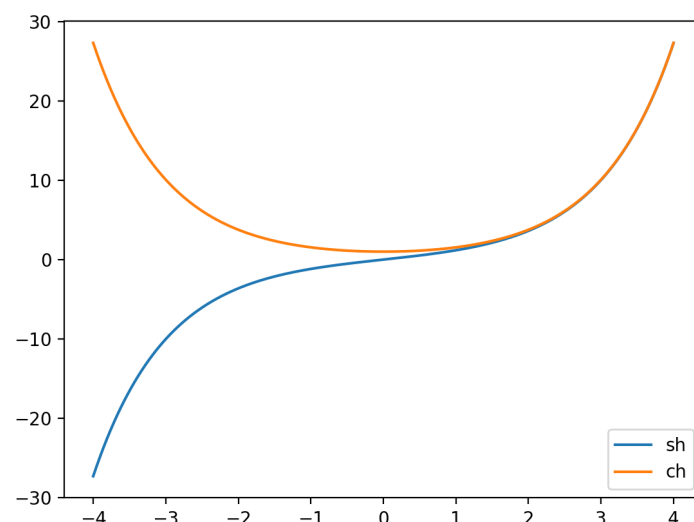
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def sh(x):
    return (np.exp(x)-np.exp(-x))/2

def ch(x):
    return (np.exp(x)+np.exp(-x))/2

abs = np.linspace(-4,4,1000)
plt.plot(abs,sh(abs),label = "sh")
plt.plot(abs,ch(abs),label = "ch")
plt.legend(loc="best")
plt.show()
```

on obtient cette représentation :



- b. On trouve immédiatement que sh est impaire et ch paire et :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} sh = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} ch = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} sh = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} ch = +\infty.$$

- c. Les fonction ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ par linéarité de la dérivabilité et : $ch' = sh$ et $sh' = ch$.

3. a. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \sin + b \cos + c sh + d ch = 0$. Ainsi $a \sin + c sh = -b \cos - d ch$. Puisque les fonction $a \sin + c sh$ et $-b \cos - d ch$ sont respectivement impaire et paire, elles sont nulles. En évaluant en π pour la première et $\frac{\pi}{2}$ pour la deuxième, on trouve que $a = b = c = d = 0$, prouvant la liberté de la famille $\mathcal{B} = (\sin, \cos, sh, ch)$.

- b. D'après la question précédente, $\dim F = 4$.

- c. Remarquons que $d(\cos) = -\sin \in F$, $d(\sin) = \cos \in F$, $d(sh) = ch$ et $d(ch) = sh$. Ainsi $d(F) = \text{Vect}(d(\mathcal{B})) \subset F$ par linéarité.

4. a. D'après la question précédente, on a immédiatement : $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- b. On trouve immédiatement que : $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^4 = I_4$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{cases} I_4 & \text{si } n \equiv 0 [4] \\ M & \text{si } n \equiv 1 [4] \\ M^2 & \text{si } n \equiv 2 [4] \\ M^3 & \text{si } n \equiv 3 [4] \end{cases}$$

- c. D'après la question précédente, $\varphi^4 = \text{Id}_F$ donc φ est un automorphisme, de réciproque φ^3 .

- d. Le script ci-dessous

```
import numpy.linalg as la
```

```
M = np.array([
    [0,-1,0,0],
    [1,0,0,0],
    [0,0,0,1],
    [0,0,1,0]])
```

```
print(la.eigvals(M))
```

nous donne les valeurs propres de M : $\text{Sp}(M) = \{1, -1, i, -i\}$.

La matrice M est diagonalisable en vertu de la condition suffisante de diagonalisabilité.

- e. En calculant $M^2 - I_4$, on trouve que $\text{Im}(\varphi^2 - \text{Id}_F) = \text{Vect}(-\sin, -\cos) = \text{Vect}(\sin, \cos)$.

Remarquons que $y'' - y = \varphi^2(y) - y \in (\varphi^2 - \text{Id}_F) \subset \text{Vect}(\sin, \cos)$.

Puisque $\text{ch} \notin \text{Vect}(\sin, \cos)$, l'équation $y'' - y = \text{ch}$ n'admet aucune solution dans F .

- f. Par le même raisonnement, on trouve que :

$$\text{Im}(\varphi - \text{Id}_F) = \text{Vect}(-\sin - \cos, \sin - \cos, \text{ch} - \text{sh}, \text{sh} - \text{ch}) = \text{Vect}(\sin, \cos, \text{ch} - \text{sh})$$

et $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_F) = \text{Vect}(\text{sh} + \text{ch})$.

Puisque $\sin - \text{sh} + \text{ch} \in \text{Im}(\varphi - \text{Id}_F)$, l'équation l'équation $y' - y = \sin - \text{sh} + \text{ch}$ admet une solution dans F .

[Retour à la planche 1](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 2](#)

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ par théorèmes opératoires. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$, la fonction f est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. On en déduit que toutes les intégrales u_n sont bien définies.

2. a.

`import numpy as np`

```
def f(x):
    if x == 0:
        return 1
    return np.sin(x)/x
```

b.

`def int_f(a,b):`
 `n = 1000`
 `h = (b-a)/n`
 `s = 0`
 `for k in range(n):`
 `s += f(a+k*h)`
 `return s*h`

3. La fonction $t \mapsto (2n+1)t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En posant $x = (2n+1)t$, on a $dx = (2n+1)dt$, donc, d'après le théorème de changement de variable, on a :

$$u_n = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f((2n+1)t) dt.$$

4. a. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par théorèmes opératoires (sin ne s'annule pas sur cet intervalle).

b. Remarquons que :

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad g(t) = \frac{\sin t - t}{t \sin t}$$

Or : $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)$ Ainsi :

$$g(t) = \frac{-\frac{t^3}{6} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)}{t \sin t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^3}{6t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t}{6}.$$

Poser $\tilde{g}(0) = 0$ est l'unique façon de prolonger g par continuité en 0.

c. Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\frac{\tilde{g}(t) - \tilde{g}(0)}{t} = \frac{g(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6}.$$

On en déduit que $\tilde{g}$ est dérivable en 0 et $\tilde{g}'(0) = -\frac{1}{6}$. De plus :

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \tilde{g}'(t) = g'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} = \frac{t^2 \cos t - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t}$$

Or :

$$t^2 \cos t - \sin^2 t = t^2 \left[1 - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)\right] - \left[t - \frac{t^3}{6} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)\right]^2 = t^2 - \frac{t^4}{2} - \left[t^2 - \frac{t^4}{3}\right] + o_{t \rightarrow 0}(t^4) = -\frac{t^4}{6} + o_{t \rightarrow 0}(t^4).$$

Ainsi : $\tilde{g}'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6} = \tilde{g}'(0)$. On en déduit que $\tilde{g}$ est $\mathcal{C}^1$ en 0 donc sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. a. Les fonctions $\tilde{g}$ et $\left(t \mapsto -\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t)\right)$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on trouve par intégration par parties que :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \tilde{g}(t) dt &= \left[-\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t) \tilde{g}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)t) \tilde{g}'(t) dt \\ &= \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t) \tilde{g}'(t) dt. \end{aligned}$$

b. On applique l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \tilde{g}(t) dt \right| \leq \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos((2n+1)t) \tilde{g}'(t)| dt \leq \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\tilde{g}'(t)| dt.$$

On conclut à l'aide du théorème d'encadrement de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \tilde{g}(t) dt = 0.$$

6. a. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 0$: $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} = 1$ et $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt) = 1$. La propriété est donc initialisée.

Supposons la propriété vraie pour un entier n . Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2kt) &= \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} + 2 \cos(2(n+1)t) \\ &= \frac{\sin((2n+1)t) + 2 \cos(2(n+1)t) \sin t}{\sin t} \\ &= \frac{\sin((2n+1)t) + \sin((2n+3)t) + \sin(-(2n+1)t)}{\sin t} \text{ via } 2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \\ &= \frac{\sin((2n+3)t)}{\sin t}. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire, ce qui conclut la récurrence.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], (2n+1)f((2n+1)t) - \sin((2n+1)t)\tilde{g}(t) &= \frac{\sin((2n+1)t)}{t} - \frac{\sin((2n+1)t)}{t} + \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt). \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que cette relation est encore vraie pour $t = 0$.

On conclut par linéarité de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(2n+1)f((2n+1)t) - \sin((2n+1)t)\tilde{g}(t) \right] dt = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt) dt = \frac{\pi}{2}.$$

7. D'après la question 3, la question précédente et la question 5.b, on a :

$$u_n = (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f((2n+1)t) dt = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \tilde{g}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

[Retour à la planche 2](#)

Corrigé de l'exercice de la **planche 3**

1. a. Soit $N \in \mathbb{N}$. On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^N \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^N \left[\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} \right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{N+2}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

- b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left[1 - \sqrt{\frac{k+1}{k+2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{k+2}} \right].$$

- c. Puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+2} = 0$, $\sqrt{1 - \frac{1}{k+2}} = 1 - \frac{1}{2k+4} + o_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k+1} \right)$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left[\frac{1}{2k+4} + o_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k+1} \right) \right] \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k\sqrt{k}}.$$

Remarquons que $|k\mathbb{P}(X = k)| \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2k}$. Puisque la série harmonique diverge, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ diverge aussi par comparaison de séries à termes positifs. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k\mathbb{P}(X = k)$ diverge absolument, i.e. X n'admet pas d'espérance.

- d. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par indépendance de X_1 et X_2 , on a :

$$\mathbb{P}(Y_2 > k) = \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > k) = \mathbb{P}(X_1 > k)\mathbb{P}(X_2 > k) = \frac{1}{k+2}.$$

Ainsi $\mathbb{P}(Y_2 = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_2 > 0) = \frac{1}{2}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y_2 = k) = \mathbb{P}(Y_2 > k-1) - \mathbb{P}(Y_2 > k) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Remarquons que $|k\mathbb{P}(Y_2 = k)| \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k}$. Puisque la série harmonique diverge, Y_2 n'admet pas d'espérance.

- e. Par le même argument, on a :

$$\mathbb{P}(Y_3 > k) = \mathbb{P}(\min(X_1, X_2, X_3) > k) = \mathbb{P}(X_1 > k)\mathbb{P}(X_2 > k)\mathbb{P}(X_3 > k) = \frac{1}{(k+2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi $\mathbb{P}(Y_3 = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_3 > 0) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y_3 = k) = \mathbb{P}(Y_3 > k-1) - \mathbb{P}(Y_3 > k) = \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(k+2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k+2} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

Remarquons que $|k\mathbb{P}(Y_3 = k)| \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2k^{\frac{5}{2}}}$ (à l'aide d'un DL similaire à celui réalisé en 1.c). En comparant avec la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$, on trouve que Y_3 admet une espérance.

- f. Le plus petit entier i pour lequel Y_i admet une espérance est $i = 3$.

2. a. La fonction est trivialement positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A f(x) dx = \left[\frac{2}{\pi} \arctan(x) \right]_0^A = \frac{2\pi}{\arctan(A)} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1.$$

On en déduit que f est une densité de probabilité.

- b. Remarquons que $|xf(x)| \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi x}$. Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, la variable Z n'admet pas d'espérance par critère d'équivalence de fonctions positives.
- c. On reprend le calcul de la question 2.a :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Z \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{2\pi}{\arctan(z)} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

[Retour à la planche 3](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 4](#)

1. On trouve immédiatement que l'univers-image de Z est $\mathbb{R}_-$. Pour tout $z > 0$, $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1$ et :

$$\forall z \in \mathbb{R}_-, \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(-4Z_0 \leq z) = \mathbb{P}\left(Z_0 > -\frac{z}{4}\right) = e^{\frac{z}{4}}$$

On vérifie alors sans difficulté que Z est à densité, de densité donnée par :

$$g : z \mapsto \frac{1}{4} e^{\frac{z}{4}} \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(z).$$

2. Pour tout $y < 0$, $\mathbb{P}(Y \leq z) = 0$ et :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(Y_0^2 \leq y) = \mathbb{P}(Y_0 \leq \sqrt{y}) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$$

On montre encore sans difficulté que Y est à densité, de densité donnée par :

$$h : y \mapsto \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(y).$$

3. On utilise la loi des grands nombres pour estimer cette probabilité :

```
import random as rd
import numpy as np

N = 1000
freq = 0
for k in range(N):
    Y0, Z0 = -np.log(1-rd.random()), -np.log(1-rd.random())
    if Y0**2 - 4*Z0 > 0:
        freq += 1
freq = freq/N
print("probabilité que P admette deux racines réelles distinctes : ", freq)
```

On trouve une probabilité environ égale à 0,22.

4. La variable Δ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité ; elle est donc à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)h(t) dt$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$g(t-x)h(t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-t \leq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq x \\ t \geq 0 \end{cases}$$

Si $x \leq 0$, alors :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} e^{\frac{x-t}{4}} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}-\frac{t}{4}}}{2\sqrt{t}} dt.$$

Si $x \geq 0$, alors :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{4} e^{\frac{x-t}{4}} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}-\frac{t}{4}}}{2\sqrt{t}} dt.$$

On pose $\Delta = Y + Z$. Montrer que la fonction f ci-dessus est une densité de Δ :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}-\frac{t}{4}}}{2\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad \forall x < 0, f(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}-\frac{t}{4}}}{2\sqrt{t}} dt.$$

5. Posons $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}-\frac{t}{4}}}{2\sqrt{t}} dt$.

$$\mathbb{P}(\Delta < 0) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{I}{4} e^{\frac{x}{4}} dx = I \int_{-\infty}^0 \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}} dx = I.$$

6. La fonction $\varphi : u \mapsto u^2$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Remarquons que $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$. En posant $t = u^2$, on a $dt = 2u du$. Ainsi, le théorème de changement de variable assure (en plus de la convergence de la seconde intégrale) que :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-u-\frac{u^2}{4}} du.$$

7. On utilise la méthode des rectangles :

```
def integrale(A):
    f = lambda x: np.exp(-x-(x**2)/4)
    n = A*1000
    s=0
    h = A/n
    for k in range(n):
        s += f(k*h)
    return A*s/n
```

8. a. $\lambda \in \text{Sp}(M) \Leftrightarrow \det(M - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - Y_0) + Z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda Y_0 + Z_0 = 0 \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$.

- b. Si M admet deux valeurs propres distinctes, i.e. P admet deux racines réelles distinctes, M est diagonalisable. Si M n'admet qu'une valeur propre, alors M est diagonalisable si et seulement si M est semblable à un multiple de l'identité (la vérification est laissée au lecteur...), ce qui est impossible ici. Si M n'admet aucune valeur propre réelle, M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La probabilité que M soit diagonalisable est donc $\mathbb{P}(\Delta > 0)$, ou encore $\mathbb{P}(\Delta \geq 0)$ car Δ est à densité, i.e. $1 - I$. À l'aide de l'outil informatique, on trouve que $1 - I \approx 0,24$, corroborant ainsi le résultat trouvé à la question 3.

[Retour à la planche 4](#)

Corrigé de l'exercice de la **planche 5**

1. On trouve immédiatement que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $x < 0$, $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(U \leq 1 - e^{-\lambda x}\right) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ car } 1 - e^{-\lambda x} \in]0, 1[.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi usuelle : X suit la loi exponentielle de paramètre λ .

2.

```
import random as rd
import numpy as np

def simuleX(lambd):
    u = rd.random()
    return -np.log(1-u)/lambd
```

3. a. Pour $n = 1$, on reconnaît une densité de la loi exponentielle de paramètre λ .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que f_n soit une densité de probabilité. On remarque que f_{n+1} est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Les fonctions $u : t \mapsto -e^{-\lambda t}$ et $v : t \mapsto \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarquons que $\lim_{+\infty} uv = 0$ par croissances comparées. Par intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t) dt$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ qui converge. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t) dt = \left[\frac{-e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1.$$

On en déduit que f_{n+1} est une densité, ce qui conclut la récurrence.

- b. Le résultat est trivial pour $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f_n est une densité de S_n . Remarquons que les variables aléatoires S_n et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions. Puisque $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ est la somme deux variables aléatoires indépendantes à densité, on trouve que S_{n+1} est à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$g : x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t) f_n(t) dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque :

$$f_n(x-t) f_1(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq x.$$

Si $x < 0$, alors $g(x) = 0$. Si $x \geq 0$, alors :

$$g(x) = \int_0^x f_1(x-t) f_n(t) dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-t)} \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1} dt = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^n}{n!} = f_{n+1}(x),$$

ce qui conclut la récurrence.

4. On suppose qu'à un arrêt, les différences entre les horaires de passage successifs d'un bus sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ . On définit un instant $S_0 = 0$, puis on note $S_1, S_2, \dots$ les horaires de passage successifs des bus. On note alors, pour $t > 0$, N_t le nombre de bus passés à l'arrêt entre l'instant 0 et l'instant t . Autrement dit :

$$\forall n \geq 0, [N_t = n] = [S_n \leq t < S_{n+1}].$$

- a. L'événement $[N_t \geq n]$ est réalisé si, et seulement si, au moins n bus sont passés entre les instants 0 et t , c'est-à-dire si, et seulement si, le n -ème bus est passé avant l'instant t , correspondant à la réalisation de l'événement $[S_n \leq t]$. Ainsi : $[N_t > n] = [S_n \leq t]$.

b. La variable aléatoire N_t étant à valeurs entières, on a :

$$\forall n \geq 0, P(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geq n) - \mathbb{P}(N_t \geq n+1) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t).$$

c. D'après les questions 3.b et 4.b, on a :

$$\forall n \geq 0, P(N_t = n) = \int_0^t f_n(x) dx - \int_0^t f_{n+1}(x) dx.$$

En reprenant l'intégration par parties de la question 3.a, on trouve que :

$$\forall n \geq 0, P(N_t = n) = \int_0^t f_n(x) dx - \int_0^t f_{n+1}(x) dx = \left[\frac{-e^{-\lambda x} (\lambda x)^n}{n!} \right]_0^t = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

On en déduit que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt .

5. a. Les variables r et s représentent des réalisations des variables aléatoires S_n et S_{n+1} . À chaque sortie de boucle **while**, ces variables représentent le temps d'arrivée du dernier bus avant le temps T et celui du premier après le temps T .

La variable u représente la durée entre le dernier bus passant avec le temps T et ce temps T , donc la durée d'attente de l'individu.

b. Cela semble paradoxal, car les bus arrivent en moyenne toutes les dix minutes mais le temps moyen entre deux bus successifs est en moyenne de 20 minutes.

[Retour à la planche 5](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 6](#)

1. a.

```
def ps(u,v):
    s = 0
    for k in range(len(u)):
        s += u[k]*v[k]
    return s
```

b.

```
import numpy as np

def Gram(L):
    n = len(L)
    G = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            G[i,j] = ps(L[i],L[j])
    return G
```

c. En définissant la liste $L = [[1, -1, 0], [1, 0, -1], [1, 1, 1]]$, on trouve que $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. La matrice de Gram de toute famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est symétrique (par symétrie du produit scalaire) réelle donc diagonalisable en vertu du théorème spectral.

3. a. Puisque

$$GX = \begin{pmatrix} \left\langle u_1, \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle u_p, \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \right\rangle \end{pmatrix} = 0.$$

Puisque G est une matrice inversible, $\text{Ker } G = \{0\}$ (en vertu du théorème du rang). On en déduit que $X = 0$ i.e. $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est donc bien libre.

b. (i) Le résultat découle directement du calcul de GX effectué à la question 3.a.

(ii) Par linéarité à gauche du produit scalaire, on a :

$$\left\| \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^p \lambda_i u_i, \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \right\rangle = \sum_{k=1}^p \lambda_i \left\langle u_i, \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \right\rangle = 0.$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0$.

(iii) Par liberté de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq p}$, $X = 0$. On a donc prouvé que $X = 0$ et donc que $\text{Ker } G = \{0\}$. On en déduit que G est inversible.

4. a. Pour tous vecteurs $a, b \in \mathbb{R}^n$, on a, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire :

$$\|a - b\|^2 = \langle a - b, a - b \rangle = \|a\|^2 - \langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle + \|b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle.$$

b. On trouve immédiatement que :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & (\frac{1}{2}) \\ & \ddots & \\ (\frac{1}{2}) & & 1 \end{pmatrix}$$

c. On trouve que $A^2 = (n+2)A - (n-1)I_n$, donc que $\frac{1}{n-1}A(A - (n+2)I_n) = I_n$. La matrice A est donc inversible.

d. On en déduit que la matrice $G = \frac{1}{2}A$ est inversible, donc que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre d'après la question 3. Par argument de cardinalité, c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

[Retour à la planche 6](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 7](#)

1.

```
import random as rd

def simuleXY(n):
    urnes = [0,0,0]
    Y = 3
    for k in range(n):
        i = rd.randint(0,2)
        if urnes[i] == 0:
            Y -= 1
        urnes[i] += 1
    return urnes[0], Y
```

2. On utilise la loi faible des grands nombres :

```
n = 10
N = 1000
sX, sY, sXY = 0, 0, 0
for _ in range(N):
    X, Y = simuleXY(n)
    sX, sY, sXY = sX + X, sY + Y, sXY + X*Y
print("E(X) est environ égal à ", sX/N)
print("E(Y) est environ égal à ", sY/N)
print("E(XY) est environ égal à ", sXY/N)
```

On trouve alors que $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$ sont environ égaux à 3,3384, 0.0531 et 0.1774 respectivement.

Il semble que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ donc que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

3. a. On trouve (par dénombrement) que $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ et $Y(\Omega) = \{1; 2\}$ La loi de (X, Y) est donnée par le tableau ci-dessous :

$\mathbb{P}(X = i, Y = j)$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 0$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
$i = 1$	$\frac{4}{9}$	0
$i = 2$	0	$\frac{1}{9}$

b. Les lois marginales de X et Y s'obtiennent par la formule des probabilités totales et on trouve :

i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

j	1	2
$\mathbb{P}(Y = j)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Donner la loi de X , puis celle de Y .

c. Le couple (X, Y) étant fini, il admet une covariance donnée par la formule de König-Huygens et le théorème du transfert :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 0.$$

4. a. La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$ en reconnaissant le modèle habituel. On a alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{3}$.
- b. La variable $Y_1 + Y_2 + Y_3$ correspond au nombre d'urnes vides à la fin de l'expérience, donc à Y . Puisque chaque Y_i suit la loi $\mathcal{B}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ (et donc admet une espérance), la variable aléatoire Y admet une espérance par linéarité, égale à : $\mathbb{E}(Y) = 3 \times \mathbb{E}(Y_1) = \frac{2^n}{3^{n-1}}$.
- c. Soient $i \in \{2, 3\}$ et $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Remarquons que $\text{card}(\Omega) = 3^n$. Réaliser l'événement $[X = j] \cap [Y_i = 1]$ revient à choisir j jetons à placer dans la première urne (et donc à placer le reste des jetons dans l'urne de numéro différent de 1 et i). Ainsi, $\text{card}([X = j] \cap [Y_i = 1]) = \binom{n}{j}$. Par équiprobabilité, on trouve bien que :

$$\forall i \in \{2, 3\}, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = j, Y_i = 1) = \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n}.$$

- d. En utilisant encore le théorème du transfert, on trouve que :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{2, 3\}, \mathbb{E}(XY_i) &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^1 jk \mathbb{P}(X = j, Y = k) \\ &= \sum_{j=1}^n j \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n} \\ &= \sum_{j=1}^n n \binom{n-1}{j-1} \times \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{n}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\ &= n \frac{2^{n-1}}{3^n}. \end{aligned}$$

Remarquons que la variable aléatoire XY_1 est constante égale à 0. En effet, si $Y_1 \neq 0$, alors $X = 0$. Ainsi $\mathbb{E}(XY_1) = 0$.

- e. Puisque $XY = XY_1 + XY_2 + XY_3$, $\mathbb{E}(XY) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$. D'après la formule de König-Huygens, on a :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$$

[Retour à la planche 7](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 11](#)

1. On utilise la remarque suivante : la probabilité un jour donné de choisir un éléphant déjà examiné est égale au rapport du nombre d'éléphants déjà examinés sur le nombre total d'éléphants.

```
import random as rd

def simuleY(k,n):
    examines = 0
    for i in range(k):
        x = rd.random()
        if x > examines/n:
            examines += 1
    return examines
```

2. La variable aléatoire Y_1 est constante égale à 1.

On remarque que $Y_2(\Omega) = \{1; 2\}$. À l'aide de la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \frac{n}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \text{ et } \mathbb{P}(Y_2 = 2) = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $G_k = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_k = i)X^i$.

- a. Remarquons que $Y_k(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$G_k(1) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_k = i) = 1.$$

Puisque $G'_k = \sum_{i=1}^n i\mathbb{P}(Y_k = i)X^i$, on trouve que :

$$G'_k(1) = \sum_{i=1}^n i\mathbb{P}(Y_k = i) = \mathbb{E}(Y_k).$$

- b. On trouve immédiatement que $G_1 = X$ et $G_2 = \frac{1}{n}X + \frac{n-1}{n}X^2$.

- c. Remarquons que :

$$[Y_{k+1} = i] = ([Y_{k+1} = i] \cap [Y_k = i]) \cup ([Y_{k+1} = i] \cap [Y_k = i-1]).$$

La réunion étant disjointe, on trouve :

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} = i) = \mathbb{P}(Y_k = i)\mathbb{P}_{Y_k=i}(Y_{k+1} = i) + \mathbb{P}(Y_k = i-1)\mathbb{P}_{Y_k=i-1}(Y_{k+1} = i-1).$$

On pouvait aussi appliquer la formule des probabilités totales avec $([Y_k = j])_{1 \leq j \leq n}$ pour système complet d'événements. Distinguons le cas $i = 1$. On a alors $\mathbb{P}(Y_k = i-1) = 0$ et ainsi :

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(Y_k = 1)\mathbb{P}_{Y_k=1}(Y_{k+1} = 1) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(Y_k = 1).$$

Si $i > 1$, on a alors :

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} = i) = \frac{i}{n}\mathbb{P}(Y_k = i) + \frac{n-i+1}{n}\mathbb{P}(Y_k = i-1).$$

Exprimer $\mathbb{P}(Y_{k+1} = i)$ à l'aide de probabilités faisant intervenir Y_k .

d. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
 G_{k+1} &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_{k+1} = i) X^i \\
 &= \frac{1}{n} \mathbb{P}(Y_k = 1) X + \sum_{i=2}^n \frac{i}{n} \mathbb{P}(Y_k = i) X^i + \sum_{i=2}^n \frac{n-i+1}{n} \mathbb{P}(Y_k = i-1) X^i \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \mathbb{P}(Y_k = i) X^i + \sum_{j=1}^n \frac{n-j}{n} \mathbb{P}(Y_k = j) X^{j+1} \\
 &= \frac{1}{n} X G'_k - \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} \mathbb{P}(Y_k = j) X^{j+1} + X \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(Y_k = j) X^j \\
 &= \frac{1}{n} X G'_k - \frac{1}{n} X^2 G'_k + X G_k \\
 &= \frac{1}{n} X (1 - X) G'_k + X G_k.
 \end{aligned}$$

En dérivant cette égalité et en l'évaluant en 1, on trouve :

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k).$$

La suite $(\mathbb{E}(Y_k))$ est donc arithmético-géométrique. On trouve après calculs que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(Y_k) = n - \frac{(n-1)^k}{n^{k-1}}.$$

4. a. Trivial : la linéarité de Φ découle de celle de la dérivation.

b. Aucune difficulté...

c. Il suffit de montrer que $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$. On est amené par la question précédente à considérer la famille $\mathcal{F}_n = (P_0, \dots, P_n)$. On commence par remarquer que tous ces polynômes appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrons la liberté de $\mathcal{F}_n$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $\mathcal{F}_\infty = (1-X, X)$ est trivialement libre. Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{F}_{n-1}$ est libre. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = 0$, i.e. :

$$\lambda_0(1-X)^n + \lambda_1 X(1-X)^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}(1-X) + \lambda_n X^n = 0.$$

En évaluant en 1, on trouve que $\lambda_n = 0$. En divisant la dernière relation par $(1-X)$ (le produit de polynômes est intègre), on est ramené à $\lambda_0(1-X)^{n-1} + \lambda_1 X(1-X)^{n-2} + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-2} = 0$. On en déduit que $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ par liberté de $\mathcal{F}_{n-1}$, ce qui conclut la récurrence.

Par argument de cardinalité, la famille $\mathcal{F}_n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Puisque $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) = \Phi(\text{Vect}(P_0, \dots, P_n)) = \text{Vect}(\Phi(P_0), \dots, \Phi(P_n)) \subset \mathbb{R}_n[X]$, la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

d. D'après la question précédente, $\mathcal{F}_n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de φ . On en déduit que φ est diagonalisable et $\text{Sp}(\Phi) = \left\{ \frac{j}{n}, j \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$.

5. a. On applique la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j (1-X)^{n-j} = (X+1-X)^n = 1 = G_0,$$

et :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_j = X^j (1-X)^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k X^{j+k} = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i.$$

- b. D'après la question 3.d, on a : $\forall k \in \mathbb{N}, G_{k+1} = \Phi(G_k)$. On montre par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}, G_k = \Phi^k(G_0)$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \mathbb{N}, G_k &= \Phi^k(G_0) \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Phi^k(P_j) \\
 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i \\
 &= \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right] X^i \text{ car } \forall i < 0, \binom{n-j}{i-j} = 0.
 \end{aligned}$$

- c. Puisque $\mathbb{P}(Y_k = i)$ est le coefficient de degré i de G_k , on trouve par identification que :

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(Y_k = i) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \\
 &= \sum_{j=0}^i \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(n-j)!}{(i-j)!(n-i)!} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \\
 &= \sum_{j=0}^i \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \\
 &= \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.
 \end{aligned}$$

[Retour à la planche 11](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 12](#)

1.

```
def produit_scalaire(u,v):
    s = 0
    for k in range(len(u)):
        s += u[k] * v[k]
    return s
```

2. a. L'application f^* est linéaire par linéarité du produit scalaire. Pour tout $u \in E$, $f^*(u) \in \text{Vect}(\mathcal{B}) = E$ donc f est un endomorphisme de E .
- b. On connaît l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle f^*(e_j) \mid e_i \rangle = \langle e_j \mid f(e_i) \rangle.$$

La relation est donc vraie pour tous vecteurs u et v de $\mathcal{B}$. Par bilinéarité du produit scalaire et linéarité de f et f^* , on trouve le résultat.

3. On utilise la fonction écrite en question 1.

```
def adjoint(f,u):
    n = len(u)
    res = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        e = np.zeros(n)
        e[i] = 1
        res[i] = produit_scalaire(u, f(e))
    return res
```

4. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

$$(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*))_{i,j} = \langle f^*(e_i) \mid e_j \rangle = \langle e_i \mid f(e_j) \rangle = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))_{i,j}^T$$

On en déduit la relation recherchée.

5. a. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est symétrique réelle donc f est diagonalisable (dans une base orthonormée).
- b. Soient $u \in \text{Ker}(f)$ et $w \in \text{Im } f$. On note alors $w = f(v)$. D'après ce qui précède, on a :

$$\langle u \mid w \rangle = \langle u \mid f(v) \rangle = \langle f(u) \mid v \rangle = 0.$$

On en déduit que $\text{Ker}(f) \subset (\text{Im } f)^\perp$ et $\text{Im}(f) \subset (\text{Ker } f)^\perp$. On obtient les égalités d'espaces vectoriels par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im } f)^\perp = n - \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } f \text{ et } \dim(\text{Ker } f)^\perp = n - \dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f.$$

6. a. Par définition, $F^\perp \subset E$. On a évidemment $0 \in F^\perp$. Soient $(u, v) \in F^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall w \in F, \langle \lambda u + v \mid w \rangle = \lambda \langle u \mid w \rangle + \langle v \mid w \rangle = 0.$$

On en déduit que $\lambda u + v \in F^\perp$, montrant ainsi que $F^\perp$ est stable par combinaisons linéaires, donc un sous-espace vectoriel de E .

- b. L'implication directe est triviale (c'est la définition de $F^\perp$). Supposons désormais que v est orthogonal à tout vecteur $u_1, \dots, u_p$. Soit $w \in F$. Il existe $(w_1, \dots, w_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $w = \sum_{i=1}^p w_i u_i$. Alors :

$$\langle v \mid w \rangle = \sum_{i=1}^p w_i \langle v \mid u_i \rangle = 0.$$

On en déduit que $v \in F^\perp$.

- c. La linéarité de Φ découle de la linéarité à gauche du produit scalaire. Puisque $\text{Vect}(\Phi(u_1), \dots, \Phi(u_p)) = \Phi(F) \subset \text{Im } \Phi$, étudions la liberté de la famille $(\Phi(u_1), \dots, \Phi(u_p))$. En effet, si cette famille est libre, elle est candidate pour être une base de $\text{Im } \Phi$ car elle est de cardinal maximal ($\mathbb{R}^p$ est de dimension p). Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\lambda_1 \Phi(u_1) + \dots + \lambda_p \Phi(u_p) = 0$. Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left\langle u_k \mid \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i \right\rangle = 0.$$

On déduit de la question 6.b que le vecteur $w = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$ appartient à $F^\perp$. Puisque $w \in F$, on trouve que $w = 0$ (w est en particulier orthogonal à lui-même) et ainsi que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. On trouve alors que $\dim \text{Im } \Phi = p = \dim \mathbb{R}^p$. L'application Φ est donc surjective.

- d. On invoque le théorème du rang et le résultat de la question 6.b

$$\dim F^\perp = \dim \text{Ker } \Phi = \dim E - \dim \text{Im } \Phi = n - \dim F.$$

[Retour à la planche 12](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 13](#)

1. On trouve sans difficulté que K_1 n'admet aucune valeur propre réelle, plus précisément que $\text{Sp}(K_1) = \{-i; i\}$. La matrice K_1 n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Après calculs, on trouve que les vecteurs propres respectivement associés à $-i$ et i sont les vecteurs des ensembles :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. On fera attention au décalage d'indice !

```
import numpy as np

def K(n):
    mat = np.zeros((n+1,n+1))
    for i in range(n):
        mat[i,i+1] = i+1
        mat[i+1,i] = -n+i
    return mat
```

3. On fera attention aux résultats obtenus par le code ci-dessous : il faut tenir compte des erreurs d'arrondi. *Un nombre comme $4.99600361e-16$ peut être considéré comme nul.*

```
import numpy.linalg as la

for n in range(1,11):
    print("valeurs propres de K_" + str(n))
    print(la.eigvals(K(n)))
```

En exécutant le code ci-dessus, on peut conjecturer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{Sp}(K_n) = \{(n-2k)i, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

4. a. Remarquons que $\cos(x) \neq 0$. En divisant par $\cos^n(x)$, on trouve que :

$$\lambda_0 f_0(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^n(x) \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{\sin^k(x)}{\cos^k(x)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \lambda_k \tan^k(x) = 0.$$

- b. Étudions la liberté de la famille $\mathcal{B}_n$. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = 0$. On considère le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_n X^n$. D'après la question précédente, on a alors :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, P(\tan x) = 0.$$

Puisque la fonction $\tan$ prend une infinité de valeurs sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ($\tan \left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) = \mathbb{R}$), le polynôme P admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. La famille $\mathcal{B}_n$ est ainsi libre et donc une base de l'espace vectoriel V_n qu'elle engendre. En particulier, on trouve que $\dim V_n = n+1$.

- c. L'application φ_n est linéaire par linéarité de la dérivation. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\varphi_n(f_k) = f'_k = -(n-k) \cos^{n-k-1} \sin^{k+1} + k \cos^{n-k+1} \sin^{k-1} = k f_{k-1} - (n-k) f_{k+1} \in V_n.$$

On en déduit que $\varphi_n(V_n) \subset V_n$ par linéarité de φ_n qui est donc bien un endomorphisme de V_n . On déduit des calculs effectués sa matrice dans la base $\mathcal{B}_n$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -n & 0 & 2 & \ddots & & (0) & \vdots \\ 0 & -n+1 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & n-1 & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & -2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = K_n.$$

d. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule de Moivre assure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\cos(x) + i \sin(x))^{n-k} (\cos(x) - i \sin(x))^k = e^{i(n-k)x} e^{-ikx} = e^{i(n-2k)x} = g_k(x).$$

e. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La formule du binôme de Newton assure que :

$$\begin{aligned} g_k &= (\cos + i \sin)^{n-k} (\cos - i \sin)^k \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} i^j \binom{n-k}{j} \cos^j \sin^{n-k-j} \sum_{\ell=0}^k (-i)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \cos^\ell \sin^{k-\ell} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} i^{j+k-\ell} \binom{n-k}{j} \binom{k}{\ell} \cos^{j+\ell} \sin^{n-(j+\ell)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} i^{j+k-\ell} \binom{n-k}{j} \binom{k}{\ell} f_{j+\ell} \in V_n. \end{aligned}$$

f. On vérifie sans difficulté que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, g_k est un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $i(n-2k)$. Puisque ces valeurs propres sont toutes distinctes et au nombre de $n+1$ (i.e. $\dim V_n$), on a trouvé toutes les valeurs propres de φ_n et donc de K_n (puisque K_n est la matrice de φ_n dans une base de V_n).

g. D'après la question précédente et par la condition suffisante de diagonalisabilité, la matrice K_n est diagonalisable (et ses espaces propres sont de dimension 1).

h. La matrice K_n est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de K_n . Or :

$$0 \in \text{Sp}(K_n) \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket, i(n-2k) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \Leftrightarrow n = 2k.$$

On en déduit que la matrice K_n est inversible si, et seulement si, n est impair.

i. Supposons n pair et notons $n = 2p$. Déterminer le noyau de K_n revient à déterminer l'espace propre de φ_n associé à la valeur propre 0. On l'a trouvé à la question 4.f : $\text{Ker}(\varphi_n) = \text{Vect}(g_p)$. Or :

$$\begin{aligned} g_p &= (\cos + i \sin)^p (\cos - i \sin)^p \\ &= (\cos^2 + \sin^2)^p \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \sin^{2j} \cos^{2p-2j} \\ &= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} f_{2j}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\text{Ker } K_n = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \binom{p}{1} & 0 & \cdots & 0 & \binom{p}{p-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right)$$

Corrigé de l'exercice de la [planche 15](#)

1. a. Soit
- $\lambda \in \mathbb{R}$
- .

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & Q(\lambda) & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix},$$

où $Q(\lambda) = 1 - (2 - \lambda)^2 = (\lambda - 1)(3 - \lambda)$. On en déduit que $\operatorname{Sp}(\varphi) = \{1, 3\}$. En appliquant le théorème du rang, on trouve que :

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_3) + \dim \operatorname{Ker}(A - 3I_3) = 3 - \operatorname{rg}(A - I_3) + 3 - \operatorname{rg}(A - 3I_3) = 2 \neq 3.$$

L'endomorphisme φ n'est donc pas diagonalisable.

- b. Puisque :

$$\operatorname{rg}(a_1, a_2, a_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On trouve après calculs que $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- c. Le théorème de changement de base assure qu'en posant
- $P = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- , on trouve que
- $A = PMP^{-1}$
- . En

exécutant le script ci-dessous, on trouve que $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

```
import numpy.linalg as la
p = np.array([[1,0,1],[1,0,-1],[0,1,0]])
print(la.inv(p))
```

2. a. La fonction
- h
- est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre avec condition initiale. On trouve donc immédiatement que :
- $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = e^{3t}$
- . Le code ci-dessous permet de tracer l'allure de la courbe représentative de
- h
- sur l'intervalle
- $[0, 1]$
- .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def h(t):
    return np.exp(3*t)

abs = np.linspace(0, 1, 1000)
ord = h(abs)
plt.plot(abs, ord)
plt.show()
```

- b. D'après le système différentiel vérifié par
- (f, g, h)
- , on a :
- $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$
- . On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}APY(t) = MY(t).$$

On obtient le résultat attendu sur la première ligne : $\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = 3u(t) + v(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

- c. La fonction
- u
- est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre et admet pour condition initiale
- $u(0) = \frac{1}{2}(f(0) + g(0)) = 1$
- . On trouve, après calculs et application de la méthode de variation de la constante, que :
- $\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = (t + 1)e^{3t}$
- .
-
- d. On trouve que :
- $\forall t \in \mathbb{R}, w'(t) = w(t)$
- et
- $w(0) = 0$
- . On en déduit que
- $w = 0$
- sur
- $\mathbb{R}$
- . Pour tout
- $t \in \mathbb{R}$
- , on a alors
- $f(t) = u(t) + w(t) = u(t)$
- et
- $g(t) = u(t) - w(t) = u(t)$
- .

[Retour à la planche 15](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 16](#)

1. a. On sait que les variables aléatoires $-\frac{1}{\lambda} \ln(U)$ et $-\frac{1}{\mu} \ln(V)$ suivent respectivement les lois exponentielles de paramètres λ et μ . *Attention, le jury pouvait attendre ici de retrouver le résultat.*

b.

```
import random as rd
import numpy as np

def simule_min(el,mu):
    x = -np.log(rd.random())/el
    y = -np.log(rd.random())/mu
    return min(x,y)
```

- c. Posons $Z = \min(X, Y)$. On trouve immédiatement que $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t < 0$, $\mathbb{P}(Z \leq t) = 0$. Par indépendance de X et Y , on a :

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}(Z \leq t) = 1 - \mathbb{P}(Z > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t, Y > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$$

On en déduit que la variable aléatoire $\min(X, Y)$ est à densité et suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

- d. On trouve sans difficulté que la variable aléatoire $-Y$ est à densité et, de densité donnée par :

$$f_{-Y} : t \mapsto \begin{cases} \mu e^{\mu t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

- e. La variable $X - Y$ est la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité, elle est donc aussi à densité, de densité donnée par le produit de convolution :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_{-Y}(t) dt$$

où $f_X : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est une densité de X .

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_X(x-t)f_{-Y}(t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-t \geq 0 \\ t \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq x \\ t \leq 0 \end{cases},$$

Si $x > 0$, on a alors :

$$h(x) = \int_{-\infty}^0 \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mu e^{\mu t} dt = \lambda \mu e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda+\mu)t} dt = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda x}.$$

Si $x \leq 0$, on a alors :

$$h(x) = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mu e^{\mu t} dt = \lambda \mu e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^x e^{(\lambda+\mu)t} dt = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} e^{\mu x}.$$

- f. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = \mathbb{P}(X - Y \leq 0) = \int_{-\infty}^0 h(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} e^{\mu x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Calculer alors la probabilité de l'événement $[X \leq Y]$.

2. a. On utilise la loi faible des grands nombres pour estimer les probabilités des événements considérées. En exécutant le code ci-dessous, on trouve que les probabilités respectives que X_2 puis X_3 soient des creux sont environ égales à 0,5 et 0,2.

```

def loi_exp(mu):
    return -np.log(1-rd.random())/mu

N = 10000
s2, s3 = 0,0
for k in range(N):
    x1, x2, x3, x4 = loi_exp(1), loi_exp(2), loi_exp(1), loi_exp(2)
    if x2 <= x1 and x2 <= x3:
        s2 += 1
    if x3 <= x2 and x3 <= x4:
        s3 += 1
print(s2/N, s3/N)

```

- b. L'événement “ X_2 est un creux” est $[X_2 \leq X_1] \cap [X_2 \leq X_3] = [X_2 \leq \min(X_1, X_3)]$. D'après la question 1.c, la variable aléatoire $\min(X_1, X_3)$ suit la loi exponentielle de paramètre 2. Par indépendance mutuelle de X_1, X_2 et X_3 , et le lemme des coalitions, on trouve que X_2 et $\min(X_1, X_3)$. En appliquant le résultat de la question 1.f, on trouve que $\mathbb{P}(X_2 \leq \min(X_1, X_3)) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$.

De la même manière, on trouve la probabilité que “ X_3 est un creux” :

$$\mathbb{P}(X_3 \leq \min(X_2, X_4)) = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}.$$

3. a. On remarque si l'événement “ X_2 et X_3 sont des creux” implique l'événement $X_2 = X_3$ qui est de probabilité nulle. On en déduit que la probabilité que X_2 et X_3 sont des creux” est nulle.
- b. En appliquant le lemme des coalitions, on trouve que les événements “ X_4 est un creux” et “ X_8 est un creux” sont-ils indépendants (par indépendance de X_3, X_4, X_5, X_7, X_8 et X_9).
- c. Par indépendance des “creux” à ces positions, on trouve que le nombre de creux parmi ces 10 variables suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$ (on reconnaît le nombre de succès lors de la répétition de 10 expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre).

[Retour à la planche 16](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 17](#)

1. La variable aléatoire Y_1 est égale au nombre de succès ("obtenir une boule blanche") lors de la répétition de 3 expériences de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès $\frac{1}{3}$, donc Y_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$.

2. Par le même raisonnement, sachant que $[Y_n = k]$, la variable aléatoire Y_{n+1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{k}{3}\right)$.

```

import random as rd

def simule_Y(n):
    L = [1]
    for k in range(n):
        s = 0
        for i in range(3):
            if rd.random() < L[k]/3:
                s += 1
        L.append(s)
    return L

```

4. a. Sachant que $[Y_n = k]$, la variable aléatoire Y_{n+1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{k}{3}\right)$. L'espérance de cette loi, étant égale à k , le résultat est immédiat.

b. Les variables aléatoires Y_{n+1} et Y_n étant finies, elles admettent une espérance. En utilisant la formule des probabilités totales avec $([Y_n = k])_{0 \leq k \leq 3}$ comme système complet, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y_{n+1}) &= \sum_{j=0}^3 j \mathbb{P}(Y_{n+1} = j) \\
 &= \sum_{j=0}^3 j \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(Y_n = k) \mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) \\
 &= \sum_{k=0}^3 \left(\sum_{j=0}^3 j \mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = j) \right) \mathbb{P}(Y_n = k) \\
 &= \sum_{k=0}^3 k \mathbb{P}(Y_n = k) \\
 &= \mathbb{E}(Y_n).
 \end{aligned}$$

c. On trouve alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_0) = 1$.

5. En utilisant la formule des probabilités totales avec $([Y_n = k])_{0 \leq k \leq 3}$ comme système complet, on trouve :

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} + c_{n+1} &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(Y_{n+1} = 2) \\
 &= \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(Y_n = k) \mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 1) + \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(Y_n = k) \mathbb{P}_{[Y_n=k]}(Y_{n+1} = 2) \\
 &= \sum_{k=1}^2 \mathbb{P}(Y_n = k) \frac{k(3-k)^2}{9} + \sum_{k=1}^2 \mathbb{P}(Y_n = k) \frac{k^2(3-k)}{9} \\
 &= \frac{2}{3} \mathbb{P}(Y_n = 1) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(Y_n = 2) \\
 &= \frac{2}{3} (b_n + c_n).
 \end{aligned}$$

6. La suite $(b_n + c_n)$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$, elle converge donc vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_n \leq b_n + c_n$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ et de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $[Y_n = 0] \subset [Y_{n+1} = 0]$, $a_n \leq a_{n+1}$. La suite (a_n) est donc croissante. Puisqu'elle est majorée par 1, elle converge. La suite (d_n) converge par le même argument.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $1 = \mathbb{E}(Y_n) = b_n + 2c_n + 3d_n$, la suite (d_n) converge vers $\frac{1}{3}$. Puisque $a_n = 1 - b_n - c_n - d_n$, la suite (a_n) converge vers $\frac{2}{3}$.
9. On note T le numéro de la première urne ne contenant que des boules rouges ou que des boules blanches.
- a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que l'événement $[T > n] = [Y_n = 1] \cup [Y_n = 2]$. En effet, si l'urne n ne contient pas que des boules de même couleur, c'est qu'il y a encore une ou deux boules blanches. Ainsi, par disjonction des cas, on trouve que :

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(Y_n = 1) + \mathbb{P}(Y_n = 2) = b_n + c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

- b. Remarquons que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n - 1) - \mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

La variable T suit donc la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$. Elle admet une espérance, égale à 3.

[Retour à la planche 17](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 20](#)

1. a. On réalise les produits matriciels suivants :

$$X^T DX = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2.$$

b. • Supposons que tous les coefficients de D soient strictement positifs. Soit X un vecteur colonne non nul. Il existe donc $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_{i_0} \neq 0$. D'après la question précédente, on a :

$$X^T DX = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 \geq d_{i_0} x_{i_0}^2 > 0.$$

• Réciproquement, supposons que $X^T DX > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En choisissant le vecteur colonne X tel que $x_i = 1$ et $x_k = 0$ pour tout $k \neq i$, on trouve que :

$$0 < X^T DX = d_i.$$

On en déduit que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs si et seulement si $X^T DX > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul.

2. a. Le vecteur U_1 est non nul et $AU_1 = 4U_1$ donc U_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

b. On prouve une propriété du cours :

$$AX = X \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(A - I_3).$$

L'ensemble des vecteurs X tels que $AX = X$ est donc $\text{Ker}(A - I_3)$ qui est bien un sous-espace propre de A (associé à la valeur propre 1).

Remarquons que $AU_2 = U_2$ et $AU_3 = U_3$ puis que les vecteurs U_2 et U_3 sont normés et orthogonaux ($U_2^T U_3 = 0$). On en déduit que la famille (U_2, U_3) est une famille orthonormée donc libre. En particulier la dimension de l'espace propre de A associé à la valeur propre 1 est supérieure ou égale à 2. Ainsi la somme des dimensions des espaces propres de A est supérieure ou égale à 3 donc est égale à 3 (car $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). On en déduit en particulier que $\dim \text{Ker}(A - I_3) = 2$ puis que (U_2, U_3) en est une base (c'est une famille libre de cet espace de même cardinal que la dimension de l'espace en question).

On a donc bien prouvé que $\text{Ker}(A - I_3)$ admet pour base orthonormée (U_2, U_3) .

c. La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}U_1, U_2, U_3\right)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers cette base orthonormée. On trouve alors que :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et $P^T P = I_3$. On trouve alors que :

$$A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P D^2 P^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. On trouve alors que :

$$A = P D^2 P^T = (PD) (DP^T) = (PD) (PD)^T = MM^T$$

où $M = PD$ (on pouvait aussi choisir $M = PDP^T$). Puisque $0 \notin \text{Sp}(D)$, D est inversible. La matrice M est donc inversible (comme produit de deux matrices inversibles).

- e. Remarquons que $C^T = \left((M^{-1})^T\right)^T B^T (M^{-1})^T = M^{-1} B (M^{-1})^T = C$. La matrice C est bien symétrique réelle. D'après le théorème spectral, il existe une matrice diagonale Δ et une matrice orthogonale Q telles que $C = Q\Delta Q^T$. Ainsi :

$$MQ\Delta(MQ)^T = MQ\Delta Q^T M^T = MCM^T = MM^{-1}B(M^{-1})^T M^T = B.$$

- f. On trouve immédiatement que : $RR^T = MQQ^T M^T = MM^T = A$.
3. a. Pour tout vecteur non nul X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$0 < X^T(A - B)X = X^T(RR^T - R\Delta R^T)X = X^T(RI_3R^T - R\Delta R^T)X = X^TR(I_3 - \Delta)R^TX$$

On pourrait poser $S = R(I_3 - \Delta)R^T$, mais S dépendrait aussi de R .

Posons $S = I_3 - \Delta$. Soit Y un vecteur colonne non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède et par inversibilité de R , on a :

$$Y^T SY = Y^T(I_3 - \Delta)Y = (Y^T R^{-1}) R(I_3 - \Delta) R^T \left((R^T)^{-1} Y\right) = \left((R^{-1})^T Y\right)^T R(I_3 - \Delta) R^T \left((R^{-1})^T Y\right) > 0.$$

- b. Remarquons que S est une matrice diagonale. D'après la question 1.b, il vient que les coefficients diagonaux de $S = I_3 - \Delta$ sont strictement positifs, donc que ceux de Δ sont tous strictement inférieurs à 1.

[Retour à la planche 20](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 21](#)

1. a. On commence par remarquer que $N(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k l'événement "on tire une boule blanche au k -ème tirage".

$$\text{Si } k = 2, \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{1}{2} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

Si $k \geq 3$, on trouve, via la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = k) &= \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-2} \cap \overline{B_{k-1}}) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \dots \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-3}}(B_{k-2}) \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(\overline{B_{k-1}}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{k-2}{k-1} \times \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{k(k-1)}. \end{aligned}$$

- b. Pour tout $k \geq 2$, $k\mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{k-1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k}$. Puisque la série harmonique diverge et puisque la série $\sum_{k \geq 2} k\mathbb{P}(N = k)$ est à termes positifs, elle diverge d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs.

2. a. Notons $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$. Remarquons que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

Si $x < 0$, $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$. Si $x \geq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\ln(1 - U) \geq -\lambda x) = \mathbb{P}(1 - U \geq e^{-\lambda x}) = \mathbb{P}(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ car } 1 - e^{-\lambda x} \in [0, 1[.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi usuelle : $-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ .

b.

```
import random as rd
import numpy as np

def T(1):
    N = 2
    while rd.random() > 1/N: # tant qu'on tire une boule blanche
        N += 1
    maxi = -np.log(1-rd.random())/1 # simulation de X_1
    for k in range(N-1):
        x = -np.log(1-rd.random())/1 # simulation de X_2, ..., X_N
        if x > maxi:
            maxi = x
    return maxi
```

- c. En exécutant le code ci-dessous, on trouve que $\mathbb{E}(T) \approx 2$ (d'après la loi faible des grands nombres).

```
nb_exp = 10000
somme = 0
for k in range(nb_exp):
    somme += T(1)
print("moyenne empirique = ", somme/nb_exp)
```

3. a. Pour tout $t \in [0, x]$, $t \neq 1$; ainsi :

$$\sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t} = \frac{1-t^{n+1}}{1-t} + \frac{t^{n+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t}$$

- b. En intégrant sur $[0, x]$ l'égalité précédente (toutes les fonctions en jeu sont continues sur $[0, x]$) et par linéarité de l'intégrale, on trouve :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^n t^k dt + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt.$$

Or :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x)$$

et :

$$\int_0^x \sum_{k=0}^n t^k dt = \sum_{k=0}^n \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k}.$$

On en déduit que :

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt.$$

- c. Pour tout $t \in [0, x]$, $0 < 1-x \leq 1-t$ et ainsi $0 \leq \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{t^{n+1}}{1-x}$. Par croissance de l'intégrale ($0 \leq x$), on trouve que :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x} dt = \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)} = 0$, on trouve par encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt = 0.$$

Par passage à la limite de la question 3.b, on trouve immédiatement que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

- d. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{x^k}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{x^k}{k-1} - \frac{x^k}{k} \right) \\ &= \left(\sum_{k=2}^n \frac{x^k}{k-1} \right) - \left(\sum_{k=2}^n \frac{x^k}{k} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k} \right) - \left(\sum_{k=2}^n \frac{x^k}{k} \right) \\ &= \left(-\frac{x^{n+1}}{n} + x \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \right) - \left(-x + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x) = \varphi(x). \end{aligned}$$

On en déduit en particulier que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{x^k}{k(k-1)}$ converge et que sa somme vaut $\varphi(x)$.

4.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(N=k)}(T \leq x) &= \mathbb{P}_{(N=k)}(\max(X_1, \dots, X_k) \leq x) \\ &= \mathbb{P}_{(N=k)}(X_1 \leq x, \dots, X_k \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_k \leq x) \text{ par indépendance de } N \text{ et } X_1, \dots, X_k \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \dots \mathbb{P}(X_k \leq x) \\ &= (F(x))^k. \end{aligned}$$

Puisque $([N = k])_{k \geq 2}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que (et la série converge par σ -additivité) :

$$\mathbb{P}(T \leq x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}_{(N=k)}(T \leq x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(F(x))^k}{k(k-1)} = \varphi(F(x)) \text{ car } F(x) \in [0, 1[.$$

5. La fonction de répartition de T est donc la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(1 - e^{-\lambda x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Remarquons que φ est dérivable sur $[0, 1[$ et :

$$\forall x \in [0, 1[, \varphi'(x) = 1 - \ln(1 - x) - 1 = -\ln(1 - x).$$

Par composition, cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Une densité de T est donnée par la fonction :

$$g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \varphi'(1 - e^{-\lambda x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

6. La variable aléatoire T admet une espérance si, et seulement si l'intégrale ci-dessous converge :

$$\int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$ converge en tant que moment d'ordre 2 de la loi exponentielle de paramètre λ (par exemple $\mathbb{E}(X_1^2)$), T admet une espérance par linéarité et, en utilisant la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{E}(T) = \lambda \mathbb{E}(X_1^2) = \lambda (\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)) = \frac{1}{\lambda} + 1.$$

Si $\lambda = 1$, on trouve $\mathbb{E}(T) = 2$, ce qu'on a trouvé de manière approchée à la question 2.c.

[Retour à la planche 21](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 23](#)

1. On propose deux solutions, l'une en modélisant les sommets par des entiers de 0 à 3, l'autre à l'aide d'un dictionnaire.

```
import random as rd

def positionA(n):
    voisins = [[1,2,3], [0,2], [0,1,3], [0,2]]
    pos = 0
    nb_A = 1
    for k in range(n):
        pos = rd.choice(voisins[pos])
        if pos == 0:
            nb_A += 1
    return nb_A/n

def positionA(n):
    voisins = {"A":["B","C","D"], "B":["A","C"], "C":["A","B","D"], "D":["A","C"]}
    pos = "A"
    nb_A = 1
    for k in range(n):
        pos = rd.choice(voisins[pos])
        if pos == "A":
            nb_A += 1
    return nb_A/n
```

En exécutant le programme ci-dessous, on trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \approx 0,3$ (en supposant que la suite converge).

```
for k in range(1,6):
    n = 10**k
    print(positionA(n))
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque (A_n, B_n, C_n, D_n) forme un système complet d'événements, on trouve via la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(D_n)\mathbb{P}_{D_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}d_n.$$

De la même manière, on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n, b_{n+1} = d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n.$$

3. a. En remarquant que $d_0 = b_0 = 0$ et $b_{n+1} = d_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites (b_n) et (d_n) sont égales. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{9}(a_n + c_n) = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}b_{n+1}.$$

La suite (b_n) vérifie donc une relation de récurrence d'ordre 2. Après résolution de l'équation caractéristique associée et en utilisant les conditions initiales ($b_0 = 0$ et $b_1 = \frac{1}{3}$), on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3} \right)^n \right).$$

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} + c_{n+1} = 3b_{n+2} = \frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3} \right)^{n+2} \right).$

- c. On trouve sans difficulté que la suite $(a_n - c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_n - c_n).$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n - c_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n (a_0 - c_0) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

- d. En utilisant les deux questions précédentes, on trouve que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, a_n &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] \\ c_n &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{5} \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right]. \end{aligned}$$

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les variables aléatoires X_n et Y_n ne prennent pour valeurs que 0 et 1. Elles suivent donc des lois de Bernoulli de paramètres respectifs :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(B_n \cup C_n) = b_n + c_n \text{ et } \mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(C_n \cup D_n) = b_n + c_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right).$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(Y_n = 1) &= c_n - (b_n + c_n)^2 \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{20} + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^n & \text{si } n \text{ est pair non nul} \\ \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

- Si $n = 0$, les événements $[X_n = 1]$ et $[Y_n = 1]$ sont indépendants. Puisque les variables X_n et Y_n ne prennent que deux valeurs, elles sont indépendantes (si A et B sont indépendants, alors les variables des couples $(A, \bar{B})$, $(\bar{A}, B)$ et $(\bar{A}, \bar{B})$ le sont aussi).
- Si n est pair non nul, alors :

$$\mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(Y_n = 1) \geq \frac{1}{20} - \frac{1}{36} > 0$$

Les variables aléatoires X_n et Y_n ne sont donc pas indépendantes.

- Si n est impair, on vérifie sans difficulté (en machine par exemple que $\mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(Y_n = 1) \neq 0$ pour $n = 1$ et $n = 3$ et :

$$\forall n \geq 5, \mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(Y_n = 1) \geq \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^5 > 0$$

Les variables aléatoires X_n et Y_n ne sont donc pas indépendantes.

Conclusion : X_n et Y_n sont indépendantes si, et seulement si $n = 0$.

- c. Les variables aléatoires X_n et Y_n sont finies, le couple (X_n, Y_n) admet donc une covariance, donnée par la formule de König-Huygens :

$$\text{Cov}(X_n, Y_n) = \mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{P}(X_n = 1, Y_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

5. a. À l'aide de la question 2, on trouve immédiatement :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Soit λ une valeur propre de M et soit X un vecteur propre associé. On trouve alors que $M^4X - \frac{7}{9}M^2X - \frac{2}{9}MX = 0$.

Puisque $M^kX = \lambda^kX$ (pas au programme mais à connaître) pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left(\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda\right)X = 0$$

Puisque $X \neq 0$ (c'est un vecteur propre), $\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0$.

c. Remarquons que 0 et 1 sont solutions évidentes de l'équation précédente. Après factorisation, on trouve que :

$$\lambda^4 - \frac{7}{9}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda^2 + \lambda + \frac{2}{9} = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{0; 1; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}.$$

On obtient alors que $\text{Sp}(M) \subset \left\{0; 1; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$.

On vérifie sans difficulté que 0, 1, $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{3}$ sont valeurs propres et :

$$E_0(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad E_{-\frac{1}{3}}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E_{-\frac{2}{3}}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Puisque la matrice M admet 4 valeurs propres distinctes et est de taille 4, elle est diagonalisable et $M = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

d. On peut montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^nU_0 = PD^nP^{-1}U_0$. Il suffit donc de calculer $PD^nP^{-1}U_0$ pour déterminer a_n , b_n , c_n et d_n en fonction de n .

[Retour à la planche 23](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 24](#)

1. On trouve immédiatement que $X = \sum_{i=1}^N X_i$.

2.

`import numpy as np`

```
def X(l,m):
    x = 0
    N = np.random.poisson(l)
    for k in range(N):
        x += np.random.poisson(m)
    return x
```

3. Si aucun client n'est passé par la caisse au cours de la première heure, aucun article non plus. Ainsi $\mathbb{P}_{[N=0]}(X=0) = 1$ et $\mathbb{P}_{[N=0]}(X=0) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

4. C'est du cours, mais il faut savoir refaire la démonstration (à l'aide de la formule des probabilités totales).

5. Puisque $([N=k])_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n, N=k) \quad (\text{la série converge par } \sigma\text{-additivité}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = n, N=k) \quad \text{car } \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = n, N=0) = 0 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = n) \mathbb{P}(N=k) \quad \text{par indépendance de } N \text{ et } X_1, \dots, X_k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k\mu)^n}{n!} e^{-k\mu} \times \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k! n!} e^{-(\lambda+k\mu)}. \end{aligned}$$

6. En admettant l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et les hypothèses de permutation des ordres de sommation, on trouve que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}(X=n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = n) \mathbb{P}(N=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k) \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = n) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k) \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mu \mathbb{P}(N=k) \\ &= \mu \mathbb{E}(N) = \lambda\mu. \end{aligned}$$

7. En appliquant la formule des probabilités totales avec le même système complet d'événements, on trouve que :

$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = 0) \mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\mu} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{-\mu})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-\mu}} = e^{\lambda(e^{-\mu}-1)},$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (k\mu)^n}{k!n!} e^{-(\lambda+k\mu)} = \frac{\mu^n e^{-\lambda}}{n!} \sum_{k=1}^{+\infty} k^n \frac{(\lambda e^{-\mu})^k}{k!} = \frac{\mu^n e^{-\lambda}}{n!} f_n(\lambda e^{-\mu}).$$

8. On trouve immédiatement que $f_0(x) = e^x - 1$ pour tout réel x et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{x^k}{k!} = e^x \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{x^k}{k!} e^{-x} = e^x \mathbb{E}(Z) = x e^x \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{P}(x).$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^{n+1} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^n \frac{x^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} (\ell+1)^n \frac{x^{\ell+1}}{\ell!} \\ &= x + \sum_{\ell=1}^{+\infty} (\ell+1)^n \frac{x^{\ell+1}}{\ell!} \\ &= x + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \ell^i \frac{x^{\ell+1}}{\ell!} \\ &= x + \sum_{i=0}^n x \binom{n}{i} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell^i \frac{x^\ell}{\ell!} \\ &= x + \sum_{i=0}^n x \binom{n}{i} f_i(x). \end{aligned}$$

10. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = x + x f_0(x) + x f_1(x) = x + x(e^x - 1) + x^2 e^x.$$

En déduire une expression de la fonction f_2 .

11. On propose une fonction récursive.

```
import numpy as np
import scipy.special as scis
```

```
def f(n,x):
    if n == 0:
        return np.exp(x)-1
    s = 1
    for i in range(n):
        s += scis.binom(n-1,i)*f(i,x)
    return x*s
```

On fera attention à la relation de récurrence : on écrit $f_n(x)$ (et non $f_{n+1}(x)$) en fonction de $f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)$.

12.

```
def loiX(l,mu,n):
    if n==0:
        return np.exp(l*(np.exp(-mu) -1))
    return mu**n * np.exp(-1)/scis.factorial(n) * f(n,l*np.exp(-mu))
```

[Retour à la planche 24](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 25](#)

1. a. La fonction f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $] \lim_{0+} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie sans difficulté que $f(0,1) < 1 = n < f(n)$. Par croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$, on cherche donc x_n dans l'intervalle $[0, 1; n]$.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,n):
    return np.log(x)+x - n

def dichotomie(a,b,n,eps):
    while b-a > 2*eps:
        c = (a+b)/2
        if f(a,n)*f(c,n)<0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2

x= [dichotomie(0.01,n,n,10**(-3)) for n in range(1,11)]
print(x)

abs = list(range(1,11))
plt.plot(abs,x)
plt.show()

```

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_{n+1}) = n + 1 > n = f(x_n)$. Puisque f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $x_{n+1} > x_n$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.
2. a. La fonction $g : x \mapsto \ln x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

On en déduit que la fonction g est croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Elle atteint donc son maximum en 1, qui vaut -1. La fonction g est donc strictement négative, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x < x$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} + \ln\left(\frac{n}{2}\right) < n = f(x_n) < n + \ln(n) = f(n)$, on trouve que $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$ par croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - c. D'après la question précédente et par comparaison de limites, on trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 2.b, on a

$$\frac{\ln(n) - \ln(2)}{n} \leq \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}.$$

On conclut par croissances comparées : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0$. Puisque $\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln(x_n)}{n}$, on trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$, i.e. $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

- b. D'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$. Ainsi :

$$x_{n+1} - x_n = n + 1 - \ln(x_{n+1}) - n + \ln(x_n) = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

4. On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n - x_n}{\ln n}$.

a. En utilisant la même idée qu'à la question précédente, on trouve que

$$u_n - 1 = \frac{n - x_n - \ln n}{\ln n} = \frac{\ln x_n - \ln n}{\ln n} = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

b. D'après la question précédente, $1 - u_n = -\frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} = -\frac{1}{\ln n} \ln\left(1 + \frac{x_n - n}{n}\right)$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n} = 0$, on trouve que $1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n - x_n}{n \ln n} = \frac{1}{n} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

c. En écrivant $1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, on trouve que :

$$x_n = n - \ln(n) u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \ln n \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

[Retour à la planche 25](#)

Corrigé de l'exercice de la **planche 29**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto [(1-x)e^x]^n$ est continue sur le segment $[0, 1]$. La suite (I_n) est donc bien définie. De plus, on trouve que $I_0 = 1$ et :

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx = [(1-x)e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = e - 2.$$

2. a. C'est l'application directe du théorème des sommes de Riemann.

b.

```
import numpy as np

def I(n):
    N = 1000
    s = 0
    for k in range(N):
        s += ((1-k/N)*np.exp(k/N))**n
    return s/N
```

- c. Le script ci-dessous représente les 1000 premières valeurs de la suite $(\sqrt{n}I_n)$ qui semble converger vers un réel $\alpha \approx 1,25$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

abs = [n for n in range(1,1001)]
ord = [np.sqrt(n)*I(n) for n in abs]
plt.plot(abs,ord)
plt.show()
```

3. a. La fonction $g : x \mapsto e^{-x} - 1 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 - e^{-x}$. On en déduit que g est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0 = 0, \text{ i.e. } e^{-x} \geq 1 - x.$$

- b. D'après la question précédente, on a : $\forall x \in [0, 1], 0 \leq (1-x)e^x \leq 1$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], [(1-x)e^x]^{n+1} \leq [(1-x)e^x]^n.$$

Par croissance de l'intégrale, la suite (I_n) est décroissante.

4. a. Puisque $\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on trouve que : $H(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(1)$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 1$. La fonction H est donc prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[0, 1]$, en posant $H(0) = 1$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in [0, 1[, \exp\left(-n\frac{x^2}{2}H(x)\right) = \left[e^x e^{\ln(1-x)}\right]^n = [(1-x)e^x]^n.$$

Puisque l'intégrale I_n converge, l'intégrale

$$\int_0^1 \exp\left(-n\frac{x^2}{2}H(x)\right) dx$$

converge et

$$I_n = \int_0^1 \exp\left(-n\frac{x^2}{2}H(x)\right) dx.$$

La dernière égalité s'obtient en réalisant le changement de variable $u = \sqrt{n}x$ (la fonction $x \mapsto \sqrt{n}x$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, 1]$).

c. En utilisant une densité de la loi normale centrée réduite, on trouve que :

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in [0, \sqrt{n}]$. Puisque $H\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \geq H(0) = 1$, $\exp\left(-\frac{u^2}{2} H\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$. Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

5. a. La suite $u = \left(n^{-\frac{1}{4}}\right)$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{nv_n} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{4}} = +\infty$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $u_n \in [0, 1]$, on trouve par positivité de l'intégrande :

$$I_n \geq \int_0^{u_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(x)\right) dx$$

De plus, pour tout $x \in [0, u_n]$, $H(x) \leq H(u_n)$ donc $\exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(x)\right) \geq \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(u_n)\right)$. On conclut par croissance de l'intégrale que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq \int_0^{u_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(u_n)\right) dx$$

On effectue enfin le changement de variable $u = \sqrt{nv_n} x$ (la fonction $x \mapsto \sqrt{nv_n} x$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, u_n]$)

$$\int_0^{u_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(u_n)\right) dx = \frac{1}{\sqrt{nv_n}} \int_0^{\sqrt{nv_n} u_n} e^{-u^2/2} du.$$

c. D'après les questions 4.c et 5.b, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{\frac{2}{\pi v_n}} \int_0^{\sqrt{nv_n} u_n} e^{-u^2/2} du \leq \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n \leq 1.$$

Remarquons que $v_n = H(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} H(0) = 1$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{nv_n} u_n = +\infty$. On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n = 1,$$

c'est-à-dire : $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

[Retour à la planche 29](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 33](#)

1. L'application f_a est linéaire grâce à la linéarité à gauche du produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f_a(\lambda x + y) = \langle \lambda x + y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle = \lambda f_a(x) + f_a(y).$$

2. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f_a(x) = \sum_{k=1}^n kx_k$.

Puisque $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{Ker } f_a \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n kx_k = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\sum_{k=2}^n kx_k$, il vient que :

$$\text{Ker } f_a = \text{Vect}((-2, 1, 0, \dots, 0), (-3, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (-n, 0, \dots, 0, 1))$$

On montre sans difficulté que la famille $((-2, 1, 0, \dots, 0), (-3, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (-n, 0, \dots, 0, 1))$ est une base de $\text{Ker } f_a$ qui est donc de dimension $n - 1$.

3. Si $a = b$, il est trivial que $f_a = f_b$. Supposons réciproquement que $f_a = f_b$. Il vient que, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, a - b \rangle = 0$. En particulier pour $x = a - b$, on trouve que $\|a - b\|^2 = 0$, i.e. $a = b$. On en déduit l'équivalence recherchée : $f_a = f_b \Leftrightarrow a = b$.

4. Puisque $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, le rang f_a est égal à 0 ou 1. Si $a \neq 0$, $f_a(a) = \|a\|^2 \neq 0$; ainsi $f_a \neq 0$ et donc $\text{rg}(f_a) = 1$. Le théorème du rang assure alors que $\dim \text{Ker } f_a = \dim \mathbb{R}^n - \text{rg}(f_a) = n - 1$.

5. En notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on trouve que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_a(e_k) = a_k$. Ainsi, la matrice de f_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la matrice $M_a = (a_1 \ \dots \ a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

On retrouve sans problème le résultat de la question 3 : $f_a = f_b \Leftrightarrow M_a = M_b a = b$.

On retrouve aussi le résultat de la question 4 : si $a \neq 0$, $\text{rg}(f_a) = \text{rg}(M_a) = 1$.

6. L'implication directe étant évidente, montrons la réciproque. Supposons que, pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$, $f_a(x) = f_a(y)$, i.e. $\langle x - y, a \rangle = 0$. Pour $a = x - y$, on trouve $\|x - y\|^2 = 0$, i.e. $x = y$.

7. On modélise les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par la liste de leurs coordonnées dans la base canonique.

```
def in_Ker_f(a, x):
    ps = 0
    for k in range(len(a)):
        ps += a[k]*x[k]
    return ps == 0
```

8. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = f_a$. On en déduit que $g(e_k) = \langle e_k, a \rangle$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $a = \sum_{k=1}^n \langle a, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^n g(e_k) e_k$, ce qui garantit l'unicité de a .

Synthèse : posons $a = \sum_{k=1}^n g(e_k) e_k$. On en déduit alors que $g(e_k) = \langle e_k, a \rangle = f_a(e_k)$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque g et f_a coïncident sur une base de $\mathbb{R}^n$, $g = f_a$ (par caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base).

9. a. Commençons par remarquer que, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\phi(a) = f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Étudions la linéarité de ϕ : soient $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f_{\lambda a + b}(x) = \langle \lambda a + b, x \rangle = \lambda \langle a, x \rangle + \langle b, x \rangle = \lambda f_a(x) + f_b(x).$$

On en déduit que $f_{\lambda a + b} = \lambda f_a + f_b$, i.e. $\phi(\lambda a + b) = \lambda \phi(a) + \phi(b)$. L'application ϕ est donc linéaire. La question 8 garantit la bijectivité de Φ qui est donc bien un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- b. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sont isomorphes donc de même dimension finie, égale à n . En notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, la famille $(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))$ forme une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

[Retour à la planche 33](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 37](#)

1. a. La variable $X_e + Y_e$ représente l'instant de "mort" de l'espèce (e).
 b. Puisque les variables aléatoires X_e et Y_e sont indépendantes et à densité, la variable aléatoire $X_e + Y_e$ est à densité, de densité h donnée par $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$ où $f : t \mapsto \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(t)$ et $g : t \mapsto e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$. Or :

$$f(t)g(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq \theta \\ x-t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq \theta \\ t \leq x \end{cases}.$$

Ainsi, si $x < 0$, $h(x) = 0$ et :

$$\forall x \in [0, \theta], h(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} e^{-(x-t)} dt = \frac{1}{\theta} (1 - e^{-x}), \quad \forall x > \theta, h(x) = \int_0^\theta \frac{1}{\theta} e^{-(x-t)} dt = \frac{e^{-x}}{\theta} (e^\theta - 1).$$

- c. D'après la question précédente, on trouve que :

$$\forall t > 0, p = \mathbb{P}(X_e + Y_e > \theta + t) = \int_{\theta+t}^{+\infty} h(x) dx = \int_{\theta+t}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\theta} (e^\theta - 1) dx = \frac{1 - e^\theta}{\theta} e^{-t}.$$

2. a. On écrit une première fonction simulant la réalisation de Z_t puis on utilise la loi faible des grands nombres pour estimer son espérance (on importe le module numpy via l'instruction `import numpy as np`).

```
def simuleZ(theta, mu, t):
    z = 0 # nombre d'espèces
    N = np.random.poisson(mu)
    for e in range(N):
        Xe = theta * np.random.rand()
        Ye = np.random.exponential(1)
        if Xe + Ye > theta + t:
            z += 1
    return z
```

```
def esp2Zt(theta, mu, t):
    n = 1000
    s = 0
    for k in range(n):
        s += simuleZ(theta, mu, t)
    return s/n
```

- b. Sachant qu'il y a $N = n$ espèces initialement dans le milieu, Z_t est le nombre de succès ("une espèce est encore présente à l'instant $\theta + t$ ") lors de la répétition de n expériences indépendantes de Bernoulli de paramètre p (calculé à la question 1.c). On en déduit que Z_t suit la loi binomiale de paramètres n et p .
 c. La formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'événements $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$, assure que :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Z_t = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}_{[N=n]}(Z_t = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{(\mu p)^k}{k!} e^{-\mu} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\mu(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{(\mu p)^k}{k!} e^{-\mu} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu(1-p))^i}{i!} \\ &= \frac{(\mu p)^k}{k!} e^{-\mu p}. \end{aligned}$$

On en déduit que Z_t suit la loi de Poisson de paramètre μp . Le script ci-dessous permet de vérifier la cohérence des espérances lorsque les valeurs renvoyées sont proches de 0 :

```
def test(t, theta, mu):
    p = (1-np.exp(-theta))/theta * np.exp(-t)
    return abs(Esp2Zt(theta,mu,t) - mu*p)
```

3. a. Posons $\lambda = \mu(1-p)$. Soit $A \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^A \left| \frac{1}{k+1} \mathbb{P}(W_t = k) \right| &= \sum_{k=0}^A \frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^A \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{A+1} \frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} \left(-1 + \sum_{i=0}^{A+1} \frac{\lambda^i}{i!} \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} (e^\lambda - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \end{aligned}$$

Le théorème du transfert assure alors que $\frac{1}{W_t + 1}$ admet une espérance, égale à $\mathbb{E} \left(\frac{1}{W_t + 1} \right) = \frac{1 - e^{-\mu(1-p)}}{\mu(1-p)}$.

Par indépendance de Z_t et W_t , la variable $\frac{Z_t}{W_t + 1}$ admet une espérance égale à :

$$\mathbb{E} \left(\frac{Z_t}{W_t + 1} \right) = E(Z_t) E \left(\frac{1}{W_t + 1} \right) = \frac{p}{1-p} (1 - e^{-\mu(1-p)}).$$

b. Soit $a \in]0, 1[$. Par stricte positivité de $W_t + 1$, $\left[\frac{(1-a)Z_t + a}{W_t + 1} \geq a \right] = [(1-a)Z_t + a \geq aW_t + a] = [Z_t \geq aN]$ et ainsi $\mathbb{P}(Z_t \geq aN) = \mathbb{P} \left(\frac{(1-a)Z_t + a}{W_t + 1} \geq a \right)$.

Par linéarité, la variable aléatoire $X = \frac{(1-a)Z_t + a}{W_t + 1}$ admet une espérance égale à :

$$\mathbb{E} \left(\frac{(1-a)Z_t + a}{W_t + 1} \right) = (1-a) \mathbb{E} \left(\frac{Z_t}{W_t + 1} \right) + a \mathbb{E} \left(\frac{1}{W_t + 1} \right) = \frac{1 - e^{-\mu(1-p)}}{\mu(1-p)} ((1-a)\mu p + a)$$

Puisque $X = \frac{(1-a)Z_t + a}{W_t + 1}$ est positive, on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(Z_t \geq aN) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a} \leq \frac{(1-a)\mu p + a}{a\mu(1-p)}.$$

c. Soit $\alpha \in]0, 2[$. En posant $\mu = \theta^2$, $t = \ln \theta$ et $a = \frac{1}{\theta^\alpha}$, on a $p = \frac{1 - e^{-\theta}}{\mu}$ et ainsi :

$$0 \leq \frac{(1-a)\mu p + a}{a\mu(1-p)} = \frac{(\theta^\alpha - 1)(1 - e^{-\theta}) + 1}{\theta^2 - 1 + e^{-\theta}} \underset{\theta \rightarrow +\infty}{\sim} \theta^{\alpha-2} \xrightarrow{\theta \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } \alpha \in]0, 2[.$$

En remarquant que pour θ assez grand, $a \in]0, 1[$ et en appliquant l'inégalité de la question précédente, on trouve que $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(Z_{\ln \theta} \geq \frac{N}{\theta^\alpha} \right) = 0$ par passage à la limite.

[Retour à la planche 37](#)

Corrigé de l'exercice de la [planche 40](#)

1. a. La fonction f est bien dérivable sur $]1, +\infty[$ et, pour tout $t > 1$, $f'(t) = \frac{\ln(t) - 1}{\ln^2(t)}$. Ainsi :

$$\forall t > 1, -t^2 f'(t) + t f(t) = \frac{-t^2 \ln(t) + t^2 + t^2 \ln(t)}{\ln^2(t)} = \left(\frac{t}{\ln(t)}\right)^2 = (f(t))^2.$$

La fonction f est donc solution de (E) sur $]1, +\infty[$.

- b. Vérifions que $2f$ n'est pas solution de (E) :

$$\forall t > 1, -t^2 (2f)'(t) + t(2f)(t) = 2(-t^2 f'(t) + t f(t)) = 2(f(t))^2 \neq (2f(t))^2.$$

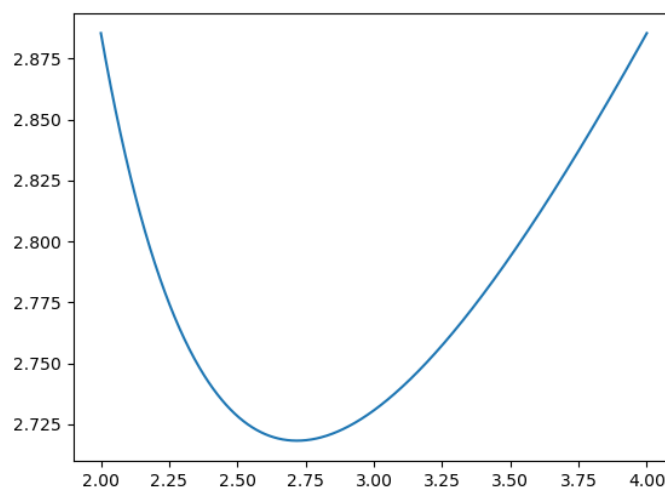
L'ensemble $\mathcal{S}$ n'est donc pas un espace vectoriel.

- c. En exécutant le script ci-dessous, on obtient le graphique ci-contre.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return x/np.log(x)

abs = np.linspace(2, 4, 10**3)
ord = f(abs) # ou ord = [f(x) for x in abs]
plt.plot(abs, ord)
plt.show()
```

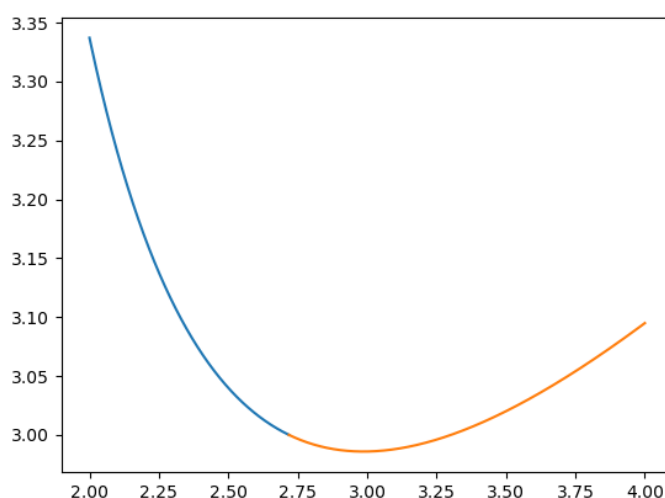


2. Après avoir choisi un pas h , on cherche des valeurs approchées y_k de $y(t_k)$ où $t_k = e + kh$. D'après l'approximation affine rappelée par l'énoncé, on trouve alors que $-t_k^2 \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + t_k y_k = y_k^2$, donc que $y_{k+1} = y_k - h \frac{y_k(y_k - t_k)}{t_k^2}$. On trace alors une solution approchée de (E) vérifiant $y(e) = 3$ en partant de la gauche et de la droite du point $(e, 3)$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def euler(x):
    h = (x - np.e) / (10**3)
    abs = np.linspace(np.e, x, 10**3 + 1)
    y = [3]
    for k in range(10**3):
        q = (y[k]**2 - y[k]*abs[k]) / (abs[k])**2
        y.append(y[k] - h * q)
    return abs, y

abs_gauche, y_gauche = euler(2)
abs_droite, y_droite = euler(4)
plt.plot(abs_gauche, y_gauche)
plt.plot(abs_droite, y_droite)
plt.show()
```



3. Résoudre (E') sur I revient à résoudre l'équation différentielle : $\forall t \in I, z'(t) + \frac{1}{t}z(t) = \frac{1}{t^2}$. On trouve sans difficulté que l'ensemble des solutions de (E') est :

$$\left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{C + \ln t}{t}, C \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

4. Notons $z : t \mapsto \frac{1}{y(t)}$. Puisque y est dérivable et ne s'annule pas sur I , z est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, t^2 z'(t) + tz(t) = -t^2 \frac{y'(t)}{y^2(t)} + \frac{t}{y(t)} = 1.$$

On en déduit qu'il existe un réel C tel que : $\forall t \in I, \frac{1}{y(t)} = \frac{C + \ln(t)}{t}$, i.e. $y(t) = \frac{t}{C + \ln(t)}$.

5. a. Si y est une solution de (E) ne s'annulant pas sur I , alors y est de la forme trouvée à la question précédente. Réciproquement, soit $y : t \mapsto \frac{t}{C + \ln(t)}$ où $C \in \mathbb{R}$. Si $C < 0$, alors y n'est pas définie sur I donc n'est pas solution de (E) . Supposons $C \geq 0$. Dans ce cas, on prouve facilement que y est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, -t^2 y'(t) + ty(t) = -t^2 \frac{C + \ln(t) - 1}{(C + \ln(t))^2} + \frac{t^2}{C + \ln(t)} = \frac{-t^2(C + \ln(t) - 1) + t^2(C + \ln(t))}{(C + \ln(t))^2} = (y(t))^2.$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t}{C + \ln t}, C \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\}.$$

- b. Puisque la fonction nulle est solution de (E) mais pas dans $\mathcal{S}_1$, il vient que $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}$.
 c. Supposons qu'il existe une solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I . Il existe alors $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $y(t) = \frac{t}{C + \ln(t)}$ pour tout $t \in I$. Puisque $y(e) = 3$, $C = \frac{3}{e} - 1 < 0$, ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I .

[Retour à la planche 40](#)