Exercice.

1. Montrons le résultat par récurrence.

   Puisque l'intégrale de référence $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, la propriété est initialisée.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\Gamma(n)$ est une intégrale convergente. Une intégration par parties (les fonctions $u : t \mapsto -e^{-t}$ et $v : t \mapsto t^n$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$) montre que $\Gamma(n+1)$ converge et $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. La propriété est donc héréditaire.

   On en déduit qu'on que l'intégrale $\Gamma(n)$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n+1) = n\Gamma$.

   Une récurrence rapide montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$.

3. La fonction f_n est bien positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, donc sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. D'après la question 1, son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge par linéarité et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

   La fonction f_n est donc bien une densité.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Si Y suit la loi de Poisson de paramètre x, on a :

$$1 - \mathbb{P}(Y \leqslant n-1) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y = k) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} e^{-x}.$$

   On considère alors la fonction $g_n : x \mapsto 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^k}{k!} e^{-x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0,\ g_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} e^{-x} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} e^{-x} - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{x^i}{i!} e^{-x} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} = f_n(x).$$

   On a alors :

$$\forall x > 0,\ \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x g_n'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[g_n(t)\Big]_0^x = g_n(x) = 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant n-1).$$

Exercice.

1. Supposons A admet une unique valeur propre λ et que $A \neq \lambda I_n$. Supposons par l'absurde que A est diagonalisable. Il existerait alors une matrice inversible P telle que $A = P\lambda I_n P^{-1} = \lambda I_n$, ce qui est absurde.

   On en déduit donc que A n'est pas diagonalisable.

2. On distingue alors trois cas :

   - Si $a < 0$, la matrice réelle A n'admet pas de valeur propre réelle, elle n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Si $a > 0$, la matrice réelle A admet deux valeurs propres distinctes ($-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$). Puisque A est de taille 2, elle est diagonalisable.
   - Si $a = 0$, la matrice A admet une seule valeur propre : 0. Puisque $A \neq 0_2$, la matrice n'est pas diagonalisable d'après la question 1.

Exercice.

1. La linéarité ne pose aucun problème. On pourrait raisonner sur le degré de $\Phi(P)$ pour montrer que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, mais étant donné la question suivante, il est plus efficace de calculer l'image de la base canonique:
$$\Phi(1) = 0,\ \Phi(X) = 1 - 2X,\ \Phi\left(X^2\right) = -2X^2, \Phi\left(X^3\right) = -3X^2.$$
On en déduit alors l'image de Φ :
$$\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Vect}\left(\Phi(1), \Phi(X), \Phi\left(X^2\right), \Phi\left(X^3\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(1 - 2X, -2X^2, -3X^2\right) \subset \mathbb{R}_3[X].$$
On en déduit que Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. D'après les calculs précédents, la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Les valeurs propres de Φ sont celles de sa matrice A, on peut les lire sur sa diagonale : 0 et -2.
Puisque $\operatorname{rg}(A) = 2$ et $\operatorname{rg}(A + 2I_4) = 2$, $\dim\operatorname{Ker} A = 2$ et $\dim\operatorname{Ker}(A + 2I_4) = 2$ d'après le théorème du rang. On en déduit alors que A - donc Φ - est diagonalisable (la somme des dimensions de ses espaces propres est égal à $4 = \dim\mathbb{R}_3[X]$.

4. L'endomorphisme Φ n'est pas bijectif puisque 0 est valeur propre de Φ.

Exercice.

1. Remarquons que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{2^k}{3^{k+1}} \geqslant 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{k=0}^{N} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$
Il existe donc bien une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{2^k}{3^{k+1}}$.

2. Puisque $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = n, X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n - k, X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = n - k)\mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^n}{3^{n+2}} \\ &= (n+1)\frac{2^n}{3^{n+2}}.\end{aligned}$$

3. Le théorème du transfert nous amène à étudier la convergence (absolue) de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{1+n}\mathbb{P}(Z = n)$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{n=0}^{N}\left|\frac{1}{1+n}\mathbb{P}(Z = n)\right| = \sum_{n=0}^{N}\frac{2^n}{3^{n+2}} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}.$$
On en déduit que S admet une espérance égale à $\dfrac{1}{3}$.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

1. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a, par indépendance de X et Y :
$$\mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}(X \leqslant z)\mathbb{P}(Y \leqslant z) = \Phi(z)^2$$
La fonction Φ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ la fonction de répartition de Z l'est aussi. La variable aléatoire Z admet donc une densité, égale à $2f\Phi$.

2. On est amené à étudier la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2xf(x)\Phi(x)\,\mathrm{d}x$ donc la convergence (simple) des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\,\mathrm{d}x$. Par intégration par parties (les fonctions $\left(x \mapsto -\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ et Φ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et leur produit converge en $+\infty$), on trouve, sous réserve de convergence, que :
$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \text{ où } \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\,\mathrm{d}x$ et vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

De la même manière, on peut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(x)\,\mathrm{d}x$ et vaut $-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

On en déduit que Z admet une espérance, égale à :
$$\mathbb{E}(Z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice.

1. On vérifie sans problème la linéarité de T.

   Puisque $\dim E = \dim \mathbb{R}^n$, montrer la bijectivité de T revient à prouver son injectivité. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $T(P) = 0$. On en déduit que P admet n racines distinctes. Puisque $\deg P \leqslant n-1$, P est le polynôme nul.

   L'application linéaire T est ainsi injective et donc un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.

2. Par définition, $T(L_i) = e_i$, i.e. $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$.

3. D'après la question précédente, L_i admet $n-1$ racines : $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$. Puisque $\deg L_i \leqslant n-1$, il existe donc un réel λ tel que :
$$\mathcal{L}_i = \lambda \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X - a_j)$$
Puisque $L_i(a_i) = 1$, on trouve que $\lambda = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(a_i - a_j)}$ et ainsi que : $\mathcal{L}_i = \lambda \displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

4. Puisque la famille est de cardinal $n = \dim E$, il suffit d'étudier sa liberté pour prouver que c'est une base de E. Soit $(\lambda, \ldots, \lambda_n)$ tel que $\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on trouve que $\lambda_1 L_1(a_i) + \cdots + \lambda_n L_n(a_i) = 0$, i.e. $\lambda_i = 0$. On en déduit donc que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E.

   Avec la même idée (évaluation en tous les a_i), on trouve que :
$$\forall P \in E,\ P = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(a_i)L_i.$$

Exercice.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1+a^n}{4n!}. = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N}\frac{a^n}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e+e^a}{4}.$$
Puisque $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on en déduit que $\dfrac{e+e^a}{4} = 1$, i.e. $a = \ln(4-e)$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$$\sum_{n=0}^{N} |n\mathbb{P}(X=n)| = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{a^n}{(n-1)!} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{a^{n+1}}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e+ae^a}{4}.$$
La variable aléatoire positive X admet donc une espérance égale à $\dfrac{e+ae^a}{4}$.

3. $S(\Omega) = \mathbb{N}$. Puisque $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que la loi de S est donnée par :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n, S=k)\\
&= \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(X=n, Y=k-n) \text{ car } Y(\Omega)=\mathbb{N}\\
&= \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=k-n) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y\\
&= \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{1+a^n}{4n!}\right)\left(\frac{1+a^{k-n}}{4(k-n)!}\right)\\
&= \frac{1}{16k!}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\left(1+a^n+a^{k-n}+a^k\right)\\
&= \frac{2^k+2(1+a)^k+2^ka^k}{16k!} \text{ en appliquant 4 fois la formule du binôme}\\
&= \frac{2(1+a)^k+2^k(1+a^k)}{16k!}
\end{aligned}$$

Exercice.

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_n\}$ tel que $f(A) = \lambda A$, i.e. $A^T = \lambda A$.
On en déduit que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{j,i} = \lambda a_{i,j} = \lambda(\lambda a_{j,i}) = \lambda^2 a_{j,i}$. Puisqu'il existe $a_{i,j} \neq 0$ ($A \neq 0_n$), on en déduit que $\lambda^2 = 1$, i.e. $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Ainsi, les seules valeurs propres potentielles sont -1 et 1.
Réciproquement, les réels 1 et -1 sont valeurs propres de f et les espaces propres associés sont :

- l'espace des matrices symétriques $E_1(f) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$
- l'espace des matrices anti-symétriques $E_{-1}(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

1. Trivial.

2. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(X^k) = X^k - k(X+1)X^{k-1} = (1-k)X^k - kX^{k-1}$. De plus, $\varphi(1) = 1$. La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 0 & \ddots & & (0) & \\ & & \ddots & -k & & \\ & & & 1-k & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots & -n \\ & & & & & 1-n \end{pmatrix}$$

La matrice A étant triangulaire supérieure, on peut lire son spectre sur la diagonale :

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(A) = \{1-k \mid k \in [\![0,n]\!]\}.$$

Puisque la suite $(1-k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est strictement décroissante, φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes. Puisque $\dim E = n+1$, l'endomorphisme φ est diagonalisable d'après la condition suffisante de diagonalisabilité.

3. Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots a_n X^n \in E$.

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 \text{ et } a_2 = \dots = a_n = 0$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X+1)$.

4. Puisque φ n'est pas injectif (cf. question précédente), il n'est pas surjectif en tant qu'endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

   On montre sans difficulté (en résolvant l'équation matricielle associée) que $X \notin \mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice.

1. La fonction F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc X est une variable aléatoire à densité, de densité :

$$f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}, u(x) = 1 - \dfrac{2}{e^x+1}$. La fonction u étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on trouve que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0.$$

La fonction u est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de la bijection garantit qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $u(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty} u ; \lim\limits_{+\infty} u[=]-1,1[$.

3. On remarque que $Y(\Omega) =]-1,1[$ d'après la question précédente. Ainsi, pour tout $y \leqslant -1$, $P(Y \leqslant y) = 0$ et, pour tout $y \geqslant 1$, $P(Y \leqslant y) = 1$. Soit $y \in]-1,1[$.

$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}\left(1 - \frac{2}{e^X+1} \leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(e^X + 1 \leqslant \frac{2}{1-y}\right) = F\left(\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right) = \frac{1}{1+\frac{1-y}{1+y}} = \frac{1+y}{2} = \frac{y-(-1)}{1-(-1)}.$$

On retrouve bien que la variable aléatoire $Y = u(X)$ suit la loi uniforme sur $[-1;1]$.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.