Exercice.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\Gamma(n)$ est converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (*on pourra raisonner par récurrence*).
2. Calculer $\Gamma(n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la fonction f_n définie ci-dessous est une densité :
$$f_n : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. Soit X une variable aléatoire de densité f_n. Montrer que, pour tout $x > 0$, si Y suit la loi de Poisson de paramètre x, alors $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant n - 1)$.
   (Indication : penser à dériver.)

Exercice.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que si A admet une unique valeur propre λ et que $A \neq \lambda I_n$, alors A n'est pas diagonalisable.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice.
On considère l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $\Phi(P) = (X^2 - X)P'' + (1 - 2X)P'$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Quelles sont les valeurs propres de Φ ? L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
4. L'endomorphisme Φ est-il bijectif ?

Exercice.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{2^k}{3^{k+1}}.$$
2. Soit Y une variable aléatoire de même loi que X et indépendante de X. Donner la loi de $Z = X + Y$.
3. Calculer l'espérance de $S = \dfrac{1}{1 + Z}$.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.
Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite.
On pose $Z = \sup(X, Y)$.

1. Montrer que Z est à densité et donner sa fonction de densité g en fonction de la densité f et de la fonction de répartition Φ communes à X et Y.

2. Montrer que Z admet une espérance et la déterminer à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni de sa base canonique $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ et $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
On considère l'application T de E dans $\mathbb{R}^n$ définie par $T(P) = (P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n))$.

1. Montrer que T est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. On note L_i l'unique antécédent de e_i par T.

   Donner $L_i(a_j)$, pour tout j dans $[\![1; n]\!]$.

3. En déduire $L_i(X)$.

4. Justifier que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de E et donner les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base en fonction des $P(a_i)$.

Exercice.
X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1 + a^n}{4n!}.$$

1. Quelle est la valeur de a ?

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? La calculer le cas échéant.

3. Quelle est la loi de $S = X + Y$?

Exercice.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f suivant :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^T \end{array}$$

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.
Soit n un entier naturel non nul, et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ll} E & \to E \\ P & \mapsto P - (X+1)P' \end{array}$$

1. Vérifier que φ est bien définie et que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. φ est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer le noyau de φ.
4. Justifier que φ n'est pas surjective, puis donner un exemple de vecteur P n'ayant pas d'antécédent par φ.

Exercice.
Soit X une variable aléatoire réelle, de fonction de répartition F donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

1. Justifier que X est une variable aléatoire à densité et donner une densité f de X.
2. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$
   Montrer que u réalise une bijection strictement croissante de $]-\infty; +\infty[$ vers $]-1; 1[$.
3. Montrer que la variable aléatoire $Y = u(X)$ suit la loi uniforme sur $[-1; 1]$.

Exercice.

Exercice.

Exercice.

Exercice.