

Séries numériques

Ce chapitre prolonge l'étude des suites en introduisant la notion de somme infinie, lorsque cela a un sens. Sommer deux nombres, c'est facile. Sommer une liste finie de nombres, c'est une affaire de patience. Mais que se passe-t-il si l'on décide d'additionner une infinité de termes ? Notre intuition humaine crie que le résultat devrait logiquement être infini. Pourtant, le paradoxe de Zénon nous montre que pour parcourir 1 mètre, il faut toujours parcourir d'abord la moitié de la distance restante. Il faut d'abord parcourir un demi-mètre, puis un quart, puis un huitième... On obtient alors que : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$. Une infinité de nombres strictement positifs peut donc avoir une somme finie ! Tout l'enjeu de ce chapitre est de séparer le vrai du faux dans ce monde de l'infini.

SOMMAIRE

1 Définitions	2
2 Propriétés	4
3 Séries à termes positifs	6
3.1 Critère de comparaison de séries à termes positifs	6
3.2 Critère d'équivalence pour les séries à termes positifs	7
3.3 Convergence absolue	7
4 Séries de référence	8
4.1 Séries exponentielles	8
4.2 Séries géométriques et géométriques dérivées	8
4.3 Deux séries de Riemann	9
5 Méthodes	11
5.1 Étudier la nature d'une série	11
5.2 Calculer la somme d'une série convergente	13

OBJECTIFS

- Utiliser la linéarité pour combiner les séries.
- Étudier la nature d'une série à termes positifs par l'un des deux critères de convergence.
- Maîtriser le calcul de sommes de séries à l'aide des séries de références

1 Définitions

Une suite réelle u est définie comme une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, mais on préférera souvent la « voir » comme la suite de ses valeurs. C'est ce qui explique le choix de la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qu'il faut lire comme $(u_0, u_1, u_2, \dots)$. Il convient alors de bien distinguer les notations $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignant la suite (vue comme « l'ensemble ordonné » de ses valeurs) et la notation u_n désignant une valeur particulière de cette suite, celle de rang n .

Définition 1.1

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle. On appelle **série** de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par :

$$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

Cette série est notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Le réel S_n est appelé la **somme partielle de rang n** .

Remarque 1.2

Une série est un cas particulier de suites ; c'est la suite de ses sommes partielles.

On peut « voir » la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ comme la suite $(u_0, u_0 + u_1, u_0 + u_1 + u_2, \dots)$.

Exemple 1.3

- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n$ est la suite $(0, 0 + 1, 0 + 1 + 2, 0 + 1 + 2 + 3, \dots) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Si $q \neq 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ est la suite $(1, 1 + q, 1 + q + q^2, \dots) = \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Définition 1.4

On dit qu'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ **converge** (resp. **diverge**) si la suite de ses sommes partielles converge (resp. diverge). En cas de convergence, on appelle **somme** de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ la limite de la suite des sommes partielles, notée :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

Remarque 1.5

Il convient de ne pas mélanger les notations $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: la notation $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ désigne une suite (et non un nombre), tandis que la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne une limite réelle (donc un nombre).

Par définition, la somme d'une série n'existe pas toujours : c'est une limite. Pour la manipuler, il est indispensable de justifier que cette limite existe **avant** d'utiliser cette somme dans des calculs.

 Exemple 1.6

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} 1$ est divergente.

 Exemple 1.7 – Série harmonique

La série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente.

On ne peut donc pas utiliser la notation $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$: elle n'existe pas !

 Exemple 1.8

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ est convergente et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

 Remarque 1.9

On ne change pas la nature (convergence ou divergence) d'une série si on modifie, supprime ou ajoute un nombre fini de termes. En particulier, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ont même nature.

Sauf mention contraire, on supposera désormais les séries étudiées définies à partir du rang $n_0 = 0$; on peut s'y ramener, quitte à définir les premiers termes de la série comme étant nuls.

2 Propriétés

Propriété 2.1 – Linéarité

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries réelles.

1. Pour tout réel $\lambda \neq 0$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda u_n$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

2. Si les deux séries sont convergentes alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

3. Si l'une des séries converge tandis que l'autre diverge, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ diverge.

Exemple 2.2

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right)$ diverge.

Exemple 2.3

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right)$ converge.

Remarque 2.4 – Cas de deux séries divergentes

Si deux séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ divergent, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$. Par exemple :

- Les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n} \right)$ divergent mais $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n}$ converge.
- Les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2}{n}$ divergent et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{3}{n}$ diverge.

Remarque 2.5 – Linéarité mal appliquée

Si une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ converge, on peut considérer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)$. Pour autant, on ne peut pas écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

AVANT d'avoir vérifié la convergence des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$.

Exemple 2.6

Les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{-1}{n}$ divergent alors que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} \right) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 0$ converge.

En sommant une infinité de termes en espérant que la somme converge, on sent qu'il faut *a minima* que les termes deviennent minuscules, sinon la somme risque d'exploser ou d'osciller.

Lemme 2.7 – Hors-programme ♥

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série réelle convergente. Alors son terme général tend vers 0, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration. Notons S la somme de cette série et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = S_n - S_{n-1}.$$

Par passage à la limite de cette égalité lorsque n tend vers $+\infty$, on trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = S - S = 0$. □

Remarque 2.8

La contraposée de ce lemme fournit un critère de divergence : si le terme général d'une série ne tend pas vers 0, alors la série diverge.

Cependant, si le terme général d'une série tend vers 0, *on ne peut rien dire* : elle peut converger (comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$) ou diverger (comme la série harmonique).

Exemple 2.9

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln n$ diverge.

3 Séries à termes positifs

Définition 3.1

On dit qu'une série réelle $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **à termes positifs** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

3.1 Critère de comparaison de séries à termes positifs

Théorème 3.2 – Critère de comparaison de séries à termes positifs

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries réelles dont les termes généraux vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.

1. Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge.

Démonstration.

1. L'idée est d'appliquer le théorème de la limite monotone à la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^n v_k. \text{ On suppose que la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ converge, i.e. que la suite } (T_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

$$\text{Notons } \ell = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \text{ sa limite.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} \geq 0.$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante. Par le même raisonnement, on trouve que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Fixons $n \in \mathbb{N}$. En sommant les inégalités $u_k \leq v_k$ pour tous entiers k entre 0 et n , on trouve :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k = T_n \leq \ell.$$

On remarque que la dernière inégalité est vraie par croissance de la suite T .

Puisque la suite S est croissante et majorée (par ℓ), elle converge en vertu du théorème de la limite monotone, i.e. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

2. Il s'agit simplement de la contraposée de l'implication 1.

□

Remarque 3.3

On peut affaiblir l'hypothèse du critère de comparaison : le résultat reste vrai lorsqu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

Exemple 3.4

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

 Exemple 3.5

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n + 1}$ converge.

3.2 Critère d'équivalence pour les séries à termes positifs **Théorème 3.6 – Critère d'équivalence pour les séries à termes positifs**

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries réelles **à termes positifs**.

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Démonstration admise.

 Exemple 3.7

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2^n + n}{4^n - 1}$ converge.

Couplé avec la linéarité, le critère d'équivalence peut donner la nature de séries *à termes négatifs*.

 Exemple 3.8

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{-2n}{3n^2 + 5n + 1}$ diverge.

3.3 Convergence absolue

À ce stade, nous ne savons pas encore étudier la nature d'une série dont le terme général n'est pas de signe constant. Mais un passage à la valeur absolue permet de se ramener à une étude de série à termes positifs. L'inégalité triangulaire décrite dans ce paragraphe légitime cette stratégie.

 Définition 3.9 – Convergence absolue

On dit qu'une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge **absolument** si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ converge.

On connaît l'inégalité triangulaire pour une somme finie : la valeur absolue d'une somme finie est inférieure ou égale la somme des valeurs absolues de chacun des termes de la somme précédente. Au prix d'une hypothèse (naturelle !) de convergence, on peut généraliser le résultat aux sommes infinies.

 Théorème 3.10 – Inégalité triangulaire

Si une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, elle est convergente.

Démonstration. Supposons que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ soit absolument convergente, c'est-à-dire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$, alors $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$. Par linéarité, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2|u_n|$

converge. En appliquant le critère de comparaison de séries à termes positifs, on trouve que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + |u_n|)$ converge. Remarquons que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$. Ainsi, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge par linéarité (puisque la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} -u_n$ converge). $\square$

i Remarque 3.11

La réciproque est fautive : il existe des séries convergentes mais non absolument convergentes. Ces séries sont dites **semi-convergentes** (leur étude est hors-programme).

4 Séries de référence

Pour pouvoir utiliser les propriétés précédentes, il nous faut un catalogue de séries dont on connaît la nature et si possible la somme en cas de convergence.

4.1 Séries exponentielles

★ Théorème 4.1 – Convergence des séries exponentielles

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Démonstration admise.

En particulier, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. De même, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$.

4.2 Séries géométriques et géométriques dérivées

★ Théorème 4.2 – Séries géométriques - séries géométriques dérivées

1. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$, appelée **série géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$** , converge si, et seulement si, $q \in]-1, 1[$ et :

$$\forall q \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

2. Les séries $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$, appelées **séries géométriques dérivées de raison $q \in \mathbb{R}$** (d'ordre 1 et 2), convergent si, et seulement si, $q \in]-1, 1[$ et :

$$\forall q \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

 Exemple 4.3

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n}{2^n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 1$.

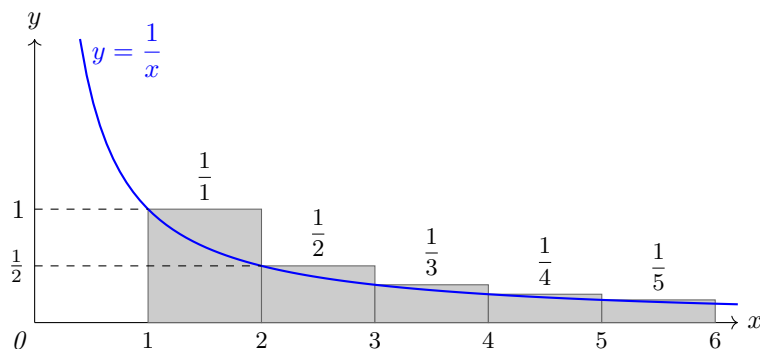
4.3 Deux séries de Riemann

★ **Théorème 4.4** – Comparaison série-intégrale - Séries de Riemann ♥

La série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

Démonstration.

- Montrons que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge. L'idée est d'utiliser que la fonction inverse est en dessous de rectangles particuliers (car décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$) puis la croissance de l'intégrale.



Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $[k, k+1]$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Les deux fonctions en jeu étant continues sur $[k, k+1]$, la croissance de l'intégrale (les bornes vérifient bien $k \leq k+1$) donne alors :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}.$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n , puis en appliquant la relation de Chasles, il vient :

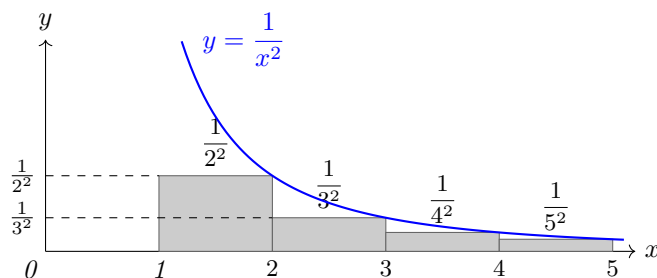
$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1).$$

Or $\ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc par comparaison, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$: la série harmonique diverge.

- L'idée est similaire mais on choisit cette fois-ci des rectangles sous la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$.



Fixons un entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant décroissante sur $[k-1, k]$, on a :

$$\forall t \in [k-1, k], \quad \frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{k^2}.$$

Les deux fonctions en jeu étant continues sur $[k-1, k]$, la croissance de l'intégrale (les bornes vérifient bien $k-1 \leq k$) donne alors :

$$\int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{k^2} dt = \frac{1}{k^2}.$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 2 à n , puis en appliquant la relation de Chasles, il vient :

$$\int_1^n \frac{dt}{t^2} = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2},$$

c'est-à-dire, puisque $\int_1^n \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{n}$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

En ajoutant 1 (le terme d'indice $k=1$) de part et d'autre, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est ainsi majorée (par 2). Elle est aussi croissante car la série est à termes positifs. En vertu du théorème de la limite monotone, elle converge donc.

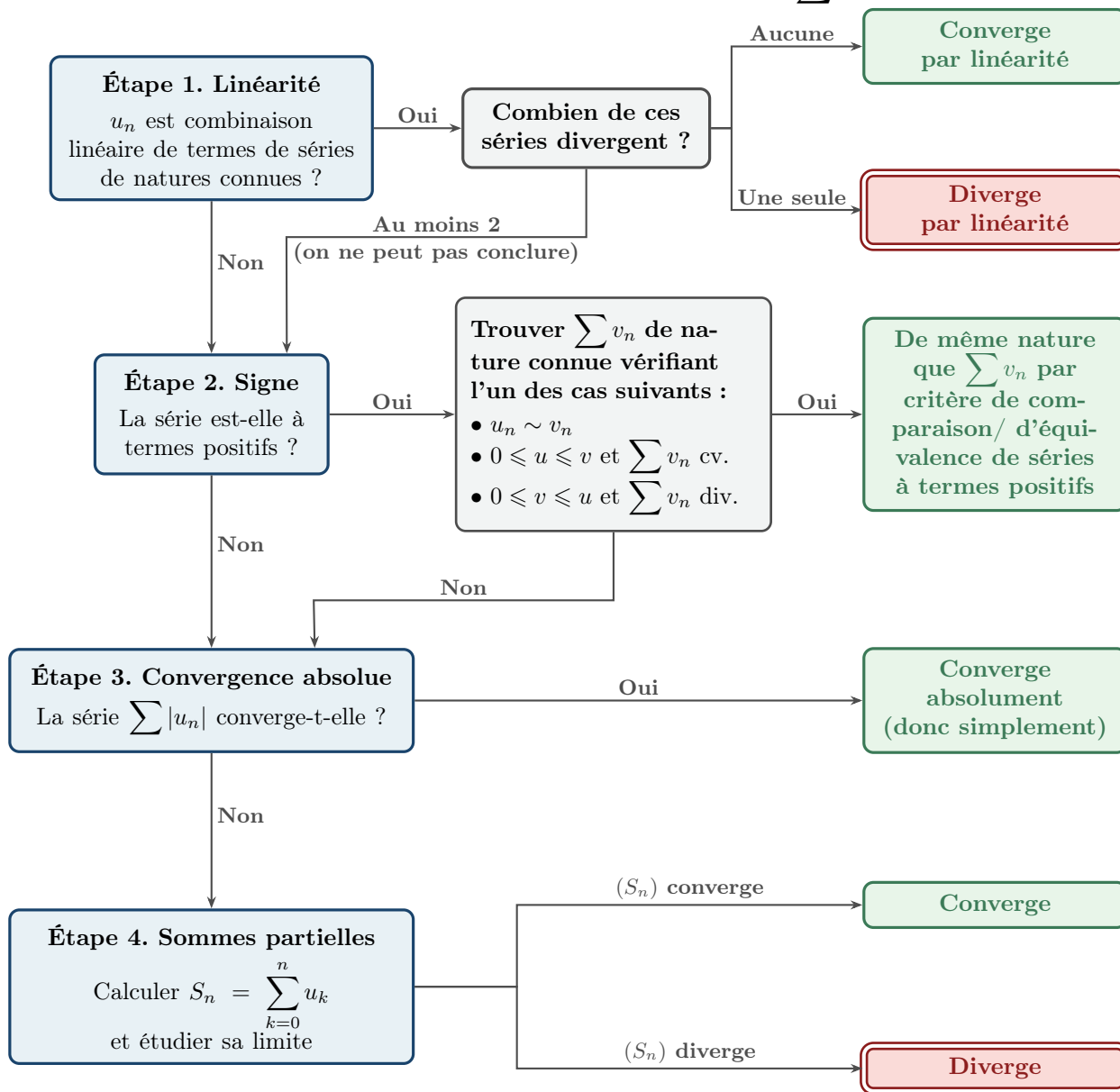
□

5 Méthodes

5.1 Étudier la nature d'une série

Méthode 5.1 – Étude de la nature d'une série

L'arbre de décision ci-dessous permet d'étudier la nature d'une série $\sum u_n$.



Exemple 5.2 – ♥

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2n-5}{3^{n+1}}$ converge.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{2n-5}{3^{n+1}} = \frac{2n}{3^{n+1}} - \frac{5}{3^{n+1}} = \frac{2}{9} \left(n \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

Puisque $\left| \frac{1}{3} \right| < 1$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{3} \right)^n$ (série géométrique) et $\sum_{n \in \mathbb{N}} n \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$ (série géométrique dérivée) convergent.

Par linéarité, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2n-5}{3^{n+1}}$ converge. □

Exemple 5.3 – ♥

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n}$ diverge. On admettra que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 2$, on a : $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$. Puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n}$ diverge aussi par le critère de comparaison de séries à termes positifs. □

Exemple 5.4 – ♥

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ converge.

Démonstration. Cherchons un équivalent du terme général de la série. Pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} &= \exp\left(-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(-n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-n + \frac{1}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right). \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{o(1)} = 1$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n + \frac{1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\frac{1}{2}} (e^{-1})^n$. Puisque $e^{-1} \in]-1, 1[$, la série géométrique $\sum_{n \in \mathbb{N}} (e^{-1})^n$ converge. Par linéarité la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{\frac{1}{2}} (e^{-1})^n$ converge. En remarquant que cette série est à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ converge en vertu du critère d'équivalence de séries à termes positifs. □

Exemple 5.5 – ♥

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos n}{n^3}$ converge.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \left|\frac{\cos n}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$. Puisque la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos n}{n^3}$ converge absolument - donc converge - en vertu du critère de comparaison de séries à termes positifs. □

Exemple 5.6

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Démonstration.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2. Ainsi, pour tout entier naturel N non nul :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

On en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$ converge (et sa somme vaut 1).

□

5.2 Calculer la somme d'une série convergente **Méthode 5.7** – Calcul de la somme d'une série convergente

Pour montrer la convergence d'une série et calculer sa somme dans le même temps, on passe **systématiquement** aux sommes partielles puis on effectue un passage à la limite.

 Exemple 5.8 – ♥

Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{n^2}{2^n} &= \sum_{n=0}^N \frac{n(n-1) + n}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^N n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^N n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=2}^N n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 6. \end{aligned}$$

On peut passer à la limite puisque on les séries géométriques dérivées $\sum_{n \in \mathbb{N}} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ convergent (car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$)

□

 Exemple 5.9 – ♥

Montrons que la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

Démonstration. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) &= \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k^2 - 1}{k^2} \right) \\
 &= \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \right) \\
 &= \sum_{k=2}^n \ln(k-1) + \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k) \\
 &= \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k) \\
 &= \ln(n+1) - \ln 2 - \ln n \\
 &= \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln 2.
 \end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge et a pour somme $-\ln 2$. □

Démonstrations à connaître

- Théorème 3.2 : critère de comparaison de séries à termes positifs.
- Théorème 3.10 : inégalité triangulaire.
- Théorème 4.4 : divergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ et convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.
- Exemple 5.2 (montrer la convergence d'une série par linéarité)
- Exemple 5.3 (appliquer le critère de comparaison de séries à termes positifs).
- Exemple 5.4 (appliquer le critère d'équivalence de séries à termes positifs).
- Exemple 5.5 (utiliser la convergence absolue).
- Exemple 5.8 (calcul de somme de séries convergentes via séries de référence)
- Exemple 5.9 (calcul de somme de séries via sommes télescopiques)