Exercice 1. Sommes et produits finis ♡ [Corrigé] ★☆☆

Donner une expression ramassée de chacune de ces expressions en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^k} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \max(i,j) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \qquad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{i+j}}$$

$$\prod_{k=1}^{n} k \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k+1} \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$$

Exercice 2. [Corrigé] ★☆☆

Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{9^{\ln n}} \qquad \sum \frac{n+1}{n^2-3n+2} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n-2}{2^n+1} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

Exercice 3. Calculs de sommes ♡ [Corrigé] ★★☆

Montrer la convergence puis calculer la somme des séries suivantes.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{6}{5^{n+2}} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+n+1}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{n^2-1}{4^n}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n+(-1)^n n 2^n}{n!} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad \sum_{n\geqslant k} \frac{\binom{n}{k}}{n!} \quad (k\in\mathbb{N}^*)$$

Exercice 4. ♡ [Corrigé] ★★☆

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n}$ converge.

2. On note S_n la somme partielle de rang de n de cette série, et S sa somme.

   Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - S| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

3. En déduire une fonction écrite en `Python` renvoyant une approximation à ε-près de la valeur S (ε étant passé en argument de la fonction demandée).

Exercice 5. ♡ [Corrigé] ★★☆

1. a. Soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série convergente. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   b. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln n$.

2. Montrer qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1}-u_n)$ converge.

Exercice 6. Autour de la série harmonique ♡ [Corrigé] ★★★

1. On considère les suites $(H_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln(n).$$

   a. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{n}.$$

   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

   c. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

   d. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel positif ou nul γ.
   Cette constante est appelée la **constante d'Euler** ($\gamma \approx 0,577215665$).

   e. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

2. À l'aide du développement asymptotique ci-dessus, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (appelée série harmonique alternée) converge et calculer sa somme. *On passera par les sommes partielles en séparant les termes de rang pair ou impair.*

   Remarque : la série harmonique alternée fournit un exemple de série convergente non-absolument convergente.

Exercice 7. Comparaison série-intégrale ♡ [Corrigé] ★★★

1. Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$.
2. En déduire que :
$$\forall k \geqslant 3,\ \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k}$$
3. À l'aide d'un encadrement par des intégrales, en déduire que :
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}.$$
4. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 8. ♡ [Corrigé] ★★★

Soit α un réel supérieur ou égal à 1.

1. Montrer que :
$$\forall x \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{\alpha+k-1} + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+\alpha}}{1+x}.$$
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$ converge et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
3. Retrouver la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

Exercice 9. [Corrigé] ★★★

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si n est un carré} \\[2ex] \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$$
2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 10. Critère spécial des séries alternées [Corrigé] ★★★

1. **Démonstration du critère spécial**

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs et convergeant vers 0.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k.$$
   a. Montrer que les suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   b. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$.

2. **Applications**

   a. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

   b. Discuter de la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ en fonction du réel α.

Exercice 11. Critère de convergence par comparaison [Corrigé] ★★★

1. Vérifier que $\dfrac{1}{\sqrt{n!}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n!}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n!}}$.