**Exercice 1.** [Corrigé] ★☆☆

A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.

**Exercice 2.** [Corrigé] ★☆☆

Montrer que la fonction $f$ définie ci-dessous définit une bijection entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et un ensemble à déterminer, puis étudier la continuité et la dérivabilité de sa réciproque.

$$f : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\sin x} + x \end{array}$$

**Exercice 3.** [Corrigé] ★★☆

On considère les fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

1. Construire le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$.

   Déterminer la limite et la branche infinie de g en $+\infty$ et donner l'allure de la courbe représentative de g sur $[0, +\infty[$.

2. Déterminer le signe de la fonction $h$ définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = g(x) - x$.

3. On considère la suite $(u_n)$ de premier terme $u_0 \in [0, +\infty[$ et telle que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

   Déterminer la nature de la suite $(u_n)$ selon la valeur de $u_0$.

**Exercice 4.** [Corrigé] ★★☆

On considère la fonctions $f$ définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x + 1}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, qu'on notera $\alpha_n$.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\alpha_n \geqslant e^n$.

3. Démontrer que $\alpha_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^n$.

4. On en déduit que $\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon(n))$ où $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

   Montrer que $\varepsilon(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} ne^{-n}$. En déduire l'existence d'une suite $\varepsilon_1$ telle que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n = e^n + n + n\varepsilon_1(n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_1(n) = 0.$$

**Exercice 5.** [Corrigé] ★★☆

Déterminer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - x - \frac{x^2}{2}}{x^2}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{1 - x + \ln x}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$

(v) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(vi) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^4}}$

(vii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{\arctan x} - e^{\tan x}}{e^{\arcsin x} - e^{\sin x}}$

**Exercice 6.** [Corrigé] ★★☆

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction réelle admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ est positivement homogène de degré $\alpha$ si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

1. On suppose que $f$ est positivement homogène de degré $\alpha$. Montrer alors que ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$, i.e. :

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\alpha - 1}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = t^{\alpha - 1}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

2. Montrer que si $f$ est positivement homogène de degré $\alpha$, alors on a:

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y). \quad (\star)$$

3. On suppose réciproquement que $f$ vérifie la relation $(\star)$.

   a. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\varphi : t \to f(tx, ty)$ vérifie l'équation différentielle :

   $$\forall t > 0,\ \varphi'(t) = \frac{\alpha}{t}\varphi(t).$$

   b. En déduire que $f$ est positivement homogène de degré $\alpha$.

**Exercice 7.** [Corrigé] ★★☆

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^6+y^4} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que $f$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.

**Exercice 8.** [Corrigé] ★★★

Déterminer, dans chacun des cas, toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies et admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$(i)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = x^2+y^2 \qquad (ii)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = xy.$$

**Exercice 9.** [Corrigé] ★★★

Soit $a$ un réel strictement positif.
Soit $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[0,a]$ telle que $f(0) = f'(0) = f(a) = 0$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0,a[$.
2. En déduire qu'il existe un autre point que l'origine en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine.

**Exercice 10. Applications du théorème des accroissements finis** [Corrigé] ★★★

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$.

**Exercice 11. Racines des polynômes de Legendre** [Corrigé] ★★★

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n+1$ points distincts de $I$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $I$.

   Indication : on pourra étudier les zéros des dérivées successives de la fonction $f$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme $P_n : x \mapsto (x^2-1)^n$. Montrer que le polynôme de Legendre $L_n = P_n^{(n)}$ admet $n$ racines réelles distinctes sur l'intervalle $]-1;1[$.

   Indication : on pourra étudier les racines des polynômes $\left(P_n^{(k)}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

**Exercice 12. Méthode de Newton** [Corrigé] ★★★

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ $(a<b)$. On suppose que :

$$f(a) > 0, \quad f(b) < 0, \quad f' < 0 \text{ et } f'' > 0 \text{ sur } [a,b]$$

1. Montrer qu'il existe un unique $c \in ]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.
2. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
   a. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à valeurs dans l'intervalle $[a,c]$.
   On pourra considérer la fonction $x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
   b. Montrer que la suite converge. Déterminer sa limite.
3. a. Justifier l'existence de $m = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$.
   b. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) + (c-x)f'(x) + \dfrac{M}{2}(c-x)^2$ est positive sur $[a,c]$.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a :
   $$0 \leqslant c - x_{n+1} \leqslant \frac{M}{2m}(x_n-c)^2.$$
   On dit alors que la convergence est **quadratique** : le nombre de décimales exactes dans l'approximation de $c$ par les termes de la suite double à chaque itération.
   d. En déduire qu'il existe un réel $q \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout entier $n$, on ait :
   $$0 \leqslant c - x_n \leqslant \frac{[q(c-x_0)]^{2^n}}{q}.$$
4. Écrire en `Python` une fonction permettant de renvoyer une approximation à l'aide de la méthode de Newton du zéro sur un segment d'une fonction passée en argument.
   *On supposera que la fonction vérifie les conditions de l'énoncé.*