Exercice 1. [Corrigé] ★☆☆

A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.

Exercice 2. [Corrigé] ★☆☆

Montrer que la fonction f définie ci-dessous définit une bijection entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et un ensemble à déterminer, puis étudier la continuité et la dérivabilité de sa réciproque.

$$f : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\sin x} + x \end{array}$$

Exercice 3. [Corrigé] ★★☆

On considère les fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = \ln(1 + e^x) \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Construire le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$.

   Déterminer la limite et la branche infinie de g en $+\infty$ et donner l'allure de la courbe représentative de g sur $[0, +\infty[$.

2. Déterminer le signe de la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = g(x) - x$.

3. On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 \in [0, +\infty[$ et telle que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

   Déterminer la nature de la suite (u_n) selon la valeur de u_0.

Exercice 4. [Corrigé] ★★☆

On considère la fonctions f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, qu'on notera α_n.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n \geqslant e^n$.

3. Démontrer que $\alpha_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^n$.

4. On en déduit que $\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon(n))$ où $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

   Montrer que $\varepsilon(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} ne^{-n}$. En déduire l'existence d'une suite ε_1 telle que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n = e^n + n + n\varepsilon_1(n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_1(n) = 0.$$

Exercice 5. [Corrigé] ★★☆

Déterminer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}}{x^2}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{1 - x + \ln x}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$

(v) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(vi) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^4}}$

(vii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{\arctan x} - e^{\tan x}}{e^{\arcsin x} - e^{\sin x}}$

On admettra que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 6. [Corrigé] ★★☆

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction réelle admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est positivement homogène de degré α si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

1. On suppose que f est positivement homogène de degré α. Montrer alors que ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$, i.e. :

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = t^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

2. Montrer que si f est positivement homogène de degré α, alors on a:

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y). \quad (\star)$$

3. On suppose réciproquement que f vérifie la relation $(\star)$.

   a. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\varphi : t \to f(tx, ty)$ vérifie l'équation différentielle :

   $$\forall t > 0,\ \varphi'(t) = \frac{\alpha}{t}\varphi(t).$$

   b. En déduire que f est positivement homogène de degré α.

Exercice 7. [Corrigé] ★★☆

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^2}{x^6+y^4} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.

Exercice 8. [Corrigé] ★★★

Déterminer, dans chacun des cas, toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies et admettant des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$(i)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=x^2+y^2 \qquad (ii)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=xy.$$

Exercice 9. [Corrigé] ★★★

Soit a un réel strictement positif.
Soit $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[0,a]$ telle que $f(0)=f'(0)=f(a)=0$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0,a[$.
2. En déduire qu'il existe un autre point que l'origine en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine.

Exercice 10. Applications du théorème des accroissements finis [Corrigé] ★★★

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 11. Racines des polynômes de Legendre [Corrigé] ★★★

1. Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n+1$ points distincts de I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.

   Indication : on pourra étudier les zéros des dérivées successives de la fonction f.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère le polynôme $P_n : x\mapsto(x^2-1)^n$. Montrer que le polynôme de Legendre $L_n=P_n^{(n)}$ admet n racines réelles distinctes sur l'intervalle $]-1;1[$.

   Indication : on pourra étudier les racines des polynômes $\left(P_n^{(k)}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

Exercice 12. Méthode de Newton [Corrigé] ★★★

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ $(a<b)$. On suppose que :

$$f(a)>0,\quad f(b)<0,\quad f'<0 \text{ et } f''>0 \text{ sur } [a,b]$$

1. Montrer qu'il existe un unique $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$.
2. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0=a$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
   a. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à valeurs dans l'intervalle $[a,c]$.
   On pourra considérer la fonction $x\mapsto x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
   b. Montrer que la suite converge. Déterminer sa limite.
3. a. Justifier l'existence de $m=\min\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$ et $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f''(x)$.
   b. Montrer que la fonction $x\mapsto f(x)+(c-x)f'(x)+\dfrac{M}{2}(c-x)^2$ est positive sur $[a,c]$.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$0\leqslant c-x_{n+1}\leqslant\frac{M}{2m}(x_n-c)^2.$$
   On dit alors que la convergence est **quadratique** : le nombre de décimales exactes dans l'approximation de c par les termes de la suite double à chaque itération.
   d. En déduire qu'il existe un réel $q\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout entier n, on ait :
   $$0\leqslant c-x_n\leqslant\frac{[q(c-x_0)]^{2^n}}{q}.$$
4. Écrire en `Python` une fonction permettant de renvoyer une approximation à l'aide de la méthode de Newton du zéro sur un segment d'une fonction passée en argument.
   On supposera que la fonction vérifie les conditions de l'énoncé.

Corrigé de l'exercice 1. [Énoncé]

Le résultat est trivial si $x = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Notons I le segment $[0, x]$ si $x > 0$ et $[x, 0]$ sinon ; notons aussi J l'intervalle ouvert $]0, x[$ si $x > 0$ et $]x, 0[$ sinon.

La fonction sin étant continue sur l'intervalle I et dérivable sur J, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c \in J$ tel que :

$$\cos c = \sin'(c) = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}.$$

On en déduit que $\dfrac{|\sin x|}{|x|} \leqslant |\cos c| \leqslant 1$, et ainsi que $|\sin x| \leqslant |x|$.

On a donc bien prouvé que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|.$$

Corrigé de l'exercice 2. [Énoncé]

Remarquons que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geqslant 0$.

La fonction f est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par opérations sur les fonctions continues.

La fonction racine étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et puisque $\sin x > 0$ pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par opérations sur les fonctions dérivables.

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 1 > 0.$$

La fonction f est strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par continuité en 0.

Puisque la fonction f est strictement croissante et continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, elle réalise, d'après le théorème de la bijection, une bijection entre $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et :

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[0, \frac{\pi}{2} + 1\right].$$

Toujours d'après le théorème de la bijection la réciproque f^{-1} est continue (et strictement croissante) sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2} + 1\right]$ et dérivable sur :

$$f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left]0, \frac{\pi}{2} + 1\right].$$

Pour étudier la dérivabilité de f^{-1} en 0 ($= f(0)$), étudions celle de f en 0 et utilisons la symétrie des graphes de f et f^{-1} par rapport à la première bissectrice.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{\sin x} + x}{x} = \frac{\sqrt{\sin x}}{x} + 1$$

Puisque $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$, il vient que $\dfrac{\sqrt{\sin x}}{x} \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. On en déduit donc que :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Le graphe de la fonction f admet donc une tangente verticale en 0. Par symétrie, le graphe de f^{-1} admet une tangente horizontale en 0, i.e. f^{-1} est dérivable en 0 (et $\left(f^{-1}\right)'(0) = 0$).

Corrigé de l'exercice 3. [Énoncé]

1. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_+$ et g est l'unique primitive de f s'annulant en 0. En particulier $g' = f > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   Remarquons que : $\forall t \geqslant 0,\ f(t) \geqslant \ln(e^t) = t$. Par croissance de l'intégrale, on trouve :

   $$\forall x \geqslant 0,\ g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

   Puisque $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$, on trouve que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

x	0	β	$+\infty$
g	0	β	$+\infty$

   De la même inégalité, on trouve que :

   $$\forall x \geqslant 0,\ \frac{g(x)}{x} \geqslant \frac{x}{2}.$$

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ et ainsi que la courbe de g admet une branche parabolique en $+\infty$.

2. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :
$$\forall x \geqslant 0,\ h'(x) = g'(x) - 1 = f(x) - 1 = \ln(1+e^x) - 1.$$
Ainsi :
$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(1+e^x) > 1 \Leftrightarrow 1 + e^x > e \Leftrightarrow x > \ln(e-1).$$
On en déduit que la fonction h est strictement décroissante sur $[0, \ln(e-1)]$ puis strictement croissante sur $[\ln(e-1), +\infty[$. Puisque $h(0) = 0$, la fonction s'annule en un unique point $\beta \in]\ln(e-1), +\infty[$. On en déduit que h est négative sur $[0, \beta]$ et positive sur $[\beta, +\infty[$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = h(u_n)$. Il nous faut donc déterminer le signe de $h(u_n)$, i.e. situer u_n par rapport à β.
Remarquons à l'aide du tableau de variations de g que les intervalles $[0, \beta[$ et $]\beta, +\infty[$ sont stables par g :
$$\forall x \in [0, \beta[,\ g(x) \in [0, \beta[\text{ et } \forall x \in]\beta, +\infty,\ g(x) \in]\beta, +\infty[.$$
Ainsi, on peut montrer (par récurrence) que dès qu'un terme de la suite "rentre" dans l'un de ces intervalles, tous les termes suivants y resteront aussi.
   - Supposons que $u_0 < \beta$.
   Il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, \beta[$ et ainsi $u_{n+1} - u_n = h(u_n) < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante. Puisqu'elle est minorée, elle converge vers un réel $\ell \in [0, \beta[$. Par passage à la limite de la relation de récurrence et continuité de g sur $[0, +\infty[$, on trouve que $g(\ell) = \ell$, i.e. $h(\ell) = 0$. Puisque h ne s'annule qu'en 0 et β et puisque $\ell \in [0, \beta[$, on trouve nécessairement que $\ell = 0$, i.e. la suite (u_n) converge vers 0.
   - Supposons que $u_0 > \beta$.
   Il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \beta$ et ainsi $u_{n+1} - u_n = h(u_n) > 0$. La suite (u_n) est donc croissante. Si elle convergeait, elle convergerait vers 0 ou β (cela se voit en passant à la limite la relation de récurrence), ce qui est absurde puisque (u_n) est croissante et strictement minorée par β. La suite diverge donc vers $+\infty$.
   - Supposons que $u_0 = \beta$.
   On montre sans difficulté que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \beta$, i.e. la suite (u_n) est constante égale à β.

Corrigé de l'exercice 4. [Énoncé]

1. La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et :
$$\forall x \geqslant 1,\ f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x + 1 + \ln x}{(x+1)^2} > 0$$
La fonction f est donc strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
Puisque f est aussi continue sur $[1, +\infty[$, la fonction f réalise une bijection entre $[1, +\infty[$ et l'intervalle $f([1, +\infty[)$
Remarquons que $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$. On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Puisque $f(1) = 0$, $f([1, +\infty[) = [0, +\infty[$. La fonction f réalise donc une bijection entre $[1, +\infty[$ et $\mathbb{R}_+$. Remarquons que, pour tout entier n non nul, $n \in \mathbb{R}_+$; tout entier non nul n admet donc un unique antécédent par la fonction f, ce qui revient à dire que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que :
$$f(e^n) = \frac{e^n \times n}{e^n + 1} \leqslant n = f(\alpha_n).$$
Par croissance de f sur $[1, +\infty[$, $e^n \leqslant \alpha_n$. Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n \geqslant e^n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que α_n vérifie $\dfrac{\alpha_n \ln \alpha_n}{\alpha_n + 1} = n$ donc $\ln \alpha_n = n \dfrac{\alpha_n + 1}{\alpha_n}$ et ainsi :
$$\alpha_n = \exp\left(n\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)\right).$$
On en déduit alors que $\dfrac{\alpha_n}{e^n} = \exp\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)$. Or $0 \leqslant \dfrac{n}{\alpha} \leqslant \dfrac{n}{e^n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$ par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\alpha_n} = 0$. On en déduit ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{e^n} = 1$, i.e. $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\ln(\alpha_n) = n \dfrac{\alpha_n + 1}{\alpha_n}$ et $\ln(\alpha_n) = n + \ln(1 + \varepsilon(n))$, on trouve que :
$$\ln(1 + \varepsilon(n)) = \frac{n}{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n e^{-n}.$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$,
$$\varepsilon(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1 + \varepsilon(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n e^{-n}.$$
On peut alors écrire $\varepsilon(n) = n e^{-n}(1 + \varepsilon_1(n))$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_1(n) = 0$.
Ainsi :
$$\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon(n)) = e^n\left(1 + n e^{-n}(1 + \varepsilon_1(n))\right) = e^n + n + n\varepsilon_1(n).$$

Corrigé de l'exercice 5. [Énoncé]

(i) Puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, on a :

$$\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{=} -x^2 + o(x^2).$$

Ainsi :

$$\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -x^2.$$

Puis :

$$\frac{\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -1.$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = -1$.

(ii) Pour tout x au voisinage de 1, on a :

$$\frac{x^2-2x+1}{1-x+\ln x} = \frac{(x-1)^2}{-(x-1)+\ln(1+(x-1))}.$$

On pourrait effectuer le changement de variable $h = x-1$, mais nous allons opérer directement : Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 1} x-1 = 0$, on a :

$$-(x-1)+\ln(1+(x-1)) \underset{x\to 1}{=} -(x-1)+(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o\left((x-1)^2\right).$$

Ainsi :

$$-(x-1)+\ln(1+(x-1)) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{(x-1)^2}{2}.$$

D'où :

$$\frac{(x-1)^2}{-(x-1)+\ln x} \underset{x\to 1}{\sim} -2.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{1-x+\ln x} = -2.$$

(iii) Posons $h = \dfrac{1}{x}$. Remarquons que h tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{h^3}+\frac{1}{h^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{h^3}-\frac{1}{h^2}} = \frac{1}{h}\sqrt[3]{1+h} - \frac{1}{h}\sqrt[3]{1-h}.$$

Or :

$$\sqrt[3]{1+h} \underset{h\to 0}{=} 1 + \frac{1}{3}h + o(h) \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{1-h} \underset{h\to 0}{=} 1 - \frac{1}{3}h + o(h).$$

D'où :

$$\frac{1}{h}\sqrt[3]{1+h} - \frac{1}{h}\sqrt[3]{1-h} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{3}h + o(h)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{2}{3} + o(1).$$

On en déduit que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\sqrt[3]{1+h} - \frac{1}{h}\sqrt[3]{1-h} = \frac{2}{3} \quad \text{puis} \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2} = \frac{2}{3}.$$

(iv) Puisque $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin x = 0$, on a :

$$e^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Ainsi :

$$e^x - e^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

On a alors :

$$e^x - e^{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6} \quad \text{et ainsi} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

(v) Pour x au voisinage de 0, $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$. Or :

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{6} + o(x^2) = 0$, on a :

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi :

$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6} + o(1).$$

On en déduit alors que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

(vi) Pour tout x au voisinage de 0, on a :

$$\left(\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^4}} = e^{\frac{1}{x^4}\ln\left(\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x\right)}.$$

Or :

$$\sin^2 x \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Donc :

$$\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x \underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x^4}{8} + o(x^4) = 0$, on a :

$$\ln\left(\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^4}{8} \quad \text{puis} \quad \frac{1}{x^4}\ln\left(\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{8}.$$

On en déduit alors :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\ln\left(\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x\right) = -\frac{1}{8} \quad \text{puis} \quad \lim_{x\to 0}\left(\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^4}} = e^{-\frac{1}{8}}.$$

(vii) Remarquons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Or $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o(u)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = 0$, donc :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o\left(x^2\right).$$

Par intégration terme-à-terme, on trouve que :

$$\arctan x = \arctan x - \arctan 0 \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Puisque $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) = 0$,

$$\begin{aligned} e^{\arctan x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Remarquons que $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour x au voisinage de 0. Or :

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}.$$

Puisque $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o(u)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x^2}{2} = 0$, il vient que :

$$\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser la relation $\tan' = 1 + \tan^2$ *pour déterminer un DL en 0 de* tan *à n'importe quel ordre.*

On en déduit que $e^{\tan x} \underset{x\to 0}{=} e^{x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}$, puis par le même raisonnement que précédemment, on trouve :

$$\begin{aligned} e^{\tan x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$e^{\arctan x} - e^{\tan x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{2}.$$

Puisque : $\forall x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, il vient que :

$$\arcsin'(x) \underset{x\to 0}{=} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Par intégration terme-à-terme, on trouve que :

$$\arcsin x = \arcsin x - \arcsin 0 \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

On en déduit que :

$$e^{\arcsin x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$e^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Ainsi :

$$e^{\arcsin x} - e^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}.$$

On en déduit alors :

$$\frac{e^{\arctan x} - e^{\tan x}}{e^{\arcsin x} - e^{\sin x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x} - e^{\tan x}}{e^{\arcsin x} - e^{\sin x}} = \frac{3}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 6. [Énoncé]

1. Soit $y \in R$ et soit $t > 0$ fixés.

   Les fonction $\phi : x \mapsto f(tx, ty)$ et $\psi : x \mapsto t^\alpha f(x, y)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$: f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et la fonction $(x \mapsto tx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque ϕ et ψ sont égales sur $\mathbb{R}$ (par hypothèse), leurs dérivées sont encore égales sur $\mathbb{R}$. Or :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi'(x) = t\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) \text{ et } \psi'(x) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

   Ainsi on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ t\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),$$

   ou encore, puisque $t \neq 0$:

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

   Puisque cette relation est vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$, on a alors :

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

   La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est positivement homogène de degré $\alpha - 1$. Un raisonnement analogue montrerait que la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est positivement homogène de degré $\alpha - 1$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un couple de réels fixés quelconques.

   D'après la relation d'homogénéité, les fonctions $A : t \mapsto f(tx, ty)$ et $B : t \mapsto t^\alpha f(x, y)$ sont égales (sur $\mathbb{R}$). Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ par un argument analogue à celui de la question précédente et :

   $$\forall t > 0,\ A'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \text{ et } B'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x, y).$$

   Ainsi, pour tout réel t strictement positif, on a :

   $$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x, y).$$

   Cette relation étant vraie pour tout $t > 0$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, elle est donc vraie pour $t = 1$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et s'écrit alors :

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).\ (\star)$$

3. a. Supposons réciproquement que f vérifie la relation $(\star)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   La fonction $\varphi : t \mapsto f(tx, ty)$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition et on a :

   $$\forall t > 0,\ \varphi'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty).$$

   Ainsi, pour tout $t > 0$, on a :

   $$\begin{aligned} t\varphi'(t) &= (tx)\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + (ty)\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \\ &= \alpha f(tx, ty) \quad (\text{d'après la relation } (\star)) \\ &= \alpha\varphi(t) \end{aligned}$$

   On en déduit alors que :

   $$\forall t > 0,\ \varphi'(t) = \frac{\alpha}{t}\varphi(t).$$

   b. La fonction φ est solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{\alpha}{t}y$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

   $$\forall t > 0,\ \varphi(t) = Ce^{\alpha \ln|t|} = Ct^\alpha.$$

   Puisque $C = \varphi(1) = f(1x, 1y) = f(x, y)$, on a alors :

   $$\forall t > 0,\ f(tx, ty) = \varphi(t)Ct^\alpha = t^\alpha f(x, y).$$

   Cette égalité étant vrai pour tout couple de réels (x, y), on en déduit que f est positivement homogène de degré α.

Corrigé de l'exercice 7. [Énoncé]
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Remarquons que $x^6 + x^4 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
Puisque f est un quotient de polynômes en x et y dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3y^2(x^6+y^4) - 6x^5(x^4y^2)}{(x^6+y^4)^2} = \frac{-2x^9y^2 + 4x^3y^6}{(x^6+y^4)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4y(x^6+y^4) - 4y^3(x^4y^2)}{(x^6+y^4)^2} = \frac{-2x^4y^5 + 4x^{10}y}{(x^6+y^4)^2}$$

Étudions l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$; pour cela on s'intéresse au taux d'accroissement :

$$\forall x \neq 0,\ \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0$$

Puisque la limite du taux d'accroissement ci-dessus est nulle, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable au point $(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
De même, on a :

$$\forall y \neq 0,\ \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$$

Par le même argument, la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa seconde variable au point $(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Corrigé de l'exercice 8. [Énoncé]

(i) Raisonnons par analyse-synthèse.

- Analyse. Soit f une fonction vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = x^2 + y^2.$$

Puisque :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = x^2 + y^2,$$

il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + g(y).$$

Il existe donc une fonction dérivable $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(G' = g)$ et une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \frac{x^3}{3}y + x\frac{y^3}{3} + G(y) + h(x).$$

Puisque f admet des dérivées partielles, la fonction h est dérivable.

- Synthèse. Réciproquement, soit f une fonction de la forme

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^3}{3}y + x\frac{y^3}{3} + u(x) + v(y)$$

où u et v sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On montre sans difficulté que f vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = x^2 + y^2.$$

- Conclusion : on en déduit donc que les fonctions recherchées sont les fonctions de la forme

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^3}{3}y + x\frac{y^3}{3} + u(x) + v(y)$$

où u et v sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

(ii) On montre de la même manière que les fonctions recherchées sont les fonctions de la forme

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2y^2}{4} + u(x) + v(y)$$

où u et v sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 9. [Énoncé]

1. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est dérivable sur $]0, a]$. De plus,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0.$$

La fonction g est donc prolongeable par continuité une fonction continue sur $[0, a]$ en posant $g(0) = 0$. En notant toujours g ce prolongement, on remarque que cette fonction g est continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$ et vérifie $g(0) = g(a) = 0$. D'après le théorème de Rolle, la fonction g' s'annule sur $]0, a[$.

2. En notant $c \in]0, a[$ un réel tel que $g'(c) = 0$, on trouve que $g'(c) = \dfrac{cf'(c) - f(c)}{c^2}$ et donc que $f(c) = cf'(c)$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en c est :

$$y = f'(c)(x - c) + f(c) = f'(c)x.$$

Cette droite passe bien par l'origine.

Corrigé de l'exercice 10. [Énoncé]

La fonction inverse étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$, les fonctions exponentielle et identité étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions et :

$$\forall t \in \mathbb{R}*, \; f'(t) = e^{\frac{1}{t}} - \frac{t}{t^2}e^{\frac{1}{t}} = \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{1}{t}}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$; on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis : il existe un réel $c_x \in]x, x+1[$ tel que :

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(c_x).$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, \; \exists c_x \in]x, x+1[, \; (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{c_x}\right) e^{\frac{1}{c_x}}.$$

Pour tout $x > 0, \; c_x > x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} c_x = +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{c_x}\right) e^{\frac{1}{c_x}} = 1.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = 1.$

Corrigé de l'exercice 11. [Énoncé]

1. Montrons par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$, que la fonction $f^{(k)}$ s'annule au moins $n + 1 - k$ fois sur I.
   - La propriété est initialisée : $f^{(0)} = f$ s'annule $n + 1 - 0 = n + 1$ fois sur I.
   - Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $f^{(k)}$ s'annule au moins $n + 1 - k$ fois sur I, en des points notés $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1-k}$.
     On va appliquer le théorème de Rolle sur tout intervalle de la forme $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![1, n-k]\!]$: puisque la fonction $g = f^{(k)}$ s'annule en x_i et x_{i+1} et puisque g est $\mathcal{C}^{n-k}$ sur $[x_i, x_{i+1}]$ (donc continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ car $k < n$), le théorème de Rolle, assure que la fonction $g' = f^{(k+1)}$ s'annule en un point $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$, donc en au mois $n - k$ points de I, ce qui conclut l'hérédité.

   On a donc prouvé que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la fonction $f^{(k)}$ s'annule au moins $n + 1 - k$ fois sur I. En particulier, la fonction $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par remarquer que P_n est de degré $2n$ donc que L_n est de degré n.

   Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $P_n^{(k)}$ s'annule au moins k fois sur $] - 1; 1[$.

   - L'initialisation est triviale, P_n ne s'annule pas sur $] - 1, 1[$ puisque ses seules racines sont 1 et -1.
   - Soit $k \in [\![0, n-1$. Supposons que $P_n^{(k)}$ s'annule au moins k fois sur $] - 1; 1[$. Remarquons que 1 et -1 étant racines de multiplicité n de P_n, ces nombres sont encore racines de $P_n^{(k)}$, de multiplicité $n - k > 0$. La fonction P_n s'annule donc $k + 2$ fois sur l'intervalle $[-1, 1]$. En appliquant l'idée de la question précédente (i.e. en appliquant $k+1$ fois le théorème de Rolle), on trouve que $P_n^{(k)}$ s'annule $k+1$ fois sur l'intervalle $] - 1, 1[$.

   On en déduit que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $P_n^{(k)}$ s'annule au moins k fois sur $] - 1; 1[$. En particulier, $L_n = P_n^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur l'intervalle $] - 1, 1[$. Puisque $\deg L_n = n$, le polynôme L_n s'annule exactement n fois sur l'intervalle $] - 1, 1[$.

Corrigé de l'exercice 12. [Énoncé]

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ $(a < b)$. On suppose que :

$$f(a) > 0, \quad f(b) < 0, \quad f' < 0 \text{ et } f'' > 0 \;\text{ sur } [a, b]$$

1. Faire une figure qu'on complétera au fur et à mesure des questions.

2. La fonction f étant continue et strictement décroissante sur $[a, b]$, f réalise alors une bijection de $[a, b]$ vers $[f(b), f(a)]$. Puisque $f(b) < 0$ et $f(a) > 0$, $0 \in [f(b), f(a)]$.

   Ainsi 0 admet un unique antécédent $c \in [a, b]$ par la fonction f. Puisque $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, on en déduit que $c \in]a, b[$.

3. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \; x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

   a. Placer les premiers termes de la suite sur la figure.

   ?????

b. On considère la fonction $g : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ définie sur $[a,b]$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$x_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n).$$
Montrons que l'intervalle $[a,c]$ est stable par g. Pour cela, étudions la fonction g.
Par opérations sur les fonctions dérivables, g est dérivable sur $[a,b]$ car f et f' le sont (et f' ne s'annule pas !). Ainsi :
$$\forall x \in [a,b],\ g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$
Puisque f et f'' sont positives sur $[a,c]$, g est croissante sur $[a,c]$.
De plus, $g(c) = c$ et $g(a) = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} \geq a$ car $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$. Ainsi $g\left([a,c]\right) = \left[a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}, c\right] \subset [a,c]$, donc $[a,c]$ est un intervalle stable par g.
Un raisonnement par récurrence permet de montrer que la suite est bien définie et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [a,c].$$
Pour tout entier naturel n, $x_{n+2} - x_{n+1} = g(x_{n+1}) - g(x_n)$ est de même signe que $x_{n+1} - x_n$, car g est croissante sur $[a,c]$. La suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de signe constant, i.e. la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Puisque $x_1 = g(x_0) = g(a) \geq x_0$, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante majorée par c, elle converge vers un réel $\ell \in [a,c]$.
Puisque la fonction g est continue sur $[a,b]$ donc en ℓ, et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} = g(x_n)$, on en déduit par passage à la limite que $g(\ell) = \ell$, i.e. $f(\ell) = 0$. Or, d'après la seconde question, l'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution dans $[a,b]$, le réel c. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel c.

4. a. Les fonctions $|f'|$ et f'' étant continues sur le segment $[a,b]$, on en déduit qu'elles atteignent leurs bornes, ce qui justifie l'existence des réels m et M.

b. Considérons la fonction $h : x \mapsto f(x) + (c-x)f'(x) + \dfrac{M}{2}(c-x)^2$.
La fonction h est trivialement dérivable sur $[a,b]$ et on a :
$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b],\ h'(x) &= f'(x) - f'(x) + (c-x)f''(x) - M(c-x)\\ &= (c-x)\left(f''(x) - M\right)\\ &= (x-c)(M - f''(x)).\end{aligned}$$
Puisque $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$, le signe de $h'(x)$ est donné par celui de $x - c$. Ainsi h est strictement décroissante sur $[a,c]$.
Puisque $h(c) = f(c) = 0$, la fonction h est positive sur $[a,c]$.

c. D'après ce qui précède, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) + (c-x_n)f'(x_n) + \frac{M}{2}(c-x_n)^2 \geq 0$$
On en déduit alors que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ c - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq \frac{M}{2|f'(x_n)|}(c-x_n)^2$$
car $f' < 0$ sur $[a,b]$ donc $|f| = -f$ et $|f| \geq m$ $\left(\text{et donc } \dfrac{1}{|f|} \leq \dfrac{1}{m}\right)$ sur $[a,b]$. On a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ c - x_{n+1} \leq \frac{M}{2m}(x_n - c)^2$$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant majorée par c, on a ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq c - x_{n+1} \leq \frac{M}{2m}(x_n - c)^2.$$

d. Posons $q = \dfrac{M}{2m}$. (on trouve q en testant sur les premières valeurs de n).
Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq c - x_n \leq \dfrac{\left[q(c-x_0)\right]^{2^n}}{q}$.

- $c - x_0 = c - a \geq 0$. $\dfrac{\left[q(c-x_0)\right]^{2^0}}{q} = c - x_0$ donc $0 \leq c - x_n \leq \dfrac{\left[q(c-x_0)\right]^{2^0}}{q}$.
- Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 \leq c - x_n \leq \dfrac{\left[q(c-x_0)\right]^{2^n}}{q}$.
D'après la question précédente, on a : $0 \leq c - x_{n+1} \leq q(c-x_n)^2$. On en déduit alors que :
$$0 \leq c - x_{n+1} \leq q\left(\frac{\left[q(c-x_0)\right]^{2^n}}{q}\right)^2 \quad \text{i.e.} \quad 0 \leq c - x_{n+1} \leq \frac{\left[q(c-x_0)\right]^{2^{n+1}}}{q}$$
ce qui conclut l'hérédité ainsi que le raisonnement par récurrence.

On en déduit donc que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant c - x_{n+1} \leqslant \frac{M}{2m}(x_n - c)^2.$$

5. On propose ici deux solutions.
La fonction ci-dessous calcule le terme x_n de rang n de la suite définie par l'exercice.

```python
def Newton(f,fprime,a,n):
    """une approximation d'une solution de f(x)=0
    proche de a par la méthode de Newton après n itérations"""
    x=a
    for k in range(n+1):
        x -= f(x)/fprime(x)
    return x
```

On propose une seconde fonction, plus utile en pratique, qui renvoie le premier terme x_n tel que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$. Cela ne donne pas un ordre de grandeur de l'erreur mais fonctionne en pratique puisque $\lim x_{n+1} - x_n = 0$.

```python
def Newton_bis(f,fprime,a,epsilon):
    """approximation d'une solution de f(x)=0 proche
    de a par la méthode de Newton avec condition d'arrêt"""
    x=a
    while abs(f(x) / fprime(x)) > epsilon:
        x = x- (f(x)/fprime(x))
    return x
```